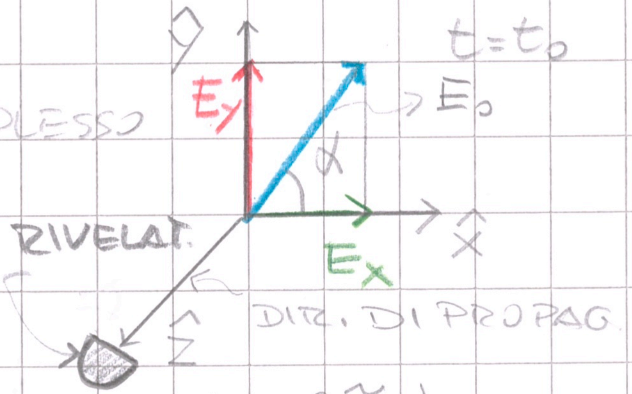
LEZIONE #18 VETTORI E MATRICI DI JONES

COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA IL CAMPO $\bar{E}$ È SUFFICIENTE PER DESCRIVERE UN'ONDA E.M. INOLTRE $\bar{E}$ UN VETTORE PLANARE ESSO PUÒ ESSERE SEMPRE SCOMPOSTO NELLA SOMMA DI DUE COMPONENTI LINEARMENTE INDIPENDENTI. QUESTO CI PERMETTE DI RAPPRESENTARE GLI STATI DI POLARIZZAZIONE DI UN ONDA E.M. MEDIANTE UN FORMALISMO ALGEBRICO COMPATTO E ELEGANTE (VETTORI DI JONES) MENTRE LA MANIPOLAZ. DEGLI STATI DI POLARIZZAZIONE, CHE AVVIENE TRAMITE χSTALLI BI-RIFRANGENTI, SI PUÒ SIMULARE TRAMITE MATRICI 2X2 DETTE MATRICI DI JONES. PARTIAMO SCRIVENDO IL VETTOR $\bar{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$ CHE NEL FORMALISMO COMPLESSO POSSIAMO SCRIVERE COME



$$\tilde{E}_x = E_{0x} e^{i(kz-\omega t+\varphi_x)}$$

$$\tilde{E}_y = E_{0y} e^{i(kz-\omega t+\varphi_y)}$$

DOVE $E_x = \Re(\tilde{E}_x)$ E $E_y = \Re(\tilde{E}_y) \Rightarrow \tilde{E} = E_{0x} e^{i(kz-\omega t+\varphi_x)}\hat{x} + E_{0y} e^{i(kz-\omega t+\varphi_y)}\hat{y} \equiv [E_{0x} e^{i\varphi_x}\hat{x} + E_{0y} e^{i\varphi_y}\hat{y}] \cdot e^{i(kz-\omega t)} = \tilde{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$. IL VETTORE COMPLESSO

$$\tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{0x} \\ \tilde{E}_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \cos\alpha \, e^{i\varphi_x} \\ E_0 \sin\alpha \, e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = E_0 e^{i\varphi_x} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \; \Delta\varphi \end{bmatrix}$$

QUESTA RELAZIONE RAPPRESENTA L'AMPIETTA COMPLESSA DI $\bar{E}$ A $t=t_0$

QUESTA ESPRESSIONE PUÒ ESSERE NORMALIZZATA

DIVIDENDO PER E_0 $\frac{\cancel{E_0}}{\cancel{E_0}} e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\Delta\varphi}\end{bmatrix}$ QUESTA È

LA RELAZIONE DI BASE PER RICAVARE I VETTORI DI JONES PER LA POLARIZZAZIONE LINEARE, CIRCOLARE E ELLITTICA RETTA (ASSI // $\hat{x}$ E $\hat{y}$)

- 1 $\alpha = 0$ $e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$ CON UNA OPPORTUNA SCELTA DEL S.d R POSSIAMO PORRE $\varphi_x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$. MA $\alpha = 0 \Rightarrow \tilde{E} \,//\, \hat{x} \Rightarrow$ POLARIZZAZIONE LINEARE H (**LH**)
- 2 $\alpha = \pi/2$, $\Delta\varphi = \emptyset$ $(\varphi_x = \emptyset = \varphi_y) \Rightarrow \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$ LIN. VER (**LV**)
- 3 $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq \pi/2$, $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{bmatrix}$ LINEARE CON ANGOLO α.
- ESEMPIO $\alpha = 60° = \frac{1}{3}\pi$, $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2 \\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 \\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)$

- 4 $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ $\Delta\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2}\, e^{\pm i\pi/2}\end{bmatrix} \Rightarrow$

$E_{0x} = E_{0y}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 \\ \pm i\end{bmatrix} \Rightarrow$ CIRCOLARE SX $(+i)$ (ANTIORARIO) CIRCOLARE DX $(-i)$ (ORARIO) = **LCP** E **RCP**

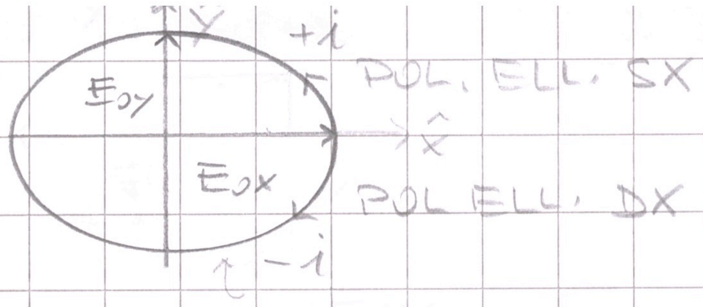
- PROBLEMA DIMOSTRARE CHE $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 \\ +i\end{bmatrix}$ RAPP. UN ONDA E.M. PIANA MONOCROMATICA IL CUI CAMPO $\tilde{E}$ RUOTA IN SENSO ANTIORARIO

5 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ $\Rightarrow \begin{bmatrix}E_{0x} \\ E_{0y}\, e^{\pm\pi/2}\end{bmatrix}$ IN QUESTO

$E_{0x} \neq E_{0y}$

CASO E_{0x} E E_{0y} SONO GLI ASSI DELLA ELLISSE

SE $E_{0x} > E_{0y}$ ⇒



$$\frac{1E_0}{\sqrt{E_{0x}^2+E_{0y}^2}}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}\,\pm i \end{bmatrix}$$

→ TERMINE DI NORMALIZZAZIONE

6) ESISTE ANCHE UN CASO DI POLARIZZAZIONE ELLITTICA CON GLI ASSI DELLA ELLISSE CHE SONO INCLINATI RISPETTO A $\hat{x}, \hat{y}$ IN QUESTO CASO $\Delta\varphi \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi \pm m\pi$ (POLAR. LINEARE)

$\Delta\varphi \neq \pm \pi/2 \pm 3/2\,\pi \pm \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$ CON $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

ESEMPIO CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI E_x GUIDA E_y (POL. ELL. SX) E PONIAMO $E_x = A$ E $E_y = b$ (CON A E b POSITIVI) IL VETTORE DI JONES E'

$\tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} A \\ b e^{i\Delta\varphi} \end{bmatrix}$. PONIAMO $\varphi_x = 0$ E $\varphi_y = \varepsilon$ ⇒

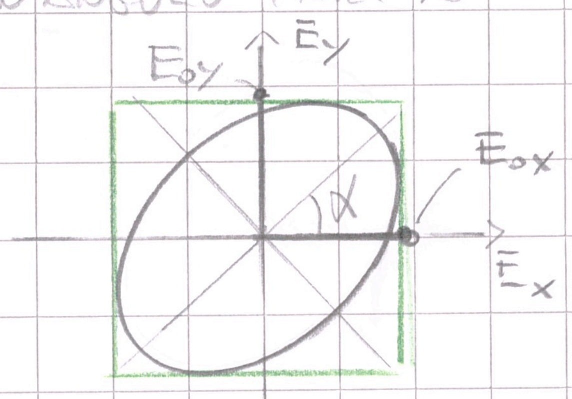
$\begin{bmatrix} A \\ b\, e^{i\varepsilon} \end{bmatrix}$ USANDO IL TEOR. DI EULERO ⇒

$b e^{i\varepsilon} = b(\cos\varepsilon + i \sin\varepsilon) = B + iC$ ⇒

$\begin{bmatrix} A \\ B+iC \end{bmatrix}$ POL. ELL. GENERICA SX

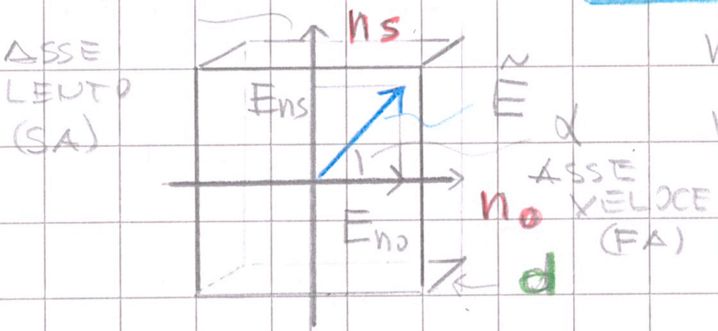
IN QUESTO CASO IL TERMINE DI NORMALIZZAZIONE E' $1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. INVECE L'ELLISSE DI POLARIZZAZIONE E' INCLINATA DI UN ANGOLO PARI A

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\varepsilon}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$$



BIRIFRANGENZA - LAMINE $\lambda/2$ E $\lambda/4$

UN MATERIALE BIRIFRANGENTE POSSIEDE DUE INDICI DI RIFRAZIONE DIFFERENTI A SECONDA DELLA DIREZIONE DELLA LUCE ⇒ NON SONO OTTICAMENTE ISOTROPI. ESEMPIO



n_o = INDICE DI RIF. ORDIN

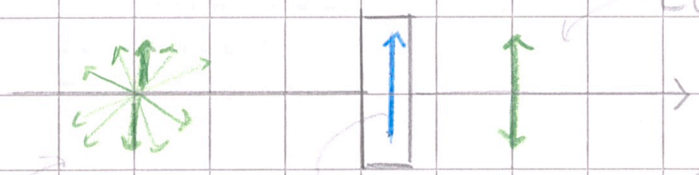
n_s = INDICE DI RIF STRA.

$n_o \neq n_s$

ASSUMENDO LA GEOMETRIA DELLA FIGURA SOPRA IL CAMPO $\tilde{E}$ CHE INCIDE SUL CRISTALLO BI-RIF. (PER ALTRO TRASPARENTE ALLA LUCE E QUINDI PUO' OPERARE SOLO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE DOVE IL XSTALLO E' TRASPARENTE) PUO' ESSERE SCOMPOSTO NELLA COMP. E_{no} ORDINARIA E NELL COMPONENTE E_{ns} STRAORDINARIA. QUESTE DUE COMPONENTI ATTRAVERSERANNO LO SPESSORE d A VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DIFFERENTI $n_o = \frac{c}{V_o} \neq n_s \frac{c}{V_s}$ QUINDI EMERGERANNO DAL CRISTALLO CON FASI DIFFERENTI LA CUI COMBINAZIONE OPPORTUNA MODIFICA LO STATO DI POLARIZZAZIONE DELLA LUCE ENTRANTE.

I CRISTALLI BIRIFRANGENTI POSSONO ESSERE ORIENTATI IN MODO TALE DA AGIRE DA FILTRO DI POLARIZZAZIONE IN QUESTO CASO SELEZIONANDO DA UN FASCIO DI LUCE NON POLARIZZATA SOLO I CAMPI $\tilde{E}$ CHE OSCILLANO IN UN DETER.

PIANO $\Rightarrow$ AGENDO DA POLARIZZATORI LINEARI



ROTAZIONE - POLARIZZAZIONE CIR. - POLARIZZAZIONE ELLITTICA. CONSIDERIAMO $\tilde{E}$ RAPPRESENTATO COME $\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \hat{\varepsilon}$

QUINDI SI TRATTA DI UN'ONDA PIANA MONOCROMATICA A FREQ. ω. UN CRISTALLO BIRIFRANGENTE NON MODIFICA ω NON MODIFICA LA FASE RESIDUA $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\varphi_0}$ MA LA COMPONENTE DI $\tilde{E}$ CHE OSCILLA LUNGO FA (FAST AXIS) PER UNO SPESSORE "d" NELLO SPAZIO EUCLIDEO, AVRÀ PERCORSO UNO SPESSORE dn_0 NELLO SPAZIO FISICO. COSÌ LA COMPONENTE DELLO SL (SLOW AXIS) $\Rightarrow dn_s$. QUANDO LE DUE COMPONENTI EMERGERANNO DAL XSTALLO E SI RICOMPORRANNO AVRANNO UNA FASE $\Delta\varphi$ SPAZIALE DATA DA $\frac{2\pi}{\lambda} dn_s - \frac{2\pi}{\lambda} dn_0 = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_s - n_0)$

SE IMPONIAMO $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ OTTENIAMO

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} d(n_s - n_0) = \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{d(n_s - n_0) = \frac{\lambda}{4}}$$ CON $\Delta\varphi = \pi$

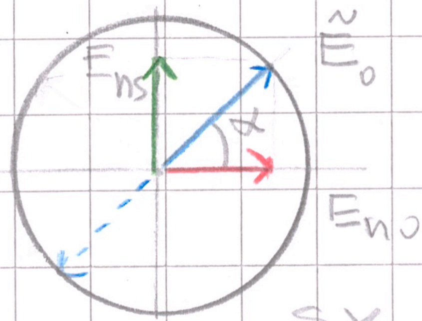
$$\Rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} d(n_s - n_0) = \cancel{\pi} \Rightarrow \boxed{d(n_s - n_0) = \frac{\lambda}{2}}$$

NEL PRIMO CASO ABBIAMO OTTENUTO UNA POLARIZZAZIONE ELLITTICA SE $\alpha \neq 0, \pi/2, \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ $\tilde{E}_{0n_s} \neq \tilde{E}_{0n_0}$ MA SE $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ OTTENIAMO UNA

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE ($\Delta\varphi = \pm\pi/2$, $E_x = E_y$)
QUESTA PUÒ ESSERE DX O SX A SECONDA CHE $\Delta\varphi$ SIA $+\pi/2$ O $-\pi/2$ $\quad e^{\pm i\pi/2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$.

- **OSSERVAZIONE**. $\frac{2\pi d}{\lambda} n$ PUÒ ESSERE INTERPRETATO COME SPAZIO MATER. d EQUIVALENTE A UNO SPAZIO LIBERO nd (NELLO STESSO TEMPO CHE L'ONDA PERCORRE d NEL MATERIALE PERCORREREBBE $d \cdot n$ NELLO SPAZIO LIBERO, $n = \frac{c}{v}$) MA ANCHE COME $2\pi d \frac{n}{\lambda}$ $\Rightarrow$ DATO CHE ω NON CAMBIA LA λ_L DELLO SPAZIO LIBERO È $> \lambda_M$ MATERIALE.

→ PER OTTENERE LA LCP O RCP È NECESSARIO CONSIDERARE L'ANGOLO α



$\tilde{E}_0$ OSCILLA A ω NEL PIANO DEFINITO DA α. CON $\alpha = 45°$ LA POLARIZZAZIONE È CIRCOLARE. PROBLEMA: SARÀ DX O SX. PER OTTENE LA POLARIZZAZIONE CIRCOLARE OPPOSTA QUANTO DEVE VALERE α? | NEL CASO DI $\lambda/2$ SI OTTIENE UNA ROTAZIONE DELLA POLARIZZAZIONE LINEARE. ANCHE IN QUESTO CASO L'ANGOLO DI ROTAZIONE DIPENDE DALL'ANGOLO α MA SI RICORDI CHE IN QUESTO CASO $\Delta\varphi = \pi$. PROBLEMA: DIMOSTRARE QUESTA AFFERMAZIONE.

- MATRICI DI JONES QUESTI ARGOMENTI CI PORTANO A PENSARE CHE QUESTI ELEMENTI OTTICI

SI POSSONO RAPPRESENTARE TRAMITE UNA MATRICE 2X2 $M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ QUESTE MATRICI SONO DETTE MATRICI DI JONES. L'AZIONE DEL POLARIZZATORE SULLO STATO DI POLARIZZAZIONE LO POSSIAMO QUIND FORMALIZZARE CON LA SEGUENTE RELAZIONE

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\text{MAT. DI JONES}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{VETTORE ENTRANTE}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{\text{VETTORE USCENTE}}$$

OSSERVAZIONE. LE MARICI CHE RAPPRENTANO L'AZIONE CHE L'ELEMENTO POLARIZZATORE OPERA SULLO STATO DI POLARIZZAZIONE VANNO COSTRUITE AD-HOC.

• ESEMPIO

CONSIDERIAMO IL CASO DI UN POLARIZZATORE

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

QUESTA RELAZIONE TRA VETTORI E MATRICI È EQUIVALENTE ALLE RELAZIONI ALLE RELAZIONI ALGEBRICHE $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$; $c \cdot 0 + d 1 = 1$ $\Rightarrow$ $b = 0$ E $d = 1$. ORA CONSIDERIAMO IL CASO DI POLARIZZAZIONE LH $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot 0 &= 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow c = 0 \text{ E } a = 0 \Rightarrow$$

UN POLARIZZATORE LINEARE È RAPP. DALLA MATRICE $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. SEGUENDO QUESTO APPROCCIO SI POSSONO COSTRUIRE LE MATRICI DI VARI ELEMENI DI POLARIZZAZIONE DI CUI SUL "FOWLES"

TROVATE UNA ESTESA TABELLA. DOVE STA IL VANTAGGIO DELL'UTILIZZO DI QUESTO FORMALISMO?
NEL CASO DI UTILIZZO DI UN ELEMENTO SINGOLO FORSE NON C'E', MA IN UN SISTEMA CHE UTILIZZA UNA SERIE DI ELEMENTI POLARIZZATORI RAPPRESENTATI DA UNA SERIE DI MATRICI $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$ ALLORA UNO STATO DI POLARIZZAZIONE V CHE ENTRA NELLA SERIE DI POLARIZZATORI M_n EMERGE CON UNA POLARIZZAZIONE $M_S V$ DOVE

$$M_S \equiv (M_1 M_2 M_3 \cdots M_n) \Rightarrow (M_1 M_2 \cdots M_n) V = M_S V$$