

ESEMPIO UN PRISMA FACENDO PRECIPITARE IL SISTEMA IN UNA CONDIZIONE "OSSERVABILE", MA NELLO STESSO TEMPO ROMPENDO L'AMBIGUITA' DI "DOPPIO STATO" DELL'ONDA "INCIDENTE-RIFLESSA" A $z=0$.

• OSSERVAZIONE: ABBIAMO UTILIZZATO UN VETTORE \vec{k} IN DUE CASI: PER L'ONDA EVANESCENTE E PER UN MEZZO DISSIPATIVO. NEL PRIMO CASO $\vec{k} = k + i\kappa$ HA UNA COMPONENTE IMMAGINARIA NON DISSIPATIVA $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{S} \rangle = \phi$, MENTRE NEL SECONDO CASO $\kappa = \frac{\alpha}{2}$ RAPPRESENTA LA RADIAZIONE ASSORBITA E DUNQUE DISSIPATA. QUESTO CI INDUCE A PENSARE AL PARTICOLARE SIGNIFICATO DI $i\kappa$ NEL CASO DI ONDA EVANESCENTE, COME ABBIAMO CERCATO DI SPIEGARE CON IUEL PARAGRAFETTO DEGLI AFORISMI OTTICI.

• LEZIONE #21 PRIMA DI INIZIARE GLI ARGOMENTI DI OTTICA FISICA PROPRIAMENTE DETTI: INTERFERENZA E DIFFRAZIONE E' NECESSARIO CHIARIRE ALCUNE RELAZIONI FONDAMENTALI TRA PROCESSI OTTICI - TRASFORMATE DI FOURIER, FUNZIONE DI CORRELAZIONE E CROSS-CORRELAZIONE E CONVOLUZIONE. SI ASSUME CHE LO STUDENTE ABBA GIA' ACQUISITO I FONDAMENTI MATEMATICI DELLA ANALISI DI FOURIER E QUINDI QUI RIPORTIAMO SOLO LE DEFINIZIONI E IL LORO SIGNIFICATO FISICO.

TRASFORMATA DI FOURIER E TRASFORMATA INVERSA

SERIE DI FOURIER, QUANDO UN NUMERO FINITO DI FUNZIONI ARMONICHE (ONDE E.M. NEL NOSTRO CASO) SONO SOVRAPPOSTE (SOMMATE) ANCHE SE HANNO AMPIEZZE E FASI DIFFERENTI, IL RISULTATO E' ANCORA UNA FUNZIONE ARMONICA DI UNA DATA FREQUENZA.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos l\omega t + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin l\omega t \quad \text{CON}$$

$$a_l = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t dt; \quad a_0 = \frac{\pi}{\omega} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(t) dt$$

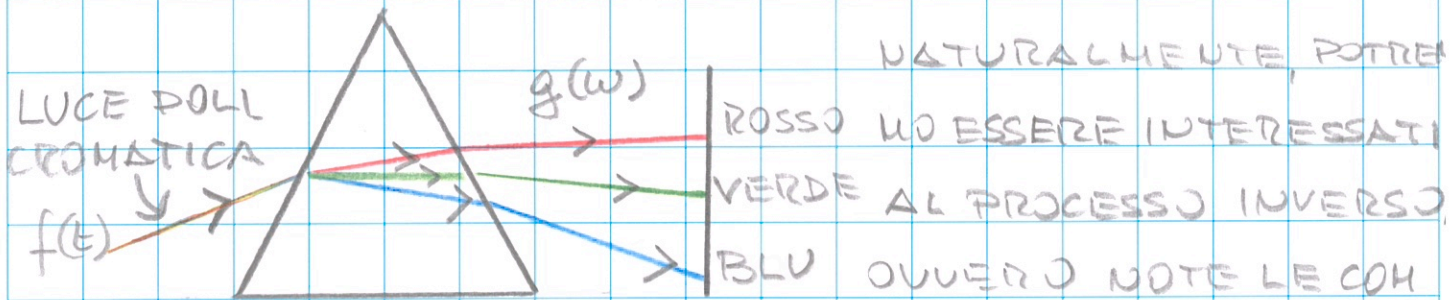
$$b_l = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t dt$$

SE LE FUNZIONI SOVRAPPOSTE DIFFERISCONO ANCHE IN FREQUENZA IL RISULTATO NON E' PIU' UNA FUNZIONE ARMONICA, MA ANARMONICA DI FORMA ARBITRARIA.

• DOMANDA: QUAL E' LA DIFFERENZA TRA FUNZIONE ARMONICA E ANARMONICA? SONO ENTRAMBE PERIODICHE?

QUINDI LA SOVRAPPOSIZIONE DI FUNZIONI ARMONICHE DI DIVERSA FREQUENZA PORTA A REALIZZARE IMPULSI PERIODICI CON UNA GRANDE VARIETA' DI FORME. IL PROCESSO DI SCOMPOSIZIONE DELLE FORME D'ONDA NELLE LORO COMPONENTI ARMONICHE E' DETTO ANALISI DI FOURIER. QUESTO PROCESSO E' ASSICURATO DAL TEOREMA DI DIRICHLET CHE PORTA AL RISULTATO SCRITTO SOPRA.

UN ESEMPIO FISICO SEMPLICE CI E' OFFERTO DAL PROCESSO DI DISPERSIONE DI UN PRISMA OTTICO CHE SFRUTTANDO LA DIPENDENZA DELL'INDICE DI RIFFRAZIONE DALLA FREQUENZA DELL'ONDA E.M. $n = n(\omega)$ PERMETTE DI SEPARARE LE VARIE COMPONENTI DI UNA RADIAZIONE POLICROMATICA



NATURALMENTE, POTREMO

UNO ESSERE INTERESSATI

AL PROCESSO INVERSO,

OVVERO NOTE LE COM-

POONENTI ARMONICHE CALCOLARE $f(t)$. SE IDENTIFI-

CHIAMO LE COMPONENTI IN BASE ALLA LORO

FREQUENZA E LA FORMA D'ONDA COME UNA FUN-

ZIONE DEL DOMINIO DEL TEMPO ($f(t)$) ALLORA

CI E' CHIARO CHE CON L'ANALISI DI FOURIER E IL SUO

PROCESSO INVERSO ABBIAMO A DISPOSIZIONE UNO

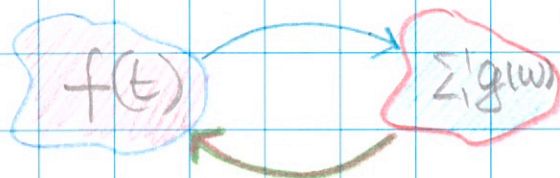
STRUMENTO FORMALE CHE CI PERMETTE DI PASSARE

DAL DOMINIO DEL TEMPO A QUELLO DELLE FREQUENZE

E VICEVERSA SIMULANDO DIVERSI FENOMENI FISICI

DEI QUALI LA DISPERSIONE DELLA LUCE E' UN

ESEMPIO



SPECCHIO

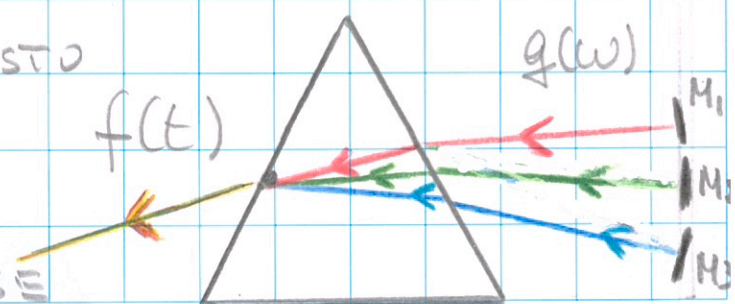
PER CAPIRE MEGLIO QUESTO

CONCETTO E' SUFFICIENTE

USARE UNO SPECCHIO CHE

RIMANDA LE ONDE DISPERSE

DAL DOMINIO DELLE FREQ. A QUELLO DEI TEMPI



NEL CASO SI VOLESSE RAPPRESENTARE UNA FUNZIONE NON PERIODICA, QUESTA PUO' ESSERE INTERPRETATA MATEMATICAMENTE COME UNA FUNZIONE PERIODICA CON $T \rightarrow \infty$. NATURALMENTE, VISTA LA RECIPROCA' TEMPO-FREQUENZA ESSA PUO' ESSERE VISTA COME UNA FUNZIONE CONTINUA DELLA FREQUENZA LA CUI RELAZIONE INVERSA, I.E. QUELLA CHE CI FA PASSARE DAL DOMINIO DELLE ω A QUELLO DEI t , PRODURRA UN IMPULSO DI PERIODO ∞ . NEL CASO DELLA SCOMPOSIZIONE DI FUNZIONI NON PERIODICHE SI DIMOSTRA CHE LE SERIE DISCRETE DI FOURIER DIVENTANO INTEGRALI. PER MAGGIORI DETTAGLI RACCOMANDO AGLI STUDENTI I SITI

https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series E UN SECONDO CON FINALE [/Fourier transform](#). \Rightarrow

LE SERIE DI FOURIER DIVENTANO I SEGUENTI INTEGRALI:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

IN PRATICA UNO SPETTRO DI FREQUENZE DISCRETE E' SOSTITUITO DA UNO SPETTRO DI FREQUENZE CONTINUE. **ESEMPIO** UNA LAMPADA A FILO INCANDESCENTE DA' LUOGO A UNO SPETTRO DI FREQUENZE CONTINUE (EQUIVALENTE A UN NUMERO DI EMETTITORI INFINITO) UNA LAMPADA A SCARICA DI GAS EMETTE LUCE A FREQUENZE DISCRETE CORRISPONDENTI A SINGOLE E DEFINITE TRANSIZIONI ELETTRICHE. A QUESTO PUNTO POSSIAMO NOTARE CHE QUESTO FORMALISMO PUO' ESSERE ESTESO

DA TUTTI I CASI IN CUI SI PUO' DEFINIRE IL RECIPROCO DI
 UNA VARIABILE, NON CI DEVE SFUGGIRE CHE $t \equiv \frac{1}{f}$.
 TRA I VARI ESEMPI CHE SI POSSONO FARE UNO E' DI
 PARTICOLARE INTERESSE PER NOI: LA PERIODICITA'
 SPAZIALE E IL SUO RECIPROCO. INFATTI, PER UNA
 FUNZIONE DELLA POSIZIONE SPAZIALE x , CON PERIODO
 L (INVECE DI T), POTRA' ESSERE DEFINITO UN SUO
 RECIPROCO, CHE CHIAMEREMO FREQUENZA SPAZIALE
 IN MODO ANALOGO A QUANTO FATTO NEL CASO
 TEMPO-FREQUENZA $T \rightarrow \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega$, $L \rightarrow \frac{2\pi}{L} \rightarrow k$
 CHE NEL CASO DI UN'ONDA PUO' ESSERE
 SCRITTO $\lambda \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow k$. QUESTA OSSERVAZIONE
 APRE LA VIA PER INTERPRETARE LA DIFFRAZIONE
 COME UN FENOMENO FISICO (OTTICO) BASATO SULLA
 TRASFORMATA DI FOURIER DALLO SPAZIO DIRETTO
 ALLO SPAZIO RECIPROCO. SU QUESTE BASI POGGIA
 ANCHE L'OTTICA DI FOURIER SULLA QUALE SI FONDA
 IL TRATTAMENTO DELLE IMMAGINI E PIU' IN GENERALE
 DEI SEGNALI OTTICI.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ikx} dk, \quad g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

IN UNA SCRITTURA PIU' FORMALE SI SCRIVE

$$TF = \mathcal{F}\{f(t)\} = g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$TF^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

• OSSERVAZIONE IN ALCUNI TESTI \mathcal{F} E \mathcal{F}^{-1} SONO
 ESPRESSE IN TERMINI SIMMETRICI DOVE I

PREFATTORI SONO $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ PER \mathcal{F} E $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ PER \mathcal{F}^{-1} .

● FUNZIONE DI CORRELAZIONE E AUTO-CORRELAZIONE

$$h(\tau) = a(t) \oplus b(t) \equiv \int_{-A}^{+A} a(t) b^*(t-\tau) dt$$

CHE ESPRESSA IN TERMINI DI TF RISULTA

$$h(\tau) = a(t) \oplus b(t) \equiv \mathcal{F} \{ A(\omega) B^*(\omega) \} \text{ DOVE}$$

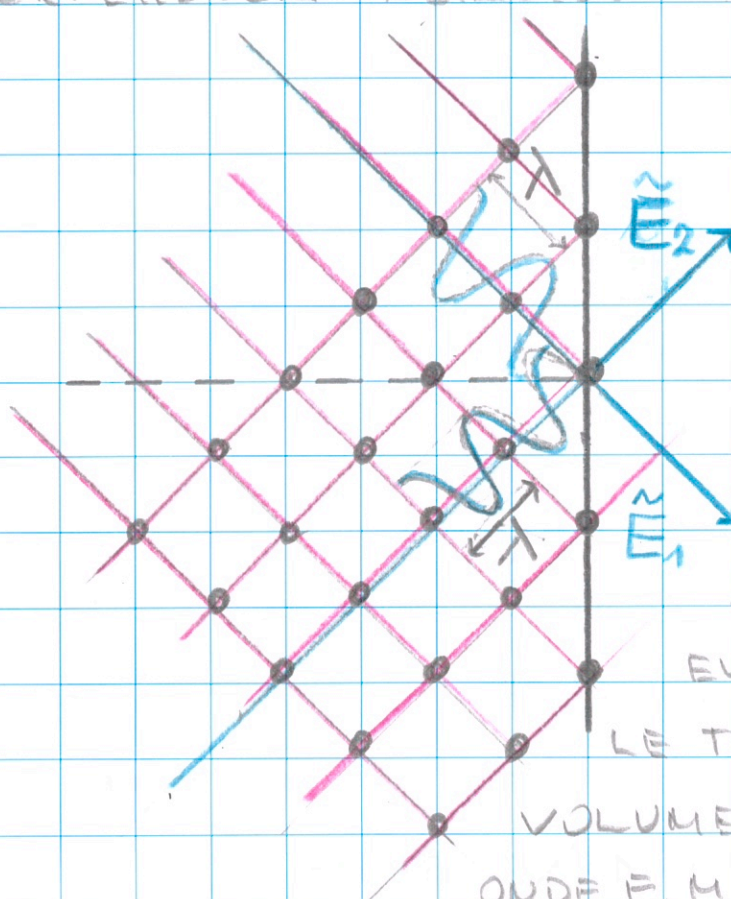
$A(\omega)$ E' LA $\mathcal{F} \{ a(t) \}$ E $B^*(\omega)$ E IL COMP. COGN. DI $\mathcal{F} \{ b(t) \}$. SE $b(t) = a(t)$ SI RIENTRA

NEL CASO DI AUTO-CORRELAZIONE. IL NOSTRO

INTERESSE VERSO QUESTO FORMALISMO RISIETE

NEL FATTO CHE ESSO DESCRIVE I PROCESSI DI INTERFERENZA.

● INTERFERENZA RADIAZIONI E.M.

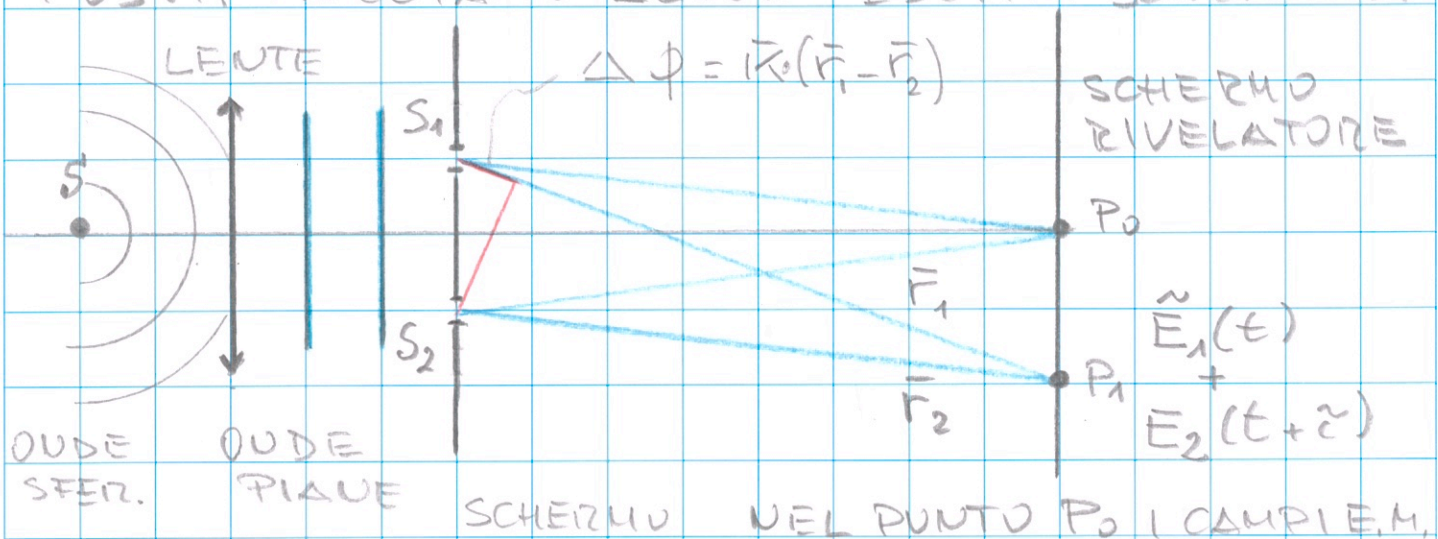


$t=t_0$

LA FIGURA "FOTOGRAFATA" NELLO SPAZIO LA DISTRIBUZIONE ISTANTANEA DELLA ENERGIA E.M. NELLA LORO EVOLUZIONE TEMPORALE. TUTTI I PUNTI DEL VOLUME OCCUPATO DALLE ONDE E.M. HANNO IN MEDIA

LA STESSA ENERGIA E.M. PER IL PRINCIPIO DI

SOVAPPOSIZIONE, ORA COSTRUIAMO UN SISTEMA DOVE LA FASE SPAZIALE DEI CAMPI SIA DEFINITA E CONTROLLATA. QUESTO SISTEMA DEVE AVERE ALMENO 2 PUNTI SORGENTE (REALI O IMMAGINARI) DAI QUALI PARTONO I CAMPI E.M. CHE VERRANNO SOVAPP. POSTI, FACCIAMO ALCUNI ESEMPI SCHEMATICI



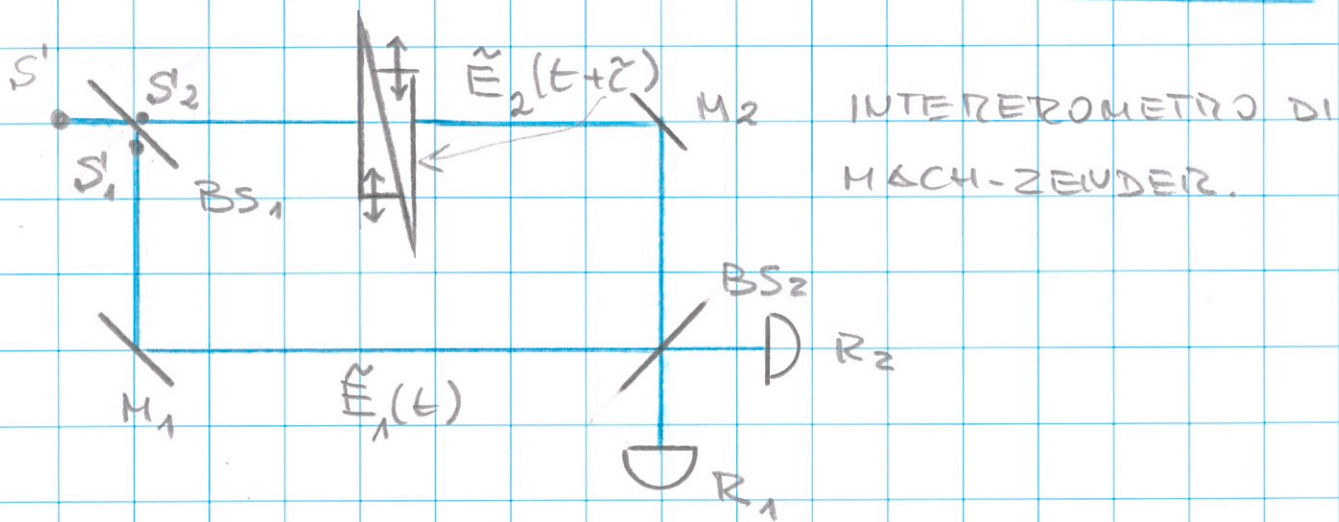
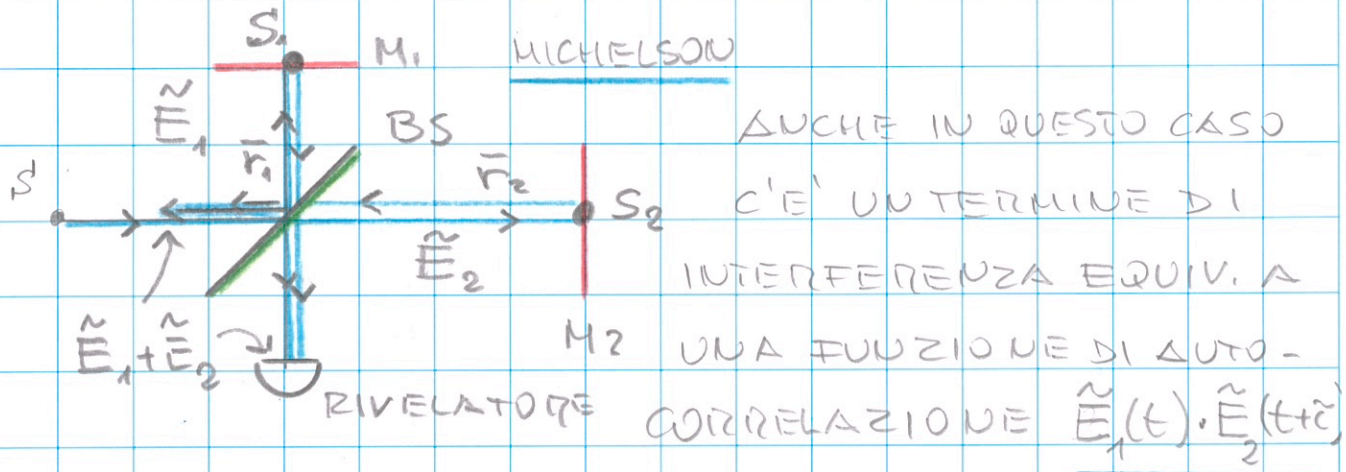
NEL PUNTO P0 I CAMPI E.M. ARRIVANO SEMPRE CON $\Delta\phi = 0$ DATO CHE IN S1 E S2 ARRIVA LA STESSA ONDA PIANA GENERATA DA S'. $\Delta\phi$ RESIDUA E' ZERO, τ E' $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|/c$. L'ONDA $\vec{E}_1(\vec{r}_1, t)$ PERCORRE UNO SPAZIO MAGGIORE DI $\vec{E}_2(\vec{r}_2, t)$ E QUINDI ARRIVA IN P2 CON UN RITARDO τ . L'IRRA- DIAENZA IN P2 (PER ESEMPIO) E' DATA DA

$$I = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_{TOT}^2 \rangle = \epsilon_0 c \langle (\vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t+\tau))^2 \rangle = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 + 2 \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t+\tau) \rangle$$

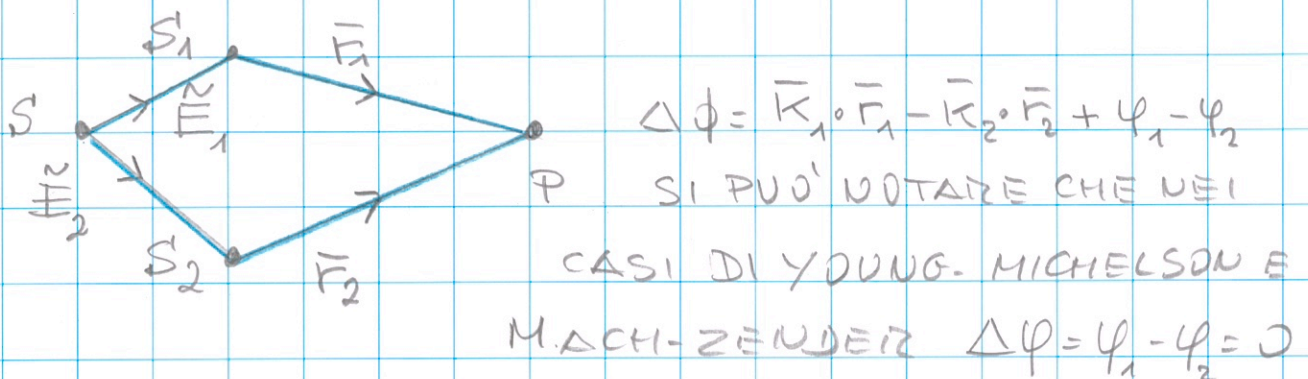
IL TERMINE DI INTERFERENZA E' UNA FUNZIONE DI AUTO-CORRELAZ.

LO SCHEMA GENERALE DELL'INTERFERENZA SI OTTIE- NE COSTRUENDO UN CORRELATORE OTTICO. LO SCHEMA RIPORTATO NELLA FIGURA SOPRA E' NOTO COME INTERFEROMETRO DI YOUNG (O ESPERIMENTO DI Y.)

ALTRI CORRELATORI OTTICI (INTERFEROMETRI) SONO GLI SCHEMI DI MICHELSONE E DI MACH-ZEUDER



• OSSERVAZIONE DA QUESTI ESEMPI RISULTA CHE LO SCHEMA GENERALE DI UN INTERFEROMETRO E' DATO DALLA SEGUENTE GEOMETRIA



• PROBLEMA NEL CASO DEGLI INTERFEROMETRI DI Y. E M. SI CALCOLINO GLI SFASAMENTI DEI CAMPI \tilde{E}_1 E \tilde{E}_2 DOVUTI ALLE RIFLESSIONI ARIA-SPECCHIO.

• CALCOLO DELL'INTERFERENZA CON CAMPI ESPRESSI DA FUNZIONI REALI, COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA LA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE CAMPI E.M. CON LA STESSA FREQUENZA DA IN UN PUNTO P. GENERICO DEL VOLUME DOVE I CAMPI SI SOVRAPPONGONO UNA IRRADIANZA DATA DA $I = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$, INTANTO NOTIAMO CHE IL TERMINE DI INTERFERENZA DERIVA DA $I = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$, IL PRODOTTO SCALARE \Rightarrow CAMPI \perp NON DANNO INTERFERENZA, SE I CAMPI NON SONO \perp SOLA LA LORO COMPONENTE \parallel DA INTERFERENZA. CONSIDERIAMO ORA DUE ONDE PIANE MONOCROMATICHE

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(kr_1 - \omega t + \varphi_1); \quad \vec{E}_2 = E_{02} \cos(kr_2 - \omega t + \varphi_2)$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(kr_1 - \omega t + \varphi_1) \cos(kr_2 - \omega t + \varphi_2)$$

DEFINIAMO $a \equiv kr_1 + \varphi_1$ $b \equiv kr_2 + \varphi_2 \Rightarrow$

$$2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 2 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(a - \omega t) \cos(b - \omega t) \Rightarrow$$

$$2 \cos(A) \cdot \cos(B) = \cos(A+B) + \cos(B-A) \Rightarrow$$

$$2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} [\langle \cos(a+b-2\omega t) \rangle + \langle \cos(b-a) \rangle]$$

IL PRIMO TERMINE INTEGRATO SU UN CICLO DA ϕ

$$\Rightarrow 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos(b-a) \rangle \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos[k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi] \rangle \equiv \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \langle \cos\delta \rangle$$

$$\text{CON } \delta \equiv k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi \Rightarrow \underline{I_{12} = \epsilon_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\delta}$$

CROSS-CORRELAZIONE

$$I_{11} = \epsilon_0 c \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle \Rightarrow$$

$$\epsilon_0 c E_{01}^2 \langle \cos^2(a - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{01}^2 \quad \text{E COSÌ PER}$$

$$I_{22} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{02}^2 \Rightarrow \underline{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos\delta \rangle}$$