SISTEMI DINAMICI

25 maggio 2021

Varietà invarianti

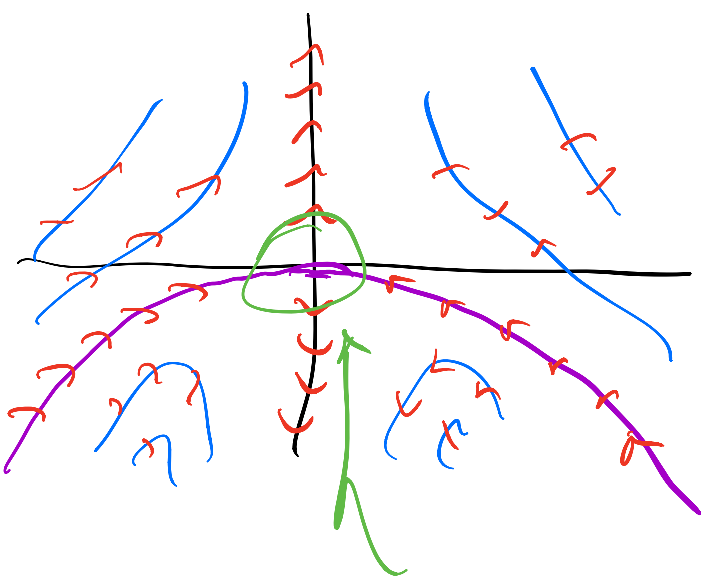
$$W^s(\Lambda) = \{ x \in \Lambda \ : \ \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to \infty]{} \Lambda \}$$

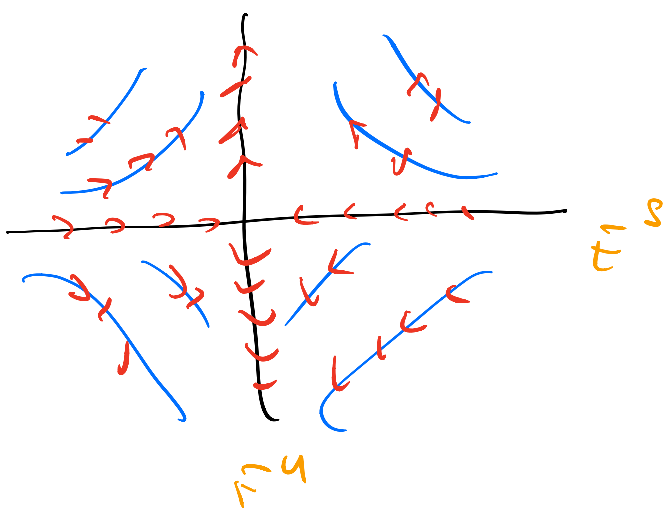
Λ insieme invariante — insieme stabile

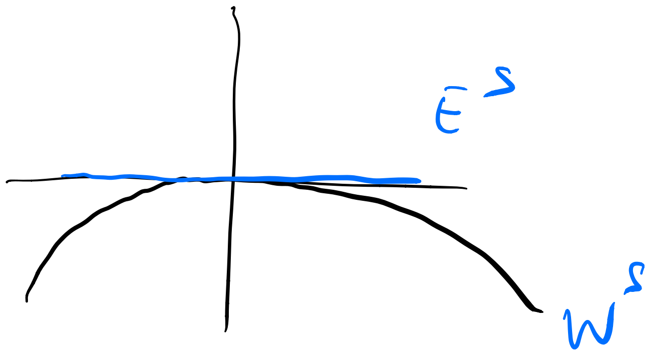
$$W^u(\Lambda) = \{ x \in \Lambda \ : \ \varphi_t(x) \xrightarrow[t \to -\infty]{} \Lambda \}$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$



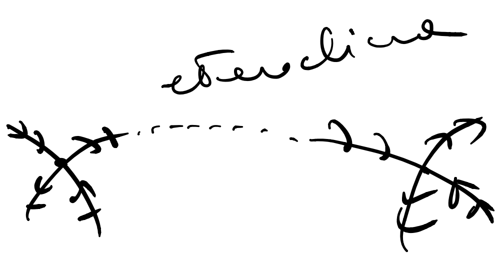




$\{(x,y) \mid y = -\frac{x^2}{3}\}$

Def Un'orbita Γ si dice eteroclina se ogni $x \in \Gamma$ tende asintoticamente in avanti ad un insieme invariante B, e asintoticamente indietro ad un insieme invariante A

$$\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(B)$$



Def Γ si dice omoclina se ogni $x \in \Gamma$ tende asintoticamente in avanti e indietro allo stesso insieme invariante A

$$\Gamma \subset W^u(A) \cap W^s(A)$$

<u>Esempio</u> (tipico di sistemi Hamiltoniani)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + x \end{cases} \longrightarrow \quad H(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}$$

Equilibrio $(0,0)$ $(+1,0)$ $(-1,0)$

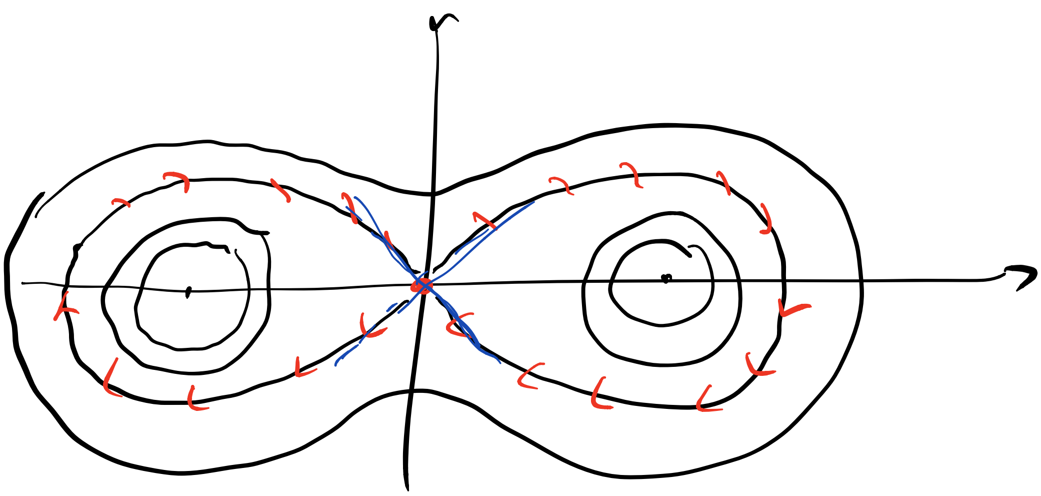
Linearizzazione
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{q_E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Df|_{q_E}$$

$$\lambda^2 - (1-3x^2) = 0$$

$(0,0) \longrightarrow \pm 1 \longrightarrow$ punto sella

$(\pm 1, 0) \longrightarrow \pm i\sqrt{2} \longrightarrow$ centro



si ricava studiando $H(x,y) = \text{cost.}$

Sotto determinate condizioni gli insiemi invarianti sono varietà differenziabili

Supponiamo $f \in C^1$, x^* pto eq. iperbolico, $A = Df|_{x^*}$

cambiando variabile $(x \to x + x^*)$

$$\to \quad \dot{x} = Ax + g(x),$$

con $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$

Teorema (della varietà stabile locale)

Sia A una matrice iperbolica, $g \in C^k(U)$ $k \geq 1$, U intorno aperto di 0.

Supponiamo $g(x) \sim o(x)$ per $x \to 0$

Denotiamo con E^s e E^u sottospazi stabile e instabile.

Allora $\exists$ intorno $\tilde{U} \subset U$ tale che

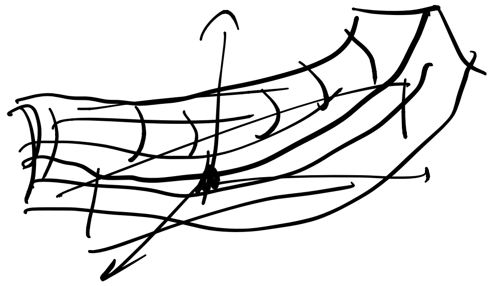
$$W^{(s)}_{loc}(0) = \{ x \in W^s(0) : \varphi_t(x) \in \tilde{U}, t \geq 0 \}$$

è una varietà differenziabile C^k

tangente a E^s in 0.

$$T_0 W^s_{loc}(0) = E^s$$

punto critico



Prendiamo un punto critico iperbolico x^*

$W^s(x^*)$ insieme invariante

ogni punto di $W^s(x^*)$ dopo un certo tempo arriva in $W^s_{loc}(x^*)$

Posso definire

$$W^s = \{ \varphi_t(x) : x \in W^s_{loc} ,\ t \in \mathbb{R} \}$$

[quale è la sua struttura?

globalmente proprietà più deboli

$(\dim W^s = \dim E^s)$

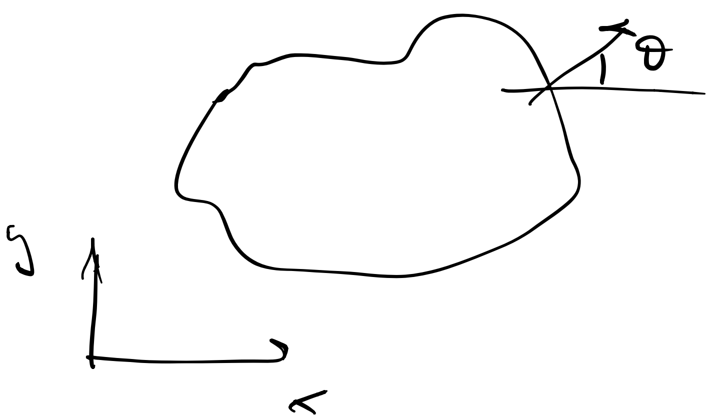
ma spesso non c'è la struttura di varietà

Piano delle fasi

Il sistema dinamico ha la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \qquad \dot{X} = f(X)$$

Sia $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ curva chiusa (di Jordan)



campo vettoriale è $f = (P, Q)$

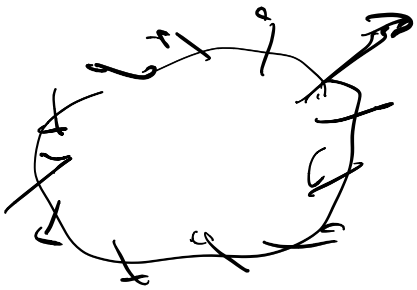
l'angolo con l'asse delle x

$$\tan\theta = \frac{Q}{P}$$

Def Data una curva chiusa γ, e un campo vettoriale f

l'indice di Poincaré $\quad I_\gamma(f) := \dfrac{\Delta\theta}{2\pi}$

è il numero intero di rotazioni che vettore $f(x)$ compie mentre x si muove lungo la curva fino a tornare al punto di partenza. $\Delta\theta$ è il cambiamento netto dopo un giro



differenziando $\quad \tan\theta = \dfrac{Q}{P}$

$$\sec^2\theta \, d\theta = \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2}$$

$$\sec^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2$$

$$\boxed{I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2+Q^2}}$$

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = P \\ \dot{y} = Q \end{cases}$$

Proprietà: se deformiamo continuamente la curva γ (senza attraversare un punto di equilibrio, $P^2+Q^2=0$) allora l'indice non cambia.

Allo stesso modo se teniamo γ fissa ma variamo il campo vettoriale continuamente, l'indice non cambia.

Motivo: l'indice di Poincaré, per definizione è una funzione continua ma può prendere solo valori interi

$\Rightarrow$ quindi è una costante.

Teorema: A matrice 2×2 non singolare

$\dot{x} = f(x) = Ax$ (→ origine pto equilibrio)

γ una curva chiusa che racchiude l'origine (orientata in senso orario)

Allora $I_\gamma(f) = \operatorname{sgn} \det A$

<u>Dim</u> A non singolare

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow ad \neq 0 \;, \; bc \neq 0$$

Allora possiamo fare una deformazione continua di A per portarlo in una delle forme

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sgn} a & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn} d \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{sgn} b \\ \operatorname{sgn} c & 0 \end{pmatrix}$$

$\gamma \to$ cerchio unitario intorno all'origine

$P = \operatorname{sgn} a \; x$

$Q = \operatorname{sgn} d \; y$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

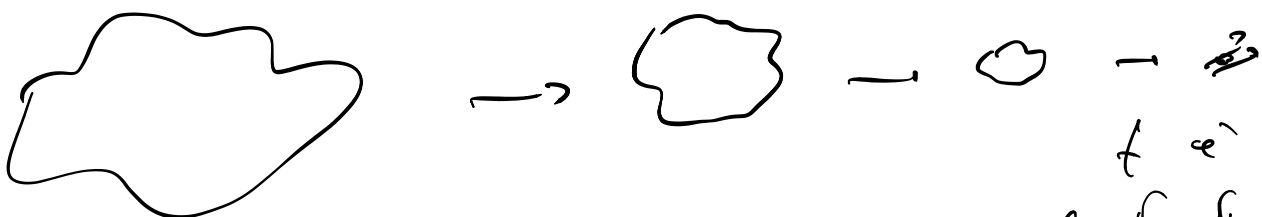
$$I_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2+Q^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_C \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} d \;\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} a \ \operatorname{sgn} d}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,d\theta$$

$$= \operatorname{sign}(a)\operatorname{sgn}(d) = \operatorname{sgn} \det A .$$

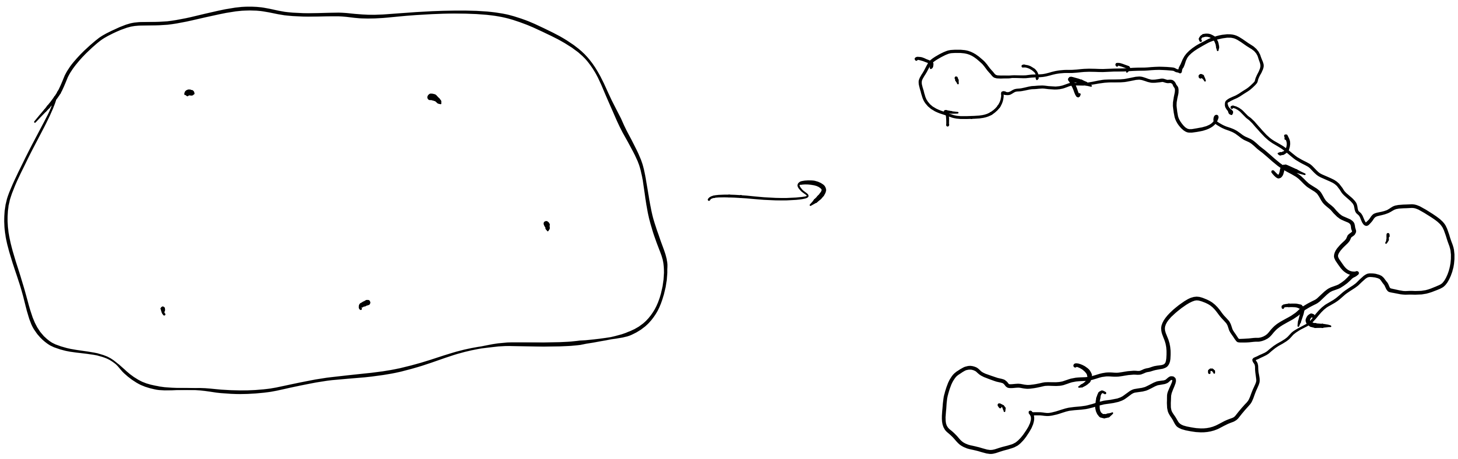
<u>Teorema</u> Se la curva γ non contiene punti critici, allora $I_\gamma(f) = 0$.



f è costante su γ

Non vale il viceversa: $I = 0$ non

implica che non ci siano punti di equilibrio



$\rightleftarrows$ si cancellano

$$I_\gamma(f) = \sum_i I_{x_i}(f)$$

ogni $I_{x_i}(f)$ può essere positivo o negativo

$I = 0 \not\Rightarrow$ non ci sono punti di equilibrio

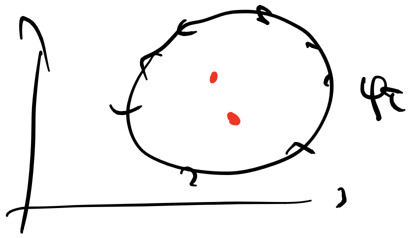
<u>Teorema</u> Se γ è un'orbita periodica di f. Allora $I_\gamma(f) = +1$

γ orbita (periodica) t c'è sempre

Tangente

$\hookrightarrow$ Ogni orbita periodica contiene

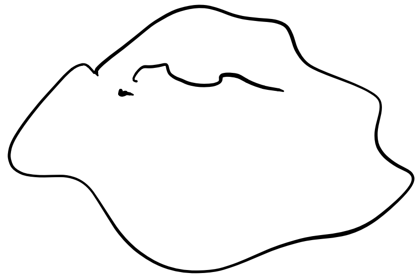
al meno un punto di equilibrio



<u>Teorema</u> (Poincaré – Bendixson)

flusso $\mathbb{R}^2$, D invariante

$\forall x \in D \rightarrow \omega$ limite
- punto critico
- traiettoria periodica



= non c'è caos in 2D