



# LENZ'S LAW

Nature abhors change in flux.

Se il campo  $\vec{E}$  è esclusivamente dovuto ad una variazione di campo magnetico ( $\rho=C$ ) ho

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{formalmente analogo alle eq. di}$$

Maxwell per  $\vec{B}$ :  $\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$  Cerco allora una soluzione!

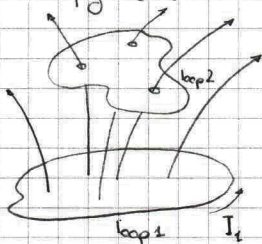
$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \times \hat{r} \frac{d\tau}{r^2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{B} \times \hat{r}}{r^2} d\tau$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I_{enc} \rightsquigarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{c} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(legge di Ampère)

## 2.1 INDUCTANCE (A)

Suppongo la seguente configurazione



Dalla legge di BIOT-SAVART ho

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

ovvero  $|\vec{B}_1| \propto I_1$

ed essendo  $\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2$  ho

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad M_{21} \text{ MUTUA INDUTTANZA}$$

Cerco un'espressione formale

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{a}_2 = \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{c}_2$$

Jokes

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{c}_1}{r} \quad \text{hence}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left( \oint \frac{d\vec{c}_1}{r} \right) \cdot d\vec{c}_2$$

$$\boxed{M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{c}_1 \cdot d\vec{c}_2}{r}} \quad \text{NEUMANN FORMULA}$$

deduco che 1.  $M_{21}$  è un fattore puramente geometrico  
2. C'è una simmetria che le correnti  $I$  scorrono in 1 e in 2, nulla cambia per il flusso (cittroverse 2, per correnti in 1 e viceversa)

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Una corrente variabile nel tempo dall'altra parte induce una emf anche sul circuito stesso. Uso in questo caso L'AUTOWINDUTANZA (LH)

$$\Phi = LI \quad \mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{Back emf.}$$

## 2.2 ENERGY IN MAGNETIC FIELDS (B)

Il lavoro fatto per unità di carica contro la back emf in un giro attorno al circuito è  $-E$ . Se  $I$  è la corrente, il lavoro totale per unità di tempo è

$$\frac{dW}{dt} = -EI = LI \frac{dI}{dt} \quad \text{se la corrente va da 0 ad } I \text{ ottengo}$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad \text{dipende solo dalla geometria e dal valore finale di } I!$$

Cerco un'ulteriore espressione per  $W$

\* Ricorda che  $\Phi = LI$

$$\text{Ma } \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{c}$$

$$\text{dunque } LI = \oint \vec{A} \cdot d\vec{c}$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2} I \oint \vec{A} \cdot d\vec{c} = \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \cdot \vec{J}) d\tau$$

che è generalizzabile in modo naturale come

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{A} \cdot \vec{J}) d\tau$$

dalla legge di Ampère  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) d\tau$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) + \nabla(\vec{A} \times \vec{B}) - \nabla(\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \vec{A} - \nabla(\vec{A} \times \vec{B})$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_V B^2 d\tau - \oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} \right) \quad \text{S bounding surface of } V$$

$V$  è la regione di volume occupata dalle correnti, ma posso prendere  $V$  più grande, essendo  $\vec{J}=0$  fuori!  
Ma aumentando  $V$ , i campi  $\vec{B}, \vec{A}$  tendono a 0 allontanandosi dalle sorgenti. In particolare, integrando su TUTTO lo spazio ottengo

$$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{all space}} B^2 d\tau} \quad \text{Energy stored in the magnetic field}$$

## 3. MAXWELL EQUATIONS

### 3.1 LA CORREZIONE DI MAXWELL (A)

Considero la legge di Ampère  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  e ne prendo la divergenza

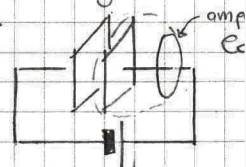
$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{J})$$

LHS è nulla ma RHS è nulla solo nel caso statico!

Un'altra modo di visualizzare il problema è il seguente

Considero il circuito amperiano in figura.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I_{enc}$$



ma cos'è  $I_{enc}$ ? Dipende dalla superficie che considero!

something's wrong...

Il problema è in RHS. Nota che

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{eq. continuity}$$

Pongo allora

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Nulla cambia nell'elettrostatica! Nota che tale equazione prevede una simmetria interessante: una variazione di campo elettrico produce un campo magnetico!

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{DISPLACEMENT CURRENT}$$

$$\text{Nel paradosso prec. ho } E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 A}$$

hence

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a}$$

$$\text{per la superficie piatta } E=0, \quad I_{enc} = I$$

$$\text{per la balloon-shaped } I_{enc}=0, \quad \int \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a} = \frac{I}{\epsilon_0}$$

### 3.2 EQUAZIONI DI MAXWELL (A)

Scrivere 6 eq. di Maxwell nel vuoto

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

$\ominus \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  riassumere il contenuto Teoria dell'intera elettrodinamica classica!

Dal caso statico so già  
 $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ ,  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$

Nel caso dinamico deve considerare la variazione della polarizzazione e le conseguenti correnti di coriche (bound)  
 Se infatti P aumenta le densità di carica agli estremi aumenta concordemente, producendo coriche

$dI = \frac{\partial \rho_b}{\partial t} da_L = \frac{\partial \rho}{\partial t} da_L \rightarrow \vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

$\vec{J}_p$  è associata al momento lineare delle cariche quando P varia.  $\vec{J}_b$  è associata invece a questioni di spin e momento di elettroni negli orbitali

Controllo eq. di continuità:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}_p &= \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{P})}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \rho_b}{\partial t} \end{aligned}$$

•  $\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$

•  $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

Ho dunque

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Introduce  $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

Scrivere 6 EQUAZIONI DI MAXWELL NELLA MATERIA

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

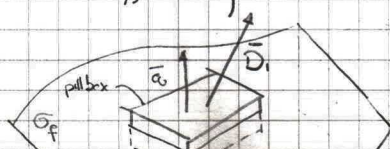
if  $\chi$   $\left\{ \begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{M} &= \chi_m \vec{H} \end{aligned} \right.$ ,  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$

### 3.3 BOUNDARY CONDITIONS (A)

In generale i comp.  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$  sono discontinui sulla superficie fra due mezzi diversi, e con una densità di carica  $\sigma$  o una densità di corrente  $\vec{K}$ . Scrivere 6 eq. di Maxwell in forma integrale.

- (i)  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{f,enc}$
  - (ii)  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$
  - (iii)  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$
  - (iv)  $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{c} = I_{f,enc} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a}$
- over any closed surface S  
 for any surface S bounded by  $\Gamma$

Considero



• Applico (i) al pillbox in figura e ottengo

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{a} - \vec{D}_2 \cdot \vec{a} = \sigma_{fa} \rightarrow D_1 - D_2 = \sigma_f$$

• Analog per (ii)  $\rightarrow B_1 - B_2 = 0$

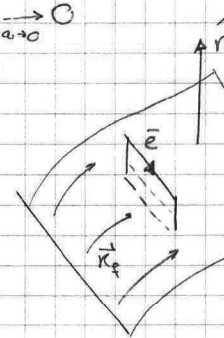
• Per (iii) considero un amperiano  $C_{enc}$  come in figura e ottengo

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{c} - \vec{E}_2 \cdot \vec{c} &= \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \vec{E}_1 - \vec{E}_2 &= 0 \quad (\text{continuità!}) \end{aligned}$$

• Analog  $\vec{H}_1 \cdot \vec{c} - \vec{H}_2 \cdot \vec{c} = I_{f,enc}$

$$\begin{aligned} &= \int_S \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{c}) \\ &= (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 - \vec{H}_2 = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

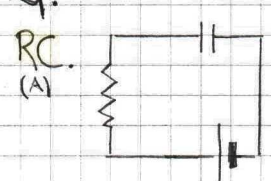


In termini di  $\vec{E}, \vec{B}$  soltanto

$$\begin{aligned} E_1 - E_2 &= \sigma_f & \vec{E}_1 - \vec{E}_2 &= 0 \\ B_1 - B_2 &= 0 & \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 &= \vec{K}_f \times \hat{n} \end{aligned}$$

### BOUNDARY CONDITIONS

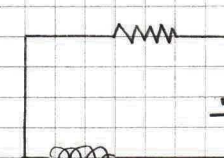
### RC CIRCUITS



$$E = q/C + R\dot{q}$$

Risolve  $EC - q = R \frac{dq}{dt} \Leftrightarrow \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{EC - q}$

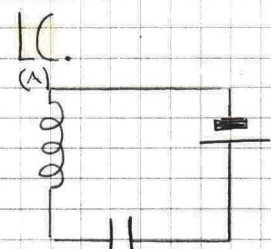
$$\begin{cases} q = EC - Ke^{-t/\tau} & \oplus q(0) = 0 \\ q = EC(1 - e^{-t/\tau}) & \tau = RC \\ I = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \end{cases}$$



$$E = R\dot{q} + L\ddot{q}$$

Risolve  $E - R\dot{q} = L \frac{d\dot{q}}{dt} \Leftrightarrow \frac{dt}{L} = \frac{d\dot{q}}{E - R\dot{q}}$

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{E}{R} + Ke^{-R/L t} & \oplus \dot{q}(0) = 0 \\ \dot{q} = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) & \tau = \frac{L}{R} \end{cases}$$



$$E = \frac{q}{C} + L\ddot{q}$$

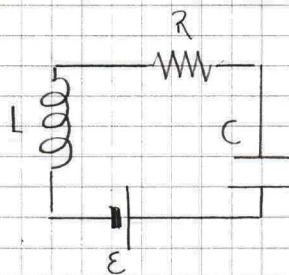
Risolve  $E = \frac{1}{C} q + L \ddot{q}$

$\hookrightarrow$  osc armonica

$$q(t) = CE + A \cos(\omega t + \phi) ; \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; A, \phi \text{ cost}$$

# RLC (c)

$$E = L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C}$$



Riscrivere

L'eq. è nella forma  $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = f(t)$

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

o caso 1.  $f(t) = 0$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

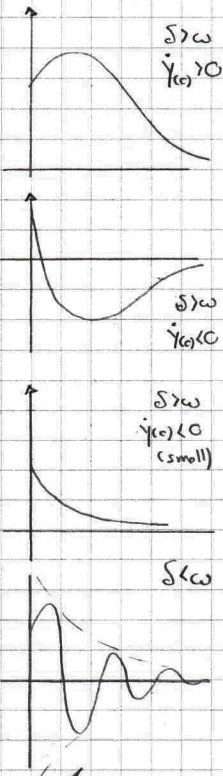
Distinguo 3 sottocasi

I.  $\delta > \omega$   
 $\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

II.  $\delta = \omega$   
 $\varphi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t}$

(simile a I)

III.  $\delta < \omega$   
 $\varphi(t) = A e^{-\delta t} \cos(\gamma t + \alpha)$   
 $\gamma = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$



o caso 2.  $f(t) \neq 0$

Soluzione nella forma

$$y(t) = \varphi(t) + \psi(t)$$

↑ particular solution

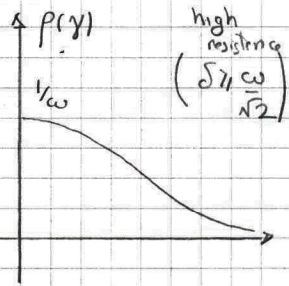
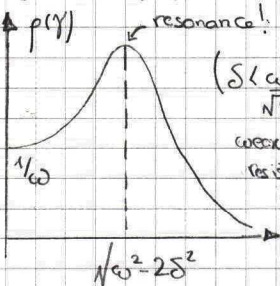
if  $f(t) = B \cos(\gamma t)$

$$\psi(t) = B \rho \cos(\gamma t - \rho), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\delta^2 \gamma^2}}$$

$$\tan(\rho) = \frac{2\gamma\delta}{\omega^2 - \gamma^2}$$

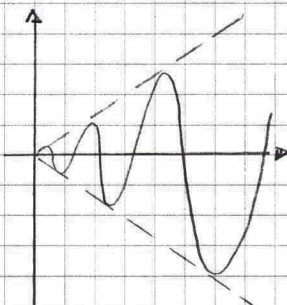
Dopo un transiente il moto è determinato da  $\psi(t)$ , il moto è armonico di periodo  $2\pi/\gamma$ , ampiezza  $B\rho$ .

Si ha inoltre



o Finally suppose  $\delta = 0$  (no resistance)

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t & \gamma \neq \omega \\ \frac{Bt}{2\omega} \sin \omega t & \gamma = \omega \end{cases}$$



Ho fino a questo momento risolto con eq. differenziali.

Introduco ora la trattazione vettoriale complessa dei circuiti.

RLC

Sia il termine forzante del tipo  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  complessificato

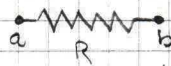
$$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$$

Considero ora sin generalizzare gli elementi  $P_i$  del circuito.

Per un termine forzante armonico chiedo

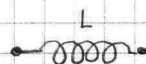
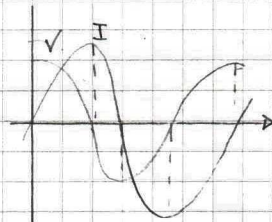
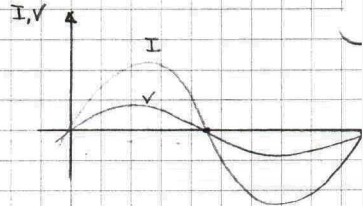
- $f(t) = f(t+T)$
- $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = 0$

o RESISTENZA R



$$V_R(t) = R I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tilde{V}_R(t) = R \tilde{I}(t)$$



o INDUTTANZA L

$$\tilde{V}_L = L \frac{d\tilde{I}}{dt} = L \tilde{I}_0 \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = X_L \tilde{I}_0 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$X_L := \omega L \text{ REATTANZA INDUTTIVA}$$

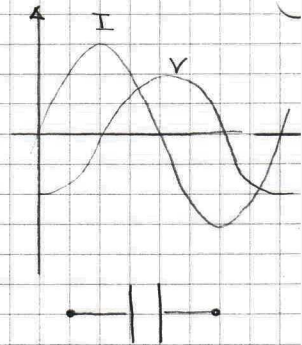
$$\tilde{V}_L = L \tilde{I} = i\omega L \tilde{I}(t)$$

o CAPACITA' C

$$\tilde{V}_C = q = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{1}{\omega C} I_0 (-\cos(\omega t + \varphi)) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = X_C I_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

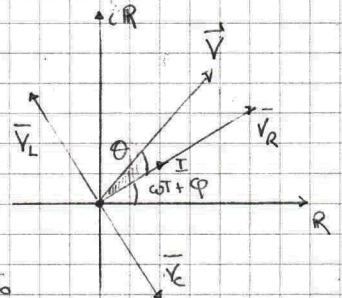
$$X_C := \frac{1}{\omega C} \text{ REATTANZA CAPACITIVA}$$

$$\tilde{V}_C = \frac{1}{C} \int \tilde{I} dt = \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}(t)$$



Definisco le IMPEDENZE

$$\tilde{Z}_R = R, \quad \tilde{Z}_L = i\omega L, \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$



Le impedenze in un circuito si combinano in serie e parallelo con le stesse regole delle resistenze

SERIE  $\tilde{Z} = \sum \tilde{Z}_i$ , PARALLELO  $\frac{1}{\tilde{Z}} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i}$

Valo in generale  $\tilde{V} = \tilde{Z} \tilde{I}$

Caratterizzo  $\tilde{Z}$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad \tan \theta = \frac{1}{R} (\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Dunque

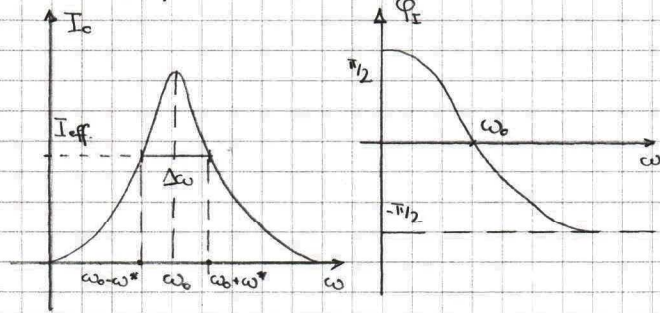
$$V_0 e^{i\omega t} = |Z| e^{i\theta} I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\begin{cases} \theta = -\varphi \\ I_0 = \frac{E_0}{|Z|} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \varphi = 0 \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 \rightarrow \varphi < 0 \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 \rightarrow \varphi > 0 \end{cases}$$

$\varphi = 0$  (fase forata!)

$$I_0 = E_0 \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Plot  $I_0(\omega)$ ,  $\varphi_I(\omega)$



Considerare infine l'aspetto energetico.  
La POTENZA MEDIA DISSIPATA è

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &:= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \sin(\omega t + \varphi_V) \sin(\omega t + \varphi_I) dt \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T} \int_0^T \cos(\varphi_V - \varphi_I) - \cos(\varphi_V + \varphi_I + 2\omega t) dt \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T} \int_0^T \cos(\varphi_V - \varphi_I) dt \\ &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos \Delta \varphi \rightarrow \boxed{\langle P \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos \Delta \varphi} \end{aligned}$$

Sia poi  $\vec{Z} = |Z| \cos \theta$ ,  $V = V_0 \cos \omega t$ ,  $\vec{I} = I_0 \cos(\omega t - \theta)$

$$\begin{aligned} P(t) = V I &= I_0^2 |Z| \cos(\omega t - \theta) \cos \omega t \\ &= \frac{I_0^2 |Z|}{2} (\cos^2 \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin(-\theta) \sin 2\omega t) \\ &= \frac{I_0^2 |Z| \cos \theta}{2} \cos^2 \omega t - \frac{I_0^2 |Z| \sin \theta}{2} \sin 2\omega t \\ &= \frac{I_0^2 R}{2} \cos^2 \omega t - \frac{I_0^2}{2} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin 2\omega t \end{aligned}$$

potenza reale  $P(t)$                       potenza reattiva  $Q(t)$

Nota che  $\langle P(t) \rangle = \frac{I_0^2 R}{2}$  ( $Q(t)$  media è 0!) //

## 5. SUPERCONDUCTORS (B)

Manifestazione macroscopica di fenomeni quantistici.  
L'andamento della resistività  $\rho$  in funzione della temperatura  $T$  è quello in figura.

○ Come misurare la resistenza? (che attende nulla)

Considerare una sfera di materiale s.c. c'è un campo magnetico uniforme e dunque una fem

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -S \frac{d\vec{B}}{dt} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d(BS + LI)}{dt} = 0$$

$$I = - \frac{S \Delta B}{L}$$

Risolve dunque alla resistenza, si ottiene  $R < 10^{-2} \Omega$ !  
Essendo  $I = I_0 e^{-t/\tau}$ ,  $\tau = L/R$

nono infatti  $\tau$ , dunque  $R$ .  
Le misure è estremamente precise perché è indiretta e senza contatto! (B)

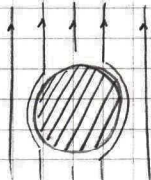
○ Per sistemi s.c. occorrono anche che

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = 0 \Rightarrow \chi_m = -1$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

(c)  
○ Considera una sfera s.c. in un campo magnetico.  
QUESTIONES. Il campo magnetico penetra nel materiale?  
Di quanto?

Approccio classico.  
Modello di Drude per il momento degli elettroni precessi



(c)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m\vec{v}/\tau$   $m$  massa die  $\tau$  TEMPO di RILASAMENTO (Tempo medio fra due collisioni nel reticolo)

Perché  $\sigma$  di  $\tau$  per s.c.  $\tau \rightarrow +\infty$

(c)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ ; ricordando  $\vec{J} = -n_s e \vec{v}$   $n_s$  densità elettroni

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} \quad \text{Definisco } \Lambda = \frac{m}{n_s e^2}$$

$$\frac{\partial(\Lambda \vec{J})}{\partial t} = \vec{E} \quad \text{I EQ DI LONDON}$$

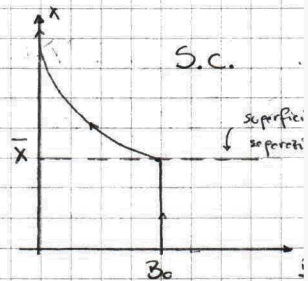
Pongo  $\Lambda = \mu_0 \Lambda_L^2$ ,  $\Lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$  ha le dimensioni di una lunghezza

So che  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$   
 $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \times \vec{J}$

$$= \frac{\mu_0}{\Lambda} \int \nabla \times \vec{E} dt$$

$$= \frac{1}{\Lambda^2} (-1) \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$$

$$= - \frac{\vec{B}}{\Lambda_L^2}$$



hence  $\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = - \frac{\vec{B}}{\Lambda_L^2} \rightarrow \nabla^2 \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\Lambda_L^2}$

da cui  $\boxed{\vec{B}(x) = \vec{B}_0 e^{-x/\Lambda_L}}$  II EQ DI LONDON //

## 6. CONSERVATION LAWS

### 6.1 CARICA-ENERGIA (B)

○ La conservazione della carica è di certo globale, ma vale anche LOCALMENTE. Dimostrare l'eq di continuità

$$* Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad \text{La corrente che attraversa}$$

è superficie di separazione  $S$  si scrive come

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad \text{alora per la conservazione della carica}$$

Cocle scrivio

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} d\vec{r} \quad \text{ottengo}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \nabla \cdot \vec{J}} \quad \text{EQ DI CONTINUITA'}$$

○ Il lavoro necessario ad assemblare una certa configurazione di cariche è

Il eq di continuità insita nelle eq di Maxwell, con un'azione indipendente

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\vec{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) V d\vec{r}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \oint_S \vec{E} V d\vec{a} + \int_V \vec{E} \cdot \nabla V d\vec{r} \right)$$

Ricordando  $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} d\vec{r}$  Carre per mostrare e corrente scitate e back emf

definisco

DENSITA' D'ENERGIA del campo e.m.

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

Prova ora il TEOREMA DI POYNTING

Suppongo una certa configurazione di cariche e correnti presente al tempo  $t$  i campi  $\vec{E}, \vec{B}$ . Dopo  $dt$  tale configurazione è cambiata, cerco un'espressione per  $dW/dt$  essere nell'unità di tempo delle forze elettromagnetiche agenti.

\* Su una carica  $q$  per le forze di LORENTZ

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

$$\frac{dW}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad q = \int_V \rho d\tau \quad \oplus \quad \rho \vec{v} = \vec{J}$$

$$= \int_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) d\tau \quad (1)$$

$\vec{E} \cdot \vec{J}$  è lavoro per unità di volume e tempo. Espando

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Usa ora

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\oplus \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left( -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t}, \quad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Dalla (1) infine

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \oint_S \vec{E} \times \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

Il primo integrale è la quantità d'energia nel campo mentre il secondo termine rappresenta l'energia nell'unità di tempo trasportata fuori di  $V$  attraverso  $S$ .

STATEMENT. The work done on charges by e.m. force is equal to the decrease in energy remaining in the fields less the energy that flowed out through the surface.

Posso compatte la notazione introducendo il VETTORE DI POYNTING (energia per unità di tempo e area)  $\rightarrow$  energy flux density

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

In questo modo il Teorema di Poynting reads

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V u d\tau - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

Se nessun lavoro è fatto sulle cariche

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S} \quad \text{"continuity equation" for energy}$$

La direzione del vettore di Poynting è quella di propagazione dell'onda e dell'energia trasportata.

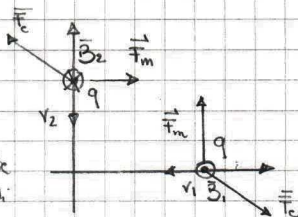
## 6.2 MOMENTO (C)

In elettrodinamica NON vale la Terza Legge di Newton.

\* Example

$$\sum \vec{F}_{em} \neq 0!$$

$q_1, q_2$  vincolate a muoversi sugli assi.



Si conserva invece il momento. Ma prima ho bisogno di introdurre il Tensore di stress

\* La forza em complessiva sulle cariche in un volume  $V$  è

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho d\tau = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) d\tau$$

sia dunque  $\vec{f}$  la forza per unità di volume.

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

Nota ora che

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) + \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

hence

$$\frac{\partial \vec{E} \times \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Usa  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

$$= \epsilon_0 \left[ (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times \nabla \times \vec{E} \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Usa

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) + \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E})$$

$$\rightarrow \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla E^2 - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E}$$

Analog

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \nabla B^2 - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$= \epsilon_0 \left[ (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \right] -$$

$$\frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \nabla E^2 + \frac{1}{\mu_0} \nabla B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Introduco il MAXWELL STRESS TENSOR

$$T_{ij} := \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

$$T_{xx} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0 (E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y)$$

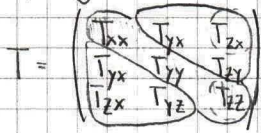
$$(\nabla \cdot \vec{T})_j = \epsilon_0 \left[ (\nabla \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\nabla \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right]$$

Con questa notazione posso infine scrivere

$$\vec{F} = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau$$

Stile case  $\vec{F} = \oint \vec{T} \cdot d\vec{a}$

$\vec{T} = T_{ij}$ . Forza per unità di area che agisce sulla superficie. Sulla diagonale le forze di pressione, off-diagonal le forze di scorrimento



$T_{ij}$  è la forza per unità d'area lungo la direz. i sulla faccia orientata lungo j.

Infine arriva a scrivere le conservazioni cercate.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau + \oint_S \vec{T} d\vec{a}$$

Il primo integrale è il MOMENTO CONSERVATO NEL CAMPO

$$\vec{p}_{em} = \mu_0 \epsilon_0 \int_V \vec{S} d\tau$$

mentre il secondo è il momento per unità di tempo che fluisce attraverso la superficie (~ Poynting Theorem!)

Sia  $\vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$  & DENSITA' DI MOMENTO

Se il momento meccanico non cambia (es. empty space)

$$\int \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} d\tau = \oint_S \vec{T} d\vec{a} = \int \nabla \cdot \vec{T} d\tau$$

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{T} \quad \text{continuity equation for e.m. momentum}$$

(-T rappresenta il flusso di momento!)

Considerando quindi la DENSITA' DI MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{e}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})]$$

$$\frac{\partial \vec{e}_{em}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{m}$$

## II. OTTICA

### 1. WAVES. GENERALITIES (A)

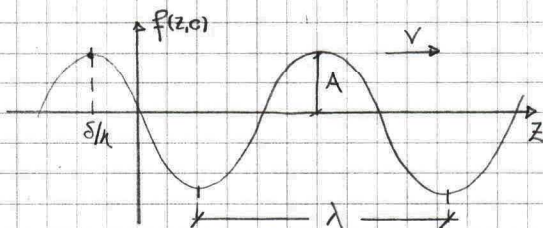
A WAVE is a disturbance of a continuous medium that propagates with a fixed shape at constant velocity.

Una possibile forma dell'onda è quella sinusoidale

$$f(z,t) = A \cos[k(z-vt) + \delta]$$

Devo chiedere matematicamente  $f(z,t) = f(z \pm vt, 0)$

A ampiezza dell'onda  
 $k(z-vt) + \delta$  fase  
 $\delta$  fase iniziale  
 $z = vt - \delta/k$  central maximum



$$k := \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{NUMERO D'ONDA}$$

$$\omega := \frac{2\pi}{T} \quad \text{FREQUENZA ANGOLARE}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad \text{FREQUENZA}$$

$$\rightarrow \omega = 2\pi v = kv$$

L'eq. d'onda si può allora riscrivere come

$$f(z,t) = A \cos(\pm kz - \omega t + \delta) \quad \begin{matrix} + \text{ onde progressive} \\ - \text{ onde regressive} \end{matrix}$$

Si può rappresentare f in notazione complessa come

$$f(z,t) = \text{Re } \tilde{f}(z,t), \quad \tilde{f}(z,t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{A}$$

Nota. La forma sinusoidale è di particolare interesse perché ogni onda può essere sviluppata in combinazioni di onde sinusoidali.

$$\tilde{f}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

L'eq. delle onde (1) reads  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  (e)

### 1.1. ONDE ELETTROMAGNETICHE NEL VUOTO (A)

Nel vuoto le eq. di Maxwell read

$$(i) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (ii)$$

$$(iii) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (iv)$$

Dalla (iii)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Dalla (iv)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \nabla \times \left( \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

$$= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

hence

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad \begin{matrix} \text{EQ} \\ \text{ONDE} \\ \text{E.M.} \end{matrix}$$

In analogia con (e) noto che le equazioni implicano una velocità di propagazione per le onde em di

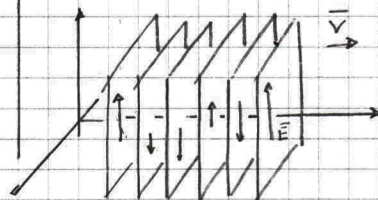
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (\Rightarrow \text{light is an em wave!})$$

### 1.2. TIPOLOGIE (A)

Suppongo ora un'ONDA MONOCROMATICA PIANA con  $\omega$  fissato, e l'onda si propaga in una direzione specifica, uniforme rispetto a qualunque altra dimensione perpendicolare a questa.

Suppongo inoltre l'onda si propaga lungo z

$$\vec{E} = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B} = \tilde{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$



Devo chiedere che valgono le eq. di Maxwell affinché siano soluzioni (condizioni su  $\tilde{E}_0, \tilde{B}_0$ )

(i)  $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{E}_0)_z = (\vec{B}_0)_z = 0$

(iii)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{E}_x & \tilde{E}_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t}$

$\hat{j} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} - \hat{i} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} + \hat{k} (\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{B}_0 e^{i(kz - \omega t)})$

$(\hat{j} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} - \hat{i} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z}) i k e^{i(kz - \omega t)} = (\hat{i} \tilde{B}_0 + \hat{j} \tilde{B}_0) i \omega e^{i(kz - \omega t)}$

$\Rightarrow -k(\tilde{E}_0)_y = \omega(\tilde{B}_0)_x, k(\tilde{E}_0)_x = \omega(\tilde{B}_0)_y$

$\tilde{B}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{z} \times \tilde{E}_0)$

$\vec{E}, \vec{B}$  sono in fase e perpendicolari

$\tilde{B}_0 = \frac{k}{\omega} \tilde{E}_0 = \frac{1}{c} \tilde{E}_0$

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) Non aggiunge nulla.

Per una generica direzione di propagazione  $\vec{k} = \text{VETTORE D'ONDA}$

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}$ ,  $\hat{n}$  polarization vector  
 $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (\hat{k} \times \hat{n}) = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \tilde{E})$

I campi sono armonici e fase reale di questi.

○ Considero infine ONDE SFERICHE.

L'eq. delle onde  $\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ , ovvero, scrivendo il

Laplaciano in coordinate sferiche

$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

e con  $f(r, t) = f(r \pm vt)$  ho

$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$  EQ ONDE SFERICHE

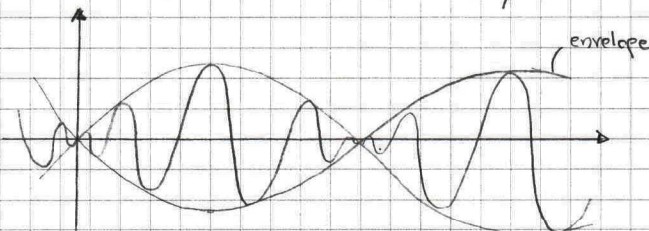
Come si verifica facilmente  $f(r, t) = \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}$

è un'onda sferica propagantesi verso l'esterno.

### 1.3 VELOCITA' DI GRUPPO

Suppongo due onde di medesima ampiezza ma frequenze angolari e numeri d'onda leggermente diversi,  $\omega \pm \Delta\omega$ ,  $k \pm \Delta k$ . La sovrapposizione si scrive come

$U = U_0 e^{i(k+\Delta k)z - (\omega+\Delta\omega)t} + U_0 e^{i(k-\Delta k)z - (\omega-\Delta\omega)t}$   
 $= U_0 e^{i(kz - \omega t)} \left( e^{i(\Delta k z - \Delta\omega t)} + e^{-i(\Delta k z - \Delta\omega t)} \right)$   
 $= 2U_0 e^{i(kz - \omega t)} \cos(\Delta k z - \Delta\omega t)$



L'onda risultante può essere interpretata come un'onda  $U' = 2U_0 \exp(i(kz - \omega t))$  la cui ampiezza è modulata dal fattore  $\cos(\Delta k z - \Delta\omega t)$ .

La velocità dell'involucro è detta VELOCITA' DI GRUPPO

$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$  or  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

LEGGI DI DISPERSIONE

In un mezzo ottico  $\vec{E}$  reattivo di fase  $v = \frac{\omega}{k} \neq v_g$  o in generale  $v = v(\omega)$ .

Se  $n$  è l'indice di rifrazione nel mezzo  $\omega = kv = kc/n$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{kc}{n} \right) = c \frac{1}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{dk}$ ,  $n = n(\lambda)$ !  
 $= v \left( 1 - k \frac{dn}{n dk} \right)$

Il segnale si propaga alla velocità di gruppo, in generale più lentamente che alla velocità di fase!

Se l'intervallo di frequenze è ristretto (nearly monochromatic light) la velocità di gruppo è ben definita!

## 2. VECTORIAL NATURE OF LIGHT

Considero eq. di onde piana.  $\vec{U} = \vec{U}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Volgare e seguenti relazioni funzionali:

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ ,  $\nabla \rightarrow i\vec{k}$

Dalle eq. di Maxwell ottengo dunque

$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \rightarrow & \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 & (i) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \rightarrow & \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 & (ii) \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \vec{H} & \rightarrow & \vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} & (iii) \\ \nabla \times \vec{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \rightarrow & \vec{k} \times \vec{H} = -\epsilon_0 \omega \vec{E} & (iv) \end{aligned} \right\}$

(i)  $\oplus$  (ii)  $\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  ortogonali fra loro

(iii)  $\vee$  (iv)  $\Rightarrow H = \frac{E}{\omega} \frac{dE}{dt} = \frac{E}{v} \frac{dE}{dt}$

$Z_0 = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{v} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\frac{c}{n}} = \frac{n}{\epsilon_0 c}$

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  IMPEDANCE OF FREE SPACE

$\approx 377 \Omega$   $\vec{H} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{v} \vec{E}$  dunque

Def. INDICE DI RIFRAZIONE

$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$

### 2.1 ENERGIA E MOMENTO (A)

So che per un'onda e.m.

$U = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$

Per un'onda monocromatica

$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2$

hence

$U = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$

La densità del flusso di energia è (onda in direz. z)

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{z} = cU \hat{z}$

La densità di momento è pari

$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c^2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{z} = \frac{1}{c} U \hat{z}$

Per onde che oscilla rapidamente sono interessato alla media temporale di questi oggetti.

$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ ,  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$ ,  $\langle \vec{p} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$

$\langle \rangle :=$  Time average



Definisco

$$I := \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad \text{IRRADIANZA (Intensità)}$$

Se  $E$  e  $H$  incide normalmente alla superficie in un tempo  $\Delta t$  trasferisce un momento  $\Delta p = \langle \vec{g} \rangle A c \Delta t$

Definisco

$$P = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c} \quad \text{RADIATION PRESSURE}$$

Medie di un prodotto.

Sia  $f(\vec{r}, t) = A \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_a)$   
 $g(\vec{r}, t) = B \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta_b)$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{f} \tilde{g}^*)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}(E_0 \tilde{E} \tilde{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \tilde{B} \tilde{B}^*)$$

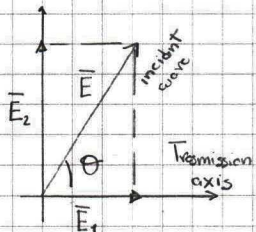
## 2.2 POLARIZZAZIONE (A)

Considero onda e.m. piana  $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \end{cases}$

l'onda si dice **LINEARLY POLARIZED** se  $\vec{E}_0 = \text{const}$ ,  $\vec{H}_0 = \text{const}$

Nel caso abbia  $E$  e  $H$  non polarizzate un **POLARIZZATORE** può produrne polarizzata. Un polarizzatore ideale è completamente trasparente a  $E$  e  $H$  in  $\vec{e}_1$  nel. nella direzione dell'asse di trasmissione e completamente opaco in quella  $\perp$ .

LINEARE



$$E_1 = E \cos \theta$$

$$I_1 = I \cos^2 \theta \quad \text{LEGGI DI MALUS}$$

con  $I$  intensità dell'onda incidente. Per  $E$  e  $H$  non polarizzate da mezzo  $I_1 = I \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{I}{2}$

Definisco

GRADO DI POLARIZZAZIONE

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{total}} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Considero invece un'onda del tipo

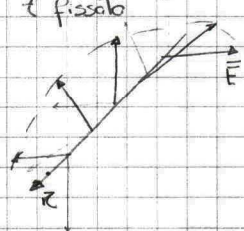
$$\vec{E} = E_0 (\hat{i} \cos(kz - \omega t) \pm \hat{j} \sin(kz - \omega t)) \quad (*)$$

è sol. dell'eq. delle onde em. in quanto comb. lineare di due soluzioni. È interpretabile come un'onda il cui campo  $E$  è cost. in fase ma ruota con velocità angolare  $\omega \rightarrow$  **CIRCULARLY POLARIZED**

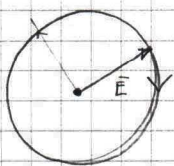
Nell'espressione (\*)  $\rightarrow$  clockwise (right circ. polar)  
 $\rightarrow$  counterclockwise (left circ. polar)

CIRCULARE

Caso RCP  $\vec{r}$  fissato



$\vec{r}$  fissato



In notazione complessa

$$\vec{E} = \hat{i} E_0 e^{i(kz - \omega t)} + \hat{j} E_0 e^{i(kz - \omega t + \pi/2)}$$

$$= (\hat{i} + i \hat{j}) E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

Una generica polarizzazione si scrive come

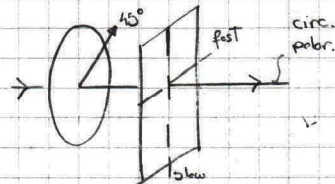
$$\vec{E} = (\hat{i} E_0 + i \hat{j} E_0') e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{E}_0 = \hat{i} E_0 + i \hat{j} E_0'$$

Se  $\vec{E}_0 \in \mathbb{R} \hat{i}$  nel. lineare  
 $\text{Im}(\vec{E}_0) \neq 0$  nel. ellittica  
 $\text{Re}(\vec{E}_0) = \text{Im}(\vec{E}_0)$  nel. circolare

Come ottengo una polarizzazione circolare?

**QUARTER-WAVE PLATE**. Materiale birifrangente (in diversi per diverse direzioni) Suppongo fast axis (min index  $n_2$ )  $\perp$  slow axis (max index  $n_1$ ). Sia  $d$  lo spessore. Affinché un'onda incidente sia spostata di  $\pi/2$  dal plate chiedo che  $\Delta$  (cammine ottico) =  $\lambda_0/4$  ovvero

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}$$



## JONES CALCULUS

Nell'espressione (\*) si è assunto  $\vec{E}_0 = \hat{i} E_0 + i \hat{j} E_0'$  assumendo quindi  $E_{0x} \in \mathbb{R}$ ,  $E_{0y} \in i\mathbb{R}$ . La più generale espressione è invece

$$\vec{E}_0 = \hat{i} E_{0x} + \hat{j} E_{0y}, \quad E_{0x}, E_{0y} \in \mathbb{C}$$

in particolare  $E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\phi_x}$ ,  $E_{0y} = |E_{0y}| e^{i\phi_y}$  introduco il **VETORE DI JONES**

$$\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_{0x}| e^{i\phi_x} \\ |E_{0y}| e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (\text{normalizzabile})$$

I vettori di Jones rappresentano lo stato di polarizzazione della luce

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{polarizzazioni lineari lungo } x, y$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{RCP, LCP}$$

Gli elementi ottici sono rappresentati da **MATRICI DI JONES**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Linear polarizers, Transm. axis horizontal-vertical}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Circular polarizers right-left}$$

ALGEBRA how it works:

Somma di due onde  $\rightarrow$  somma Jones vectors  
 Presenza elemento ottico  $\rightarrow$  moltiplica per matrice!

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$$

$\downarrow$   
 $n$ -esimo elemento ottico

Def Due onde si dicono **ORTHOGONALLY POLARIZED** if  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2^* = 0$

Nota. Il problema agli autovalori per le Jones matrix fornisce gli stati di polarizzazione della luce per cui, dato il set di elementi ottici corrispondenti la polarizzazione dell'onda uscente è la stessa di quella incidente!

# 2.3 OBLIQUE INCIDENCE (C)

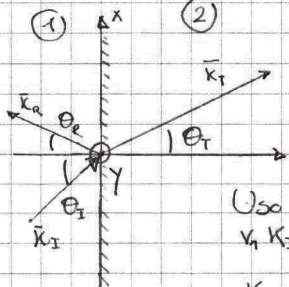
Suppongo un'onda piana monocromatica

$$I: \tilde{E}_I(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \tilde{B}_I(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_I \times \tilde{E}_I)$$

che possa superare senza perdere generalità nel piano xz  
cioè l'angolo ad un'onda riflessa e una trasmessa, namely

$$R: \tilde{E}_R(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \tilde{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_R \times \tilde{E}_R)$$

$$T: \tilde{E}_T(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \tilde{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_T \times \tilde{E}_T)$$



Note: La frequenza  $\omega$  è la stessa, e determinata dalla sorgente!

Uso ora  $\omega = vK = \text{cost}$   
 $v_1 k_I = v_1 k_R = v_2 k_T$  hence

$$k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T \quad (0)$$

Devo ora imporre le boundary conditions

$$(i) E_{1z} + E_{2z} = 0 \quad E_1'' - E_2'' = 0 \quad (iii)$$

$$(ii) B_{1z} - B_{2z} = 0 \quad \frac{1}{\mu_1} B_1'' - \frac{1}{\mu_2} B_2'' = 0 \quad (iv)$$

Note preliminarmente che tutte le eq. prec. hanno la  
forma comune in  $z=0$ :

$$(\dots) e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\dots) e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\dots) e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Ma le boundary conditions devono valere ovunque nel piano  
di separazione dunque gli esponenti devono essere uguali:

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \quad (z=0)$$

$$x(k_{Ix}) + y(k_{Iy}) = x(k_{Rx}) + y(k_{Ry}) = x(k_{Tx}) + y(k_{Ty})$$

$$\text{in } x=0 \quad (k_{Ix})_y = (k_{Ry})_x = (k_{Ty})_x \quad (i)$$

$$\text{in } y=0 \quad (k_{Ix})_x = (k_{Rx})_x = (k_{Tx})_x \quad (ii)$$

hence:

### FIRST LAW I.O.

The incident, reflected and transmitted wave  
vectors form a plane (PLANE OF INCIDENCE)  
which also includes the normal to the  
surface.

$$(i) \Rightarrow k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$$

$$(ii) \oplus (0) \Rightarrow$$

SECOND LAW. (of reflection)  
 $\theta_I = \theta_R$

THIRD LAW. (Snell's Law)  
 $\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2}$   
 $\sin \theta_I$

Legge  
dell'ottica  
geometrica

Posso ora scrivere le boundary conditions, eliminando i  
termini esponenziali che ho dimostrato essere uguali.

$$(i) E_1 (\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})_z = E_2 \tilde{E}_{0T,z}$$

$$(ii) (\tilde{B}_{0I} + \tilde{B}_{0R})_z = \tilde{B}_{0T,z}$$

$$(iii) (\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R})_{xy} = \tilde{E}_{0T,xy}$$

$$(iv) \frac{1}{\mu_1} (\tilde{B}_{0I} + \tilde{B}_{0R})_{xy} = \frac{1}{\mu_2} \tilde{B}_{0T,xy}$$

La generalità della costistica si può risolvere in  
combinazioni di due fondamentali casi:

- Polarizzazione // piano di incidenza  
TM, p,  $\pi$
- Polarizzazione  $\perp$  piano di incidenza  
TE, s,  $\sigma$

TM | Considero il caso TM  
Impone le b.c.

$$(i) E_1 (-\tilde{E}_{0I} \sin \theta_I + \tilde{E}_{0R} \sin \theta_R) = (-\tilde{E}_{0T} \sin \theta_T) E_2$$

(ii) inutile in TM

$$(iii) \tilde{E}_{0I} \cos \theta_I + \tilde{E}_{0R} \cos \theta_R = \tilde{E}_{0T} \cos \theta_T$$

$$(iv) \frac{1}{\mu_1} (\tilde{B}_{0I} - \tilde{B}_{0R})_z = \frac{1}{\mu_2} \tilde{B}_{0T,z}$$

Uso ora le leggi della I.O.

$$(i), (iv) \oplus I.O. \Rightarrow \tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T}, \quad \beta := \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$(iii) \oplus I.O. \Rightarrow \tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = d \tilde{E}_{0T}, \quad d := \frac{\cos \theta_I}{\cos \theta_T}$$

hence

$$\tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{d+\beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0R} = \left( \frac{d-\beta}{d+\beta} \right) \tilde{E}_{0I}$$

FRESNEL'S  
EQUATIONS

Definisco

$$T_p = \left( \frac{\tilde{E}_{0T}}{\tilde{E}_{0I}} \right)_{TM} = \frac{2}{d+\beta} = \frac{2 \cos \theta_I \sin \theta_T}{\sin(\theta_I + \theta_T) \cos(\theta_I - \theta_T)}$$

$$r_p = \left( \frac{\tilde{E}_{0R}}{\tilde{E}_{0I}} \right)_{TM} = \frac{d-\beta}{d+\beta} = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)}$$

Per quanto concerne le intensità  
ricordando  $I = \langle S \rangle$

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I$$

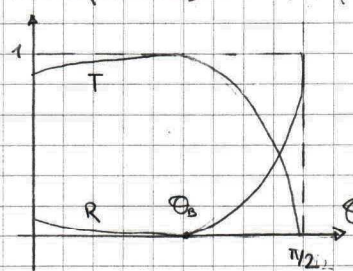
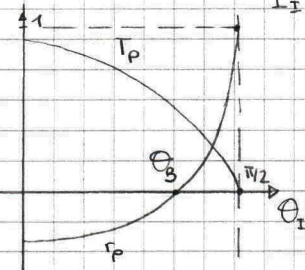
$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R$$

$$I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T$$

definisco

$$\text{REFLECTANCE } R_p := \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{d-\beta}{d+\beta} \right)^2$$

$$\text{TRANSMITTANCE } T_p := \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{2}{d+\beta} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = d\beta \left( \frac{2}{d+\beta} \right)^2$$



Onche trasmessa s  
in fase con quella  
incidente, quella  
riflessa è fuori fase  
di  $\pi$  se  $d < \beta$   
(in fase è la ang.  $\theta_I$   
right side up!)

$$R + T = 1$$

TE | Nel caso TE con ragionamenti del tutto  
analogni arriva a scrivere

$$\tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{1+d\beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0R} = \left( \frac{1-d\beta}{1+d\beta} \right) \tilde{E}_{0I}$$

$$r_s = \frac{1-d\beta}{1+d\beta} = \frac{2 \cos \theta_T \sin \theta_I}{\sin(\theta_I + \theta_T)}$$

$$r_p = \frac{1-d\beta}{1+d\beta} = \frac{\sin(\theta_I - \theta_T)}{\sin(\theta_I + \theta_T)}$$

$$R_s = \left( \frac{1-d\beta}{1+d\beta} \right)^2, \quad T_s = d\beta \left( \frac{2}{1+d\beta} \right)^2$$

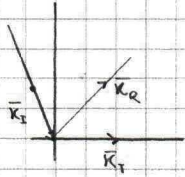
### FENOMENI NOTEVOLI

#### INTERNAL REFLECTION

Il fenomeno di riflessione interna si ha per  $n_2 < n_1$  (altrimenti → external reflection)

Considerare infatti

$$r_p = \frac{d-\beta}{d+\beta} = \frac{\cos \theta_I - n \cos \theta_T}{\cos \theta_I + n \cos \theta_T} \quad (\beta \sim n)$$



$$= \frac{-n \cos \theta_I + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_I}}{n \cos \theta_I + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_I}}, \quad \sin \theta_T = \frac{1}{n} \sin \theta_I$$

$$= \frac{-n^2 \cos \theta_I + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}}{n^2 \cos \theta_I + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}}$$

$$r_s = \frac{1-d\beta}{1+d\beta} = \frac{\cos \theta_I - n \cos \theta_T}{\cos \theta_I + n \cos \theta_T}$$

$$= \frac{\cos \theta_I - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}}{\cos \theta_I + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_I}}$$

L'angolo CRITICO  $\theta_c := \arcsin(n)$

Definito unicamente per  $n_2 < n_1$  è l'angolo per cui l'onda trasmessa è parallela alla superficie per  $\theta > \theta_c$

$$r_p = \frac{-n \cos \theta_I + i \sqrt{\sin^2 \theta_I - n^2}}{n \cos \theta_I + i \sqrt{\sin^2 \theta_I - n^2}}, \quad R_p = 1$$

$$r_s = \frac{\cos \theta_I - i \sqrt{\sin^2 \theta_I - n^2}}{\cos \theta_I + i \sqrt{\sin^2 \theta_I - n^2}}, \quad R_s = 1$$

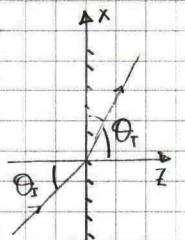
#### EVANESCENT WAVE

Suppongo Total Internal Reflection,  $\theta_I > \theta_c$

$$\tilde{E}_T(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{-i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k}_T \cdot \vec{r} = k_T (\sin \theta_T \hat{x} + \cos \theta_T \hat{z}) \cdot (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

$$= k_T (x \sin \theta_T + z \cos \theta_T)$$



$$= x k_T \sin \theta_T + i z k_T \sqrt{\sin^2 \theta_T - 1} = k x + i \delta z$$

$$k = k_T \sin \theta_T = \left( \frac{\omega n_2}{c} \right) n_1 \sin \theta_T$$

$$= \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_T$$

$$\delta = k_T \sqrt{\sin^2 \theta_T - 1} = \frac{\omega n_2}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_T - n_2^2}$$

$$= \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_T - n_2^2}$$

$$\tilde{E}_T(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{-\delta z} e^{-i(kx - \omega t)} \quad \text{EVANESCENT WAVE}$$

! Cade esponenzialmente con la profondità z!

#### BREWSTER ANGLE (polarization angle)

$$\theta_B := \arctan n \quad \text{Considero } r_p = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)}$$

$$\text{Se } \theta_I + \theta_T \rightarrow \pi/2 \quad r_p \rightarrow 0$$

Da Snell

$$\frac{\sin \theta_I}{\sin(\pi - \theta_T)} = n \rightarrow \frac{\sin \theta_I}{\cos \theta_T} = \tan \theta_T = n$$

→ per  $\theta_B = \arctan n$  no componente TM riflessa, ovvero riflette un'onda linearmente polarizzata (TE)!

## 3. OPTICS OF SOLIDS

### 3.1. ONDE NEI DIELETTICI (C)

Def. Whenever the speed of a wave depends on its frequency, the supporting medium is called DISPERSIVE MEDIUM

MODELLO (elettroni in un non-conduttore)

Hyp. 1. Sono in prossimità di un minimo del potenziale che lega gli elettroni agli atomi. Usa piccole oscillazioni per scrivere  $F_{\text{binding}} = -Kx = -m \omega_0^2 x$ ,  $\omega_0$  natural oscillation frequency

2. C'è una damping force viscosa  $F_{\text{damping}} = -m \gamma \frac{dx}{dt}$

3. In presenza di un'onda elettromagnetica di frequenza  $\omega$  in direz. x c'è elettrone sente una forza  $F_{\text{driving}} = qE = qE_0 \cos(\omega t)$   $\begin{cases} \uparrow \text{polariz.} \\ E = E_0 \end{cases}$

4. Trascurare forze magnetiche (ragionevole!)

Ottengo

$$m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x - m \gamma \dot{x} + q E_0 \cos(\omega t)$$

Complessifico

$$\ddot{\tilde{x}} + \gamma \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = q E_0 e^{-i\omega t}$$

Nello stato stazionario il sistema oscilla alla frequenza  $\omega$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}, \quad \tilde{x}_0 = \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0$$

Da cui il momento di dipolo come parte reale di

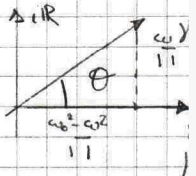
$$\tilde{p}(t) = q \tilde{x}(t) = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0$$

Il termine immaginario di  $\tilde{p}$  al denominatore indica che  $p$  è fuori fase risp.  $E$  di un angolo

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$\theta \sim 0$  se  $\omega \ll \omega_0$

$\theta \sim \pi$  se  $\omega \gg \omega_0$



IN GENERALE in una molecola elettroni diversi sentono differenti damping forces e hanno differenti frequenze naturali. Se ci sono N molecole per unità di volume  $\tilde{p}$  è la parte reale di

$$\tilde{P} = \frac{Nq^2}{m} \left( \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{E} \quad f_j \text{ forza dell'osc. lib.}$$

Ho definito la suscettibilità dielettrica come la costante di proporzionalità fra  $\tilde{E}$  e  $\tilde{P}$ , qui  $\tilde{E}, \tilde{P}$  non sono proporzionali (E differenze di fase!) ma  $\tilde{E}, \tilde{P}$  si. Introduco la SUSCETTIBILITÀ COMPLESSA  $\tilde{\chi}_e$  ( $\tilde{P} = \tilde{E} \tilde{\chi}_e$ ) e la PERMITTIVITÀ COMPLESSA

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \quad (c)$$

Usualmente il termine immaginario è trascurabile!  
 ma se  $\omega_j \sim \omega$  e' effatto è rilevante.

In un mezzo dispersivo l'eq. delle onde ad una data frequenza è

$$\nabla^2 \tilde{E} = \tilde{E} \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \rightarrow \tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

con  $\tilde{k} = \sqrt{\tilde{E} \mu_0 \omega} := k + i\delta$  say

$\tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{-\delta z} e^{i(kz - \omega t)}$  l'onda è attenuata!

Essendo l'intensità  $I \propto E^2$  definisco  $d = 2\delta$   
 COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO.

D'altra parte la velocità dell'onda è  $\omega/k$  e l'indice di rifrazione

$$n = \frac{ck}{\omega}$$

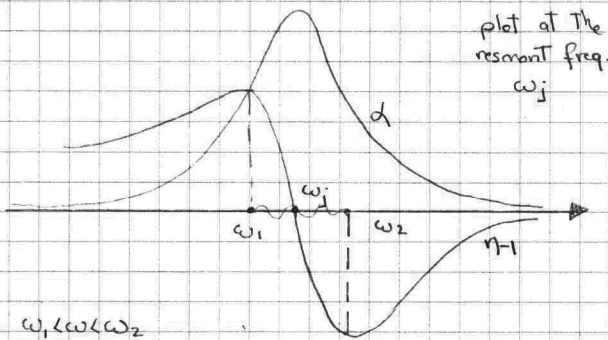
Per gas il secondo termine della (a) è piccolo  
 $\sqrt{1+\epsilon} \sim 1 + \frac{1}{2}\epsilon$  then

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \approx \frac{\omega}{c} \left( 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \gamma_j \omega} \right)$$

so

$$n = \frac{ck}{\omega} \approx 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

$$d = 2\delta \approx \frac{Nq^2 \omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$



$\omega_1 < \omega < \omega_2$   
 ANOMALOUS DISPERSION

Max assorbimento, massima opacità a queste frequenze.

CASE PARTICOLARE

SE  $\omega$  lontano da  $\omega_j$  vale l'approx

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

SE  $\omega < \omega_j$

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)^{-1} \sim \frac{1}{\omega_j^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

$$\rightarrow n = 1 + \left( \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left( \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right)$$

Essendo  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$

$$n = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

CAUCHY'S FORMULA

### 3.2 ONDE NEI CONDUTTORI (c)

Considero un conduttore, in generale  $\tilde{J}_f \neq 0$  e per la legge di Ohm

$$\tilde{J}_f = \sigma \tilde{E}$$

per l'eq. di continuità  $\nabla \cdot \tilde{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$  con  $\rho_f = \frac{\sigma \tilde{E}}{\epsilon}$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma (\nabla \cdot \tilde{E}) = -\sigma \frac{\rho_f}{\epsilon} \rightarrow \rho_f = \rho_f(t) e^{-\sigma t / \epsilon}$$

$\tilde{r} = \frac{\epsilon}{\sigma} = 0$  per conduttori perfetti ( $\sigma \sim \infty$ ) dunque

considero  $\rho_f$  costante

Posso ora scrivere le eq. di Maxwell nel conduttore ( $\tilde{r} = 0$ )

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{E} &= 0 & \nabla \times \tilde{E} &= -\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \tilde{B} &= 0 & \nabla \times \tilde{B} &= \mu \epsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \mu \sigma \tilde{E} \end{aligned} \right.$$

Analogo a quanto visto nel caso  $\sigma = 0$

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{E} = \nabla (\nabla \cdot \tilde{E}) - \nabla^2 \tilde{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \epsilon \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \mu \sigma \tilde{E})$$

$$\nabla^2 \tilde{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \tilde{B} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \tilde{B}}{\partial t}$$

Queste equazioni ammettono soluzioni a onde piane

$$\tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{B}(z,t) = \tilde{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

con  $\tilde{k}^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega := k + i\delta$

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right)^{1/2}$$

$$\delta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right)^{1/2}$$

$$\rightarrow \tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{-\delta z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{B}(z,t) = \tilde{B}_0 e^{-\delta z} e^{i(kz - \omega t)}$$

Si dice SKIN DEPTH la distanza necessaria a ridurre l'ampiezza di un fattore  $1/e$   $d = \frac{1}{\delta}$

Le eq. di Maxwell impongono ulteriori condizioni su  $\tilde{E}, \tilde{B}$ .

$$\tilde{E}(z,t) = \tilde{E}_0 e^{-\delta z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad \tilde{B}(z,t) = \tilde{K} \tilde{E}_0 e^{-\delta z} e^{i(kz - \omega t)}$$

Scrivo  $\tilde{k} = K e^{i\phi}$ ,  $K = \sqrt{k^2 + \delta^2} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2}$   
 $\phi = \arctan \frac{\delta}{k}$

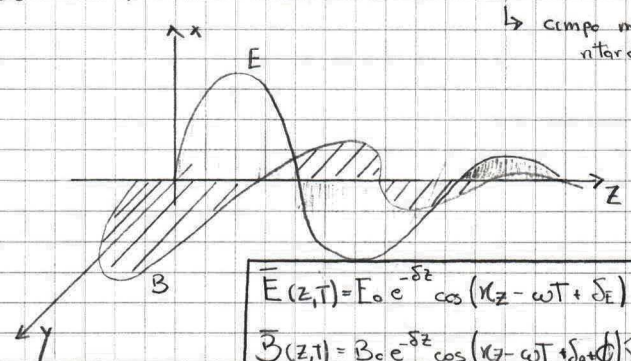
Analogo  $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta E}$ ,  $\tilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta B}$  e vale

$$B_0 e^{i\delta B} = \frac{K}{\omega} e^{i\phi} E_0 e^{i\delta E} \Rightarrow \delta_B - \delta_E = \phi$$

OVVERO i campi in un conduttore hanno ampiezze e fasi eguali da

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2}, \quad \delta_B - \delta_E = \phi$$

↳ campo magnetico ritardato!



$$\tilde{E}(z,t) = E_0 e^{-\delta z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{x}$$

$$\tilde{B}(z,t) = B_0 e^{-\delta z} \cos(kz - \omega t + \delta_B + \phi) \hat{y}$$

Sviluppo ora un modello differenziale per onde nei conduttori:

- MODELLO Hyp
1. Damping force  $m\tau^{-1}\bar{v}$
  2. Driving force  $-e\bar{E}$
  3.  $\bar{E}$  negligibile

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} + m\tau^{-1}\bar{v} = -e\bar{E} \quad (c)$$

Carica un'espressione per  $\tau$ . Sia  $N$  il numero di elettroni di conduzione per unità di volume. La corrente si scrive  $\bar{J} = -Ne\bar{v}$

$$(c): \frac{d\bar{J}}{dt} + \tau^{-1}\bar{J} = \frac{Ne^2}{m}\bar{E}$$

Il decadimento di una corrente transiente è generato dall'omogeneità associata, la cui soluzione è  $\bar{J} = \bar{J}_0 e^{-t/\tau}$ . La corrente decade di un fattore 1/e dopo  $\tau$  (RELAXATION-TIME)

~ Per un campo  $\bar{E}$  statico (c) diventa  $\tau^{-1}\bar{J} = \frac{Ne^2}{m}\bar{E} \rightarrow \sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}$  CONDUTTIVITÀ

~ Assumo ora una dipendenza  $e^{-i\omega t}$  per  $\bar{E}, \bar{J}$ , dalle (c) ottengo

$$(-i\omega + \tau^{-1})\bar{J} = \frac{Ne^2}{m}\bar{E} = \sigma\tau^{-1}\bar{E}$$

$$\Rightarrow \bar{J} = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau}\bar{E} \quad \text{*Nota. Per } \omega=0 \text{ recupero } \bar{J} = \sigma\bar{E}$$

L'eq. d'onda per  $\bar{E}$  in questo caso diventa

$$\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Ansatz. Provo soluzioni del tipo  $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$

$$k \in \mathbb{C}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega\mu_0\sigma}{1 - i\omega\tau}$$

Introduco l'INDICE DI RIFRAZIONE COMPLESSO  $N$

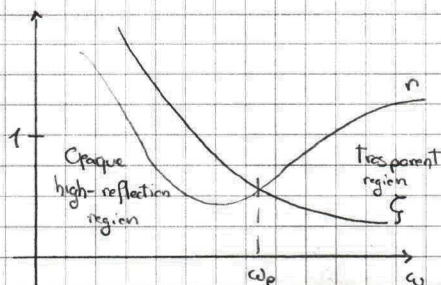
$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}}$$

where  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma c^2}{\tau}}$  PLASMA FREQUENCY

e dunque con  $N = n + i\zeta$

$$\begin{cases} n^2 + \zeta^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \Rightarrow n, \zeta \\ 2n\zeta = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) \end{cases}$$

Il sistema prec. risolto restituisce  $n, \zeta$  in funzione di  $\omega_p, \tau, \omega$



Nei semiconduttori sia elettroni e i ben che band contibuiscono alle proprietà ottiche

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}} + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right)$$

## 4. COHERENCE AND INTERFERENCE

Considero due onde piane polarizzate linearmente e di frequenza  $\omega$

$$\bar{E}_{(1)} = \bar{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)}, \quad \bar{E}_{(2)} = \bar{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)}$$

Se  $\phi_2 - \phi_1 = \text{cost.}$  le due onde si dicono COERENTI. Suppongo coerenza. Considero l'INTENSITÀ dall'onda generata dalla sovrapposizione:

$$I = |\bar{E}|^2 = (\bar{E}_{(1)} + \bar{E}_{(2)}) (\bar{E}_{(1)}^* + \bar{E}_{(2)}^*) = |\bar{E}_1|^2 + |\bar{E}_2|^2 + 2\bar{E}_1 \bar{E}_2 \cos\theta$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\bar{E}_1 \bar{E}_2 \cos\theta, \quad \theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2$$

Il termine  $2\bar{E}_1 \bar{E}_2 \cos\theta$  è detto termine d'interferenza. Se  $\theta$  due onde non sono coerenti  $\phi_2 - \phi_1$  varia in modo casuale e il termine in casella media a 0  $\rightarrow$  no interference. Jesso diassi nel cos  $\bar{E}_1 \bar{E}_2 = 0$

### 4.1 YOUNG'S EXPERIMENT (A)

Se  $S_1, S_2$  sono sorgenti di onde sferiche la cui fase è nella forma  $i(kr - \omega t)$

La differenza di fase di due onde in P è  $\Delta\phi = k(d_2 - d_1)$

Le condizioni di massimo e  $k(d_2 - d_1) = \pm 2n\pi$   
 $|d_2 - d_1| = n\lambda$

$$\left( x^2 + \left( y + \frac{h}{2} \right)^2 \right)^{1/2} - \left( x^2 + \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 \right)^{1/2} = n\lambda$$

$$\text{SE } x \gg y, h \sim x \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y+h}{x} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{y-h}{x} \right)^2 \right)$$

$$\sim x \left( \frac{1}{2} \frac{yh}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{yh}{x^2} \right) \Rightarrow \frac{yh}{x} = n\lambda$$

$\Delta \sqrt{N^2 + a^2} \sim \frac{a^2}{2N}$  ( $a \ll N$ )

### 4.2 PARTIAL COHERENCE

Se la fase e la ampiezza delle onde variano in modo casuale, conviene definire l'incoerenza come media

$$I = \langle |\bar{E}_1|^2 + |\bar{E}_2|^2 + 2\text{Re}(\bar{E}_1 \bar{E}_2^*) \rangle, \quad \langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

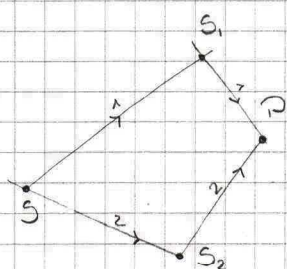
Suppongo ora

1. Le quantità sono stazionarie (la media temporale non dipende dall'origine del tempo)
2. I campi ottici hanno la stessa polarizzazione  $\rightarrow$  ignora la loro natura vettoriale

$$\rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\text{Re}\langle \bar{E}_1 \bar{E}_2^* \rangle$$

Suppongo un esperimento in cui la differenza di fase è dovuta al diverso cammino ottico.

Sia  $t$  il tempo impiegato a percorrere il percorso 1,  $t + \tau$  per il percorso 2.



Il Termine di interferenze si scrive allora  $2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau)$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t) E_2^*(t+\tau) \rangle$$

CORRELATION FUNCTION di due campi  $E_1, E_2$

La funzione  $\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(t) E_1^*(t+\tau) \rangle$  è la AUTO CORRELATION FUNCTION

Nota che  $\Gamma_{11}(0) = I_1, \Gamma_{22}(0) = I_2$ . Definisco

$$\gamma_{12}(\tau) := \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad \text{DEGREE OF PARTIAL COHERENCE}$$

L'irradianza è dunque  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau)$  (\*)

In generale  $\gamma_{12}(\tau)$  è una funzione complessa e periodica di  $\tau$ , se  $|\gamma_{12}| \neq 0$  c'è una figura d'interferenza. In particolare

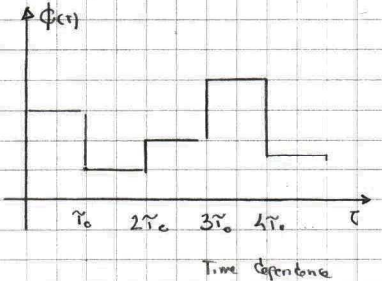
- $|\gamma_{12}| = 1$  complete coherence
- $|\gamma_{12}| < 1$  partial coherence
- $|\gamma_{12}| = 0$  complete incoherence

Delle (\*) inoltre  $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|, I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|$

Definisco  $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|}{I_1 + I_2}$  VISIBILITA' DELLE FRANGIE ( $0 < \gamma < 1$ )

### 4.3 COHERENCE TIME / LENGTH

Considero il seguente profilo per la fase in funzione del tempo



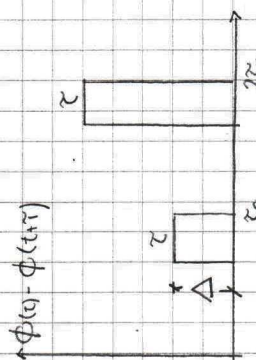
ovvero l'oscillazione è sinusoidale con fase costante  $T_e$  per  $\tau_0$ , poi cambia rapidamente in modo casuale.

$\tau_0$  := COHERENCE TIME  
In questo caso  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t} \cdot \phi(t)$

Hyp. Suppongo quest'equazione descrivere un fascio di luce che, separato in due fasci, sia poi ricompattato per produrre interferenza.

Assumendo  $|E_1| = |E_2|$  calcolo il grado di autocorrelazione

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(t) E^*(t+\tau) \rangle}{\langle |E|^2 \rangle} = \langle e^{i\omega\tau} e^{i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} \rangle = e^{i\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} dt$$



Considero il primo intervallo  $(0, \tau_0)$

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} e^{i(\phi(t) - \phi(t+\tau))} dt = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0 - \tau} e^{i\Delta} d\tau + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0 - \tau}^{\tau_0} e^{i\Delta} d\tau = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} + \frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta}$$

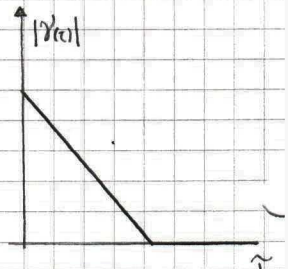
Analog per i successivi intervalli ( $\Delta$  diverso)

Perché  $\Delta$  è casuale i termini in  $e^{i\Delta}$  mediano a 0. Il primo termine rappresenta la media casuale. Se  $\tau > \tau_0$  ovviamente la differenza di fase è sempre casuale e tutto l'integrale mediano a 0.

Riassumendo

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{i\omega\tau} & \tau < \tau_0 \\ 0 & \tau > \tau_0 \end{cases}$$

$$|\gamma(\tau)| = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0} & \tau < \tau_0 \\ 0 & \tau > \tau_0 \end{cases}$$



La visibilità delle frange per onde di uguale ampiezza per interferenze di due onde è  $\gamma = |\gamma(\tau)|^2$  dunque affinché ci sia interferenza deve chiedere che la differenza di cammino ottico non sia maggiore di  $l_c = c\tau_0$ ,  $l_c$  := LUNGHEZZA DI COERENZA (length of an uninterrupted wave train)

### 4.4 SPECTRAL RESOLUTION

Nella realtà nessuna onda è perfettamente monocromatica. Per analizzarne la composizione uso l'analisi di Fourier.

Ricordo che  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$  Trasformata di Fourier  
 $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$  Antitrasformata di Fourier

Qui  $t$  Tempo,  $\omega$  frequenza.

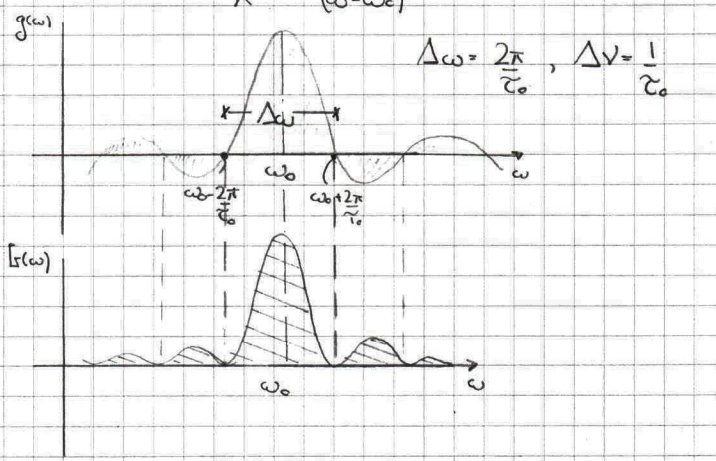
Hyp. Considero un singolo treno d'onde di durata  $\tau_0$  finita.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & t \in (-\tau_0/2, \tau_0/2) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin((\omega - \omega_0)\tau_0/2)}{\omega - \omega_0}$$

Definisco SPETTRO DI POTENZA

$$I(\omega) = |g(\omega)|^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2((\omega - \omega_0)\tau_0/2)}{(\omega - \omega_0)^2}$$



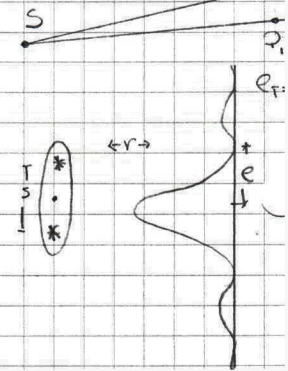
### 4.5 COERENZA SPAZIALE

Considero una singola sorgente quasi-monocromatica S e i punti  $P_1, P_2, P_3$  come in figura

La coerenza fra  $E_1, E_2$  misura la COERENZA SPAZIALE LONGITUDINALE. Quella fra  $E_1, E_2$  è COERENZA SPAZIALE TRASVERSA.

In generale una sorgente estesa ha sempre un certo grado di coerenza spaziale.

Per valutarne l'effetto e discernerlo da quello di coerenza temporale posso usare un interferometro di Young muovendo simmetricamente le fenditure e valutando il campo in  $\nu = 0$ .



# 5 DIFFRACTION

## 5.1 TEORIA FONDAMENTALE (D)

Descrizione qualitativa:

### PRINCIPIO DI HUYGENS

La propagazione delle onde può essere predetta assumendo che ogni punto del fronte d'onda sia sorgente di un'onda secondaria che diffonde in ogni direzione. L'involuppo di tutte le onde secondarie è il nuovo fronte d'onda.

Descrizione rigorosa.

\* Per il Teorema di Green se  $U, V$  sono funzioni scalari continue e integrabili, vale

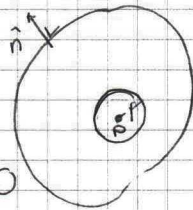
$$\oint_S (\nabla V \cdot \mathbf{n} - U \nabla V) da = \int_V (\nabla^2 U - U \nabla^2 V) d\tau \quad (c)$$

Se  $U, V$  sono funzioni d'onda  $\nabla^2 U = -k^2 U$ ,  $\nabla^2 V = -k^2 V$ . Il pedice indica che si considera la componente normale alla superficie del gradiente.

Sia  $V$  in particolare un'onda sferica  $V = \frac{U_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$

La superficie di integrazione comprende il punto  $P (r=c)$ . Poiché  $V \rightarrow \infty$  per  $r \rightarrow 0$  escludo un intorno di raggio  $p$  del volume di integrazione.

$$\oint_S (\frac{e^{ikr}}{r} \nabla U - U \nabla \frac{e^{ikr}}{r}) da + \oint_{r=p} (\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial e^{ikr}}{\partial r}) p^2 d\Omega = 0$$



$U_0 e^{i\omega t}$  considered as  $U$ . Considerare ora  $p \rightarrow 0$

Il secondo integrale diventa

$$\int_{r=p} p e^{ikr} \frac{\partial U}{\partial r} - U p^2 (ikp - 1) d\Omega \rightarrow 0$$

L'integrale (c) è identicamente nullo se  $U, V$  hanno una dipendenza armonica del tipo  $e^{\pm ikr}$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \oint_S U_0 d\Omega = -4\pi U_0$$

$$\text{Ottengo dunque } U_p = -\frac{1}{4\pi} \oint_S (\frac{U \nabla \frac{e^{ikr}}{r}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla U) da$$

### Nell'ambito della DIFFRAZIONE U rappresenta la optical disturbance, scalare. $|U|^2$ può essere inteso come una misura dell'intensità.

0 Considerare ora il problema generale della diffrazione. Suppongo sia prodotta da un'apertura di forma arbitraria in una superficie piana all'ave.

È dato di determinare la distribuzione ottica che raggiunge  $P$  della sorgente  $S$ . Nell'applicare il teorema di Kirchhoff prendo una superficie che comprenda sia il punto  $P$  che l'apertura.

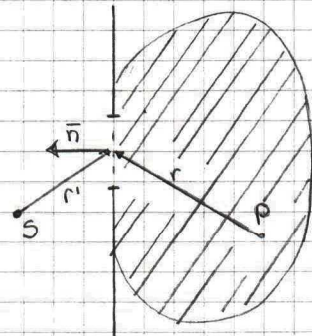
Hyp. 1.  $U$  e  $\nabla U$  danno contributi rilevanti all'integrazione solo all'apertura

2.  $U$  e  $\nabla U$  all'apertura hanno i valori che avrebbe se queste non ci fosse.

Sia  $r'$  la posizione di un punto sull'apertura. La funzione d'onda in  $P$  è il punto  $P$

$$U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'}$$

che rappresenta un'onda monocromatica che si propaga verso l'istmo rispetto a  $S$ . Dal Teorema di Kirchhoff



$$U_p = U_0 \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi} \oint_S \left( \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) da$$

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \left( i k \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right)$$

$$\nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left( i k \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right)$$

Treccano i secondi termini nell'ipotesi  $r, r' \gg \lambda$

$$U_p = -\frac{i k U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r r'} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')] da$$

### TRESEL-KIRCHHOFF INTEGRAL FORMULA

↑ mathematical statement of Huygens' principle

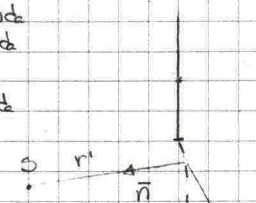
#### CASO PARTICOLARE

Suppongo un'apertura circolare con  $S$  sorgente posta simmetricamente. La superficie di integrazione è ora una sfera sferica bounded dall'apertura  $r' = \text{const}$ , con  $(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = -1$

$$U_p = -ik \int \frac{U_0 e^{i(kr - \omega t)}}{r} (\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1) da, \quad U_0 = U_0 \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

$U_0$  è ampiezza complessa dell'onda primaria incidente sull'apertura. La qual'onda primaria ogni elemento  $da$  dell'apertura genera un'onda secondaria sferica

$$U_0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$



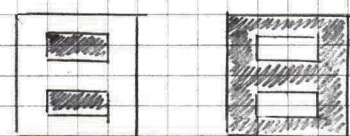
Il fattore  $[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')] + 1$  è detto OBLIQUITY FACTOR.

- 0 Tale fattore è nullo se  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = 1$  e ciò spiega perché non c'è onda che si propaga all'indietro creata dall'onda primaria.
- 0 Il fattore  $-i$  indica che le onde diffratte sono sfasate di  $\pi/2$  rispetto l'onda incidente primaria.

### VALE IL SEGUENTE PRINCIPIO

Considero un'apertura  $A$  che produce per diffrazione una certa distribuzione ottica  $U_p$  in  $P$ . Suppongo di dividere  $A$  in due porzioni  $A_1, A_2$  (dette compatte). Allora  $U_p = U_{p1} + U_{p2}$

! Se  $U_{p1} = 0$   $U_{p2} = -U_p \rightarrow$  stesse distribuzione ottica ma fase shiftata di  $180^\circ$

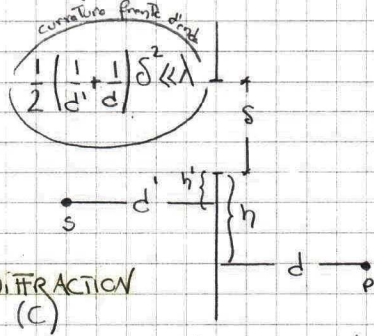


Due tipologie fondamentali di diffrazione:

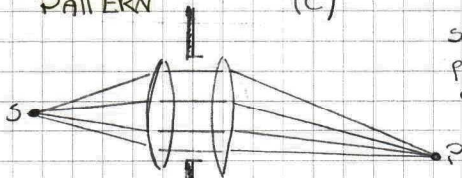
o **FRAUNHOFER DIFFRACTION**: sia le onde incidenti che quella diffratta sono onde piane

o **FRESNEL DIFFRACTION**: L'aprossimazione di cui sopra non vale, la curvatura del fronte d'onda non è trascurabile.

No sharp line of distinction between the two cases



## 5.2 FRAUNHOFER DIFFRACTION PATTERN



set-up sperimentale per Fraunhofer diffraction

Utilizzo le seguenti semplificazioni:

1. La dispersione angolare dell'onda diffratta è piccola abbastanza affinché l'angolo factor  $\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}')$  non vari significativamente sull'apertura.
2.  $e^{ikr} \sim \text{cost.}$
3. La variazione di  $e^{ikr}$  sull'apertura è data da e fatte esponente, impiegherò  $r$  col suo valore medio.

Ottingo 
$$U_p = C \int_S e^{ikr} da \quad (0)$$

Casi:

### SINGLE SLIT

Sia  $L$  la lunghezza della fenditura e  $b$  la larghezza.

L'elemento d'area è  $da = L dy$

$r = r_0 + y \sin \theta$

con  $r_0$  valore per  $y=0$

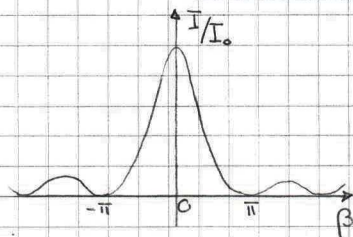
Dalla (0)

$$U = C e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ik y \sin \theta} L dy$$

$$= 2 C e^{ikr_0} L \frac{\sin(\frac{1}{2} k b \sin \theta)}{k \sin \theta}$$

$$= C' \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta, \quad C' = e^{ikr_0} b L C$$

$$I = |U|^2 \rightarrow I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad I_0 = |C b L|^2$$



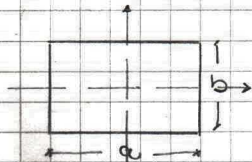
First min  $\sin \theta = \frac{2\pi}{k b} = \frac{\lambda}{b}$

$b \gg \lambda \Rightarrow \theta$  grande  
 $I_0$  piccolo

$b \ll \lambda \Rightarrow \theta$  piccolo  
 $I_0$  grande

### RECTANGULAR APERTURE

Stessa trattazione del caso precedente integrando questa volta in due dimensioni



Ottingo

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \alpha = \frac{1}{2} k a \sin \theta, \quad \beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta$$

### CIRCULAR APERTURE

Sia  $R$  il raggio dell'apertura,  $y$  variabile di integrazione:

$$U = C e^{ikr_0} \int_{-R}^R e^{ik y \sin \theta} 2 \sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$u = \frac{y}{R}, \quad p = k R \sin \theta$$

$$= 2 C e^{ikr_0} R^2 \int_{-1}^1 e^{i p u} \sqrt{1 - u^2} du$$

$$= 2 C e^{ikr_0} R^2 \frac{\pi J_1(p)}{p} \quad \text{hence}$$

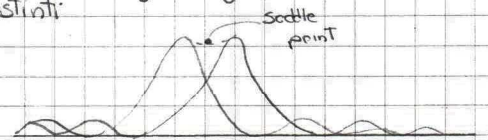
$$I = I_0 \left[ \frac{2 J_1(p)}{p} \right]^2$$

Il primo 0 della funzione di Bessel è in  $p = 3,832$ , cui corrisponde un raggio angolare di

$$\sin \theta = \frac{3,832}{k R} = \frac{1,22 \lambda}{D} \approx \theta$$

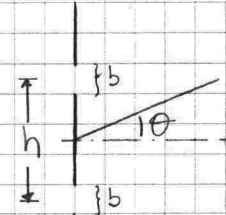
ciò definisce il Disco di AIRY

Nota: L'immagine di una sorgente estesa è la sovrapposizione di più dischi di Airy. La risoluzione dunque dipende dalle dimensioni di questi. Se  $D$  è il diametro dell'apertura delle lenti, l'apertura angolare è circa  $1,22 \lambda / D$ . Secondo il CRITERIO DI RAYLEIGH Tale è anche la minima separazione angolare fra due punti sorgente uguali affinché essi siano distinti.



### DOUBLE SLIT

Con la notazione indicata in figura scrivere:



$$U = C e^{ikr_0} \int_S e^{ik y \sin \theta} dy$$

$$= C e^{ikr_0} \left( \int_0^b e^{ik y \sin \theta} dy + \int_h^{h+b} e^{ik y \sin \theta} dy \right)$$

La parentesi è uguale a  $(e^{ik(b+h)\sin\theta} - 1) + (e^{ikh\sin\theta} - 1)$

$$= \left( \frac{e^{ik(b+h)\sin\theta} - 1}{ik \sin \theta} \right) (1 + e^{ikh \sin \theta})$$

$$= 2b e^{i\gamma} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \cos \gamma \quad \beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta, \quad \gamma = \frac{1}{2} k h \sin \theta$$

hence

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma$$

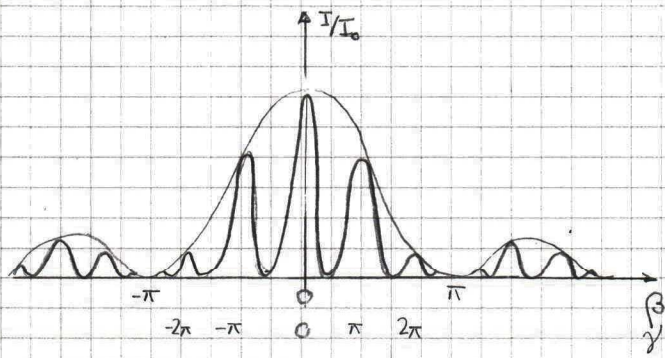
Il fattore  $\left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$  è qui

e' in rilievo per le frange di interferenza di 1<sup>o</sup> ordine

del termine  $\cos^2 \gamma$ . Si hanno frange chiare per  $\gamma = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$

La separazione angolare fra due frange è data da  $\Delta \gamma = \pi \Rightarrow \Delta \theta \approx \frac{2\pi}{k h} = \frac{\lambda}{h}$  come nell'esperimento





### MULTIPLE SLITS

Considera un reticolo di diffrazione costituito da  $N$  aperture identiche e parallele di larghezza  $b$  e distanze  $h$  dalle successive / precedenti.

Dare relazione come sempre

$$U = C e^{ikx_0} \int_0^b e^{iky \sin \theta} dy$$

L'integrale della prec. espressione diventa qui:

$$U = \frac{e^{ikx_0}}{ik \sin \theta} \left[ 1 + e^{ik h \sin \theta} + e^{2ik h \sin \theta} + \dots + e^{i(N-1)kh \sin \theta} \right]$$

serie geometrica!

$$U = \frac{e^{ikx_0}}{ik \sin \theta} \frac{1 - e^{iNkh \sin \theta}}{1 - e^{ikh \sin \theta}}$$

$$U = b e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left( \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} kh \sin \theta, \quad \gamma = \frac{1}{2} kh \sin \theta$$

hence

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin N\gamma}{N \sin \gamma} \right)^2$$

! Il fattore  $N$  è aggiunto per normalizzare l'espressione in modo che sia  $I = I_0$  per  $\theta = 0$

Ho massimi principali per  $\gamma = n\pi$ ,  $n =$  ordine di diffrazione. Massimi secondari per  $\gamma = \frac{3\pi}{2N}, \frac{5\pi}{2N}, \dots$

- L'ampiezza angolare della prima frangia (principale)

$$\Delta(N\gamma) = \pi \rightarrow \Delta\gamma = \frac{\pi}{N} = \frac{1}{2} kh \cos \theta \Delta\theta$$

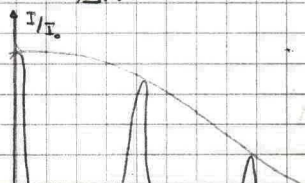
$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{\gamma \lambda}{N h \cos \theta} \quad \text{se } N \rightarrow \infty, \Delta\theta \rightarrow 0 \text{ e frange diventano linee.}$$

- Per un dato ordine di diffrazione d'altro conto, essendo  $n\lambda = h \sin \theta$  il corrispondente massimo principale nell'angolo, differenziando l'angolo

$$\Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{h \cos \theta} \rightarrow \text{separazione angolare fra due linee spettrali che differiscono di } \Delta\lambda \text{ per lunghezza d'onda}$$

Combinando le due espressioni precedenti ottengo il **RESOLVING POWER** di uno spettroscopo:

$$RP = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn \quad (\text{according to the Rayleigh criterion!})$$



## Campi E Potenziali

Cerca la soluzione generale, per campi dipendenti dal tempo, per  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  noti  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{r}, t)$

### 1. SCALAR AND VECTOR POTENTIAL (A)

In elettrostatica  $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists V$  t.c.  $\vec{E} = -\nabla V$ .

In elettrodinamica  $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ ! Rimane però valido  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{come in magnetostatica.}$$

Usa la legge di Faraday per scrivere

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{dunque } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Dalla I legge di Maxwell

$$\nabla^2 V + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (*) \quad \left( \text{Versione elettrodinamica dell'eq. di Poisson} \right)$$

Dalla IV invece

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \left( \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$

### 2. GAUGE TRANSFORMATIONS (A)

Fino ad ora ho trattato un problema con 6 incognite  $(\vec{E}, \vec{B})$  in cui a 4 incognite  $(V, \vec{A})$  con 2 eq. (\*), (\*\*). Inoltre le eq. \*, \*\* non definiscono univocamente i potenziali.

È possibile imporre ulteriori condizioni sui potenziali, a patto di non modificare  $\vec{E}, \vec{B}$ . **GAUGE FREEDOM**

\* Suppongo d'ora due set di potenziali  $(V, \vec{A}), (V', \vec{A}')$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}, \quad V' = V + \beta$$

Se  $\vec{A}, \vec{A}'$  producono lo stesso  $\vec{B}$  allora  $\nabla \times \vec{\alpha} = 0$  ovvero  $\vec{\alpha} = \nabla \lambda$

Se anche  $\vec{E}$  è lo stesso allora

$$\nabla \beta + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \nabla \left( \beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0$$

$\Rightarrow \beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \chi(t)$  Può essere assorbito  $\chi(t)$  in  $\lambda$  definendo una nuova  $\lambda$  aggiungendo  $\chi(t)$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda$$

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

**GAUGE TRANSFORMATIONS**

Chiede per qualunque  $\lambda(\vec{r}, t)$  aggiungendo  $\nabla \lambda$  al potenziale vettore e contemporaneamente sottraendo  $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$  non mod.  $\rho$  e quindi le fisiche  $\vec{E}, \vec{B}$ .

Due Gauge in particolare

o **Coulomb GAUGE**  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

Con questa condizione (\*)  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} d\tau'$

Il potenziale scalare nel Gauge di Coulomb è determinato dalla distribuzione di carica ISTANTANEA. Com'è possibile alla luce della relatività? Il punto è che ciò che misura è  $\vec{E}$  e questo coinvolge  $\vec{A}$  per  $Q$  \*\*\*. Mentre  $V$  istantaneamente riflette un cambiamento in  $\rho$ ,  $\vec{E}$  per effetto delle dipendenze da  $\vec{A}$ , NO! Con questo gauge  $V$  è facile da determinare,  $\vec{A}$  al contrario.

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

LORENZ GAUGE

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(*) \cdot \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$(**) \cdot \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Introduco il D'ALAMBERTIAN OPERATOR

$$\square^2 := \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$(*) \cdot \square^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(**) \cdot \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

In questo gauge le eq. per i potenziali hanno la stessa forma. Il D'Alembertiano è riduce generalizzazione del Laplaciano. L'intera elettrodinamica consiste nel risolvere le eq. d'onda NON-OMogenee di cui sopra, con due termini sorgente per uno dato sorgente.

### 3. LORENZ FORCE LAW

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left[ -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right]$$

$$(v + v(r)) \oplus \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -q \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \nabla(V - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} \quad \begin{matrix} \text{convective} \\ \text{derivative} \end{matrix}$$

\* Variazione nel tempo di  $\vec{A}$  nella posizione della particella (che si muove).

$$d\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}$$

Otengo dunque

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} + q\vec{A}) = -\nabla [q(V - \vec{v} \cdot \vec{A})]$$

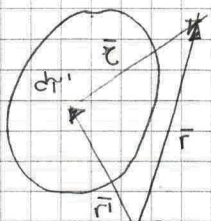
Definisco  $\vec{p}_{can} = \vec{p} + q\vec{A}$ ,  $U_{can} = q(V - \vec{v} \cdot \vec{A})$

$$\frac{d\vec{p}_{can}}{dt} = -\nabla U_{can} \quad \text{avere la stessa forma del caso meccanico!}$$

Con un simile argomento ottengo per l'energia

$$\frac{d}{dt} (T + qV) = \frac{\partial}{\partial t} [q(V - \vec{v} \cdot \vec{A})]$$

### 4. RETARDED POTENTIALS



Nel caso statico (\*) e (\*\*), si riducono a

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

di cui ben conosco le soluzioni.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\tau', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r} d\tau'$$

con la notazione in disegni in figura. Nel caso dinamico l'intera conte è informazione sulla sorgente al TEMPO RETARDATO

$$\boxed{r_r := t - \frac{r}{c}} \quad \text{hence} \quad \boxed{V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{r} d\tau'}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{r} d\tau'}$$

\* Dim. Considero la prima espressione

Devo mostrare che esse soddisf. l'eq. d'onda non omogenea  $\square^2 V = -\rho/\epsilon_0$ . Nota che l'integrande dipende da  $\vec{r}$  esplicitamente al denominatore e implicitamente in  $t_r$ .

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ (\nabla^2 \rho) \frac{1}{r} + \rho \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau'$$

$$\oplus \nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \hat{r} \quad | \quad \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ -\frac{\dot{\rho} \hat{r}}{c r} - \rho \frac{\hat{r}}{r^2} \right] d\tau'$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\dot{\rho}}{r} \cdot (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right\} d\tau'$$

$$- \left[ \frac{\dot{\rho}}{r^2} (\nabla \rho) + \rho \nabla \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) \right] d\tau'$$

$$\oplus \nabla \rho = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \hat{r} \quad | \quad \nabla \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2} \nabla \left( \frac{\hat{r}}{r} \right)$$

$$\nabla \left( \frac{\hat{r}}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{r} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \delta^3(\vec{r}) \right] d\tau'$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad //$$

Le prove non ugualmente per advanced potentials!

A-PARTE.  $V$  in coordinate sferiche

$$\nabla T = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_\phi$$

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] \hat{\theta}$$

$$+ \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{\phi}$$

### 4. POINT CHARGES

#### 4.1 LIÉNARD-WIECHERT POTENTIALS (B)

Considero una carica puntuale  $q$  che si muove lungo una specifica traiettoria

$\vec{w}(t) :=$  posizione di  $q$  al tempo  $t$   
Il potenziale generato da tale carica è

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{r} d\tau'$$

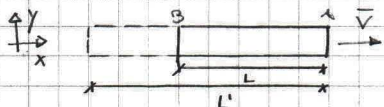
Il fattore  $1/r$  è costante e può esser portato fuori dall'integrale. Ciò che rimane, cos'è?

Non è la carica della particella!  
 Dipende poi da  $\vec{r}$ , posizione del punto in cui valute il potenziale, attraverso  $Tr$ . Per calcolare la carica totale dare integrale  $\rho$  e tempo diversi per punti diversi della configurazione di carica, in modo da tener conto della relazione  $Tr = T - r/c$  (stesso  $T$ , ma  $Tr$  diverso in dipendenza da  $r$ !).

Per una particella estesa, non importa quanto, oppure un fattore  $(1 - \vec{e} \cdot \vec{v}/c)^{-1}$  con  $\vec{v}$  velocità della carica al tempo ritardato.  
 La dimostrazione è puramente geometrica.

Il problema persiste anche per cariche puntuali, essendo queste formalizzate in elettrodinamica classica come limite di distribuzioni estese!

\* Dim. Considero un oggetto esteso come in figura che si muove a velocità  $\vec{v}$



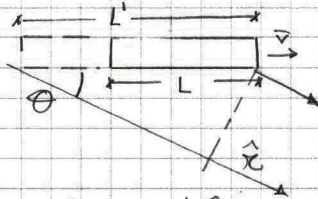
ad un osservatore oppure più lungo perché la luce proveniente da B è registrata

simultaneamente a quella da A e parte prima!  
 In particolare  $\frac{L}{c} = \frac{L' - L}{v} \rightarrow L' = \frac{L}{1 - v/c}$

In generale, se la velocità ha un angolo  $\Theta$  con la direzione dell'osservatore, l'estesa distanza da B sarà  $L' \cos \Theta$

$$\frac{L' \cos \Theta}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

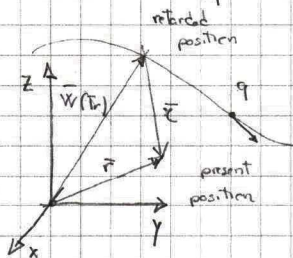
$$L' = \frac{L}{1 - v \cos \Theta}$$



queste effetti non distorcono direzioni  $\perp \vec{v}$   
 Il volume apparente  $\tau'$  è dunque

$$\tau' = \frac{\tau}{1 - \vec{e} \cdot \vec{v}/c}$$

Per una carica puntuale il tempo ritardato è determinato implicitamente dall'equazione  $|\vec{r} - \vec{w}(Tr)| = c(T - Tr)$



$$\vec{e} = \vec{r} - \vec{w}(Tr)$$

Nota che un solo punto della traiettoria è collegato a  $\vec{r}$  in un tempo  $T$ .

\* Per assurdo  
 $t_1 = c(T - T_1)$   
 $t_2 = c(T - T_2)$   
 $t_1 - t_2 = c(T_2 - T_1)$   
 ma nessuna perturbazione può viaggiare alla velocità  $c$ !

Dunque un solo ritardato point contribuisce ai potenziali per un dato  $T$ .

$$V(\vec{r}, T) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - \vec{e} \cdot \vec{v})}$$

Inoltre, essendo la densità di corrente  $\vec{j}$

$$A(\vec{r}, T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', Tr) \vec{v}(Tr)}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}}{c} \int \rho(\vec{r}', Tr) d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\vec{v}}{(rc - \vec{e} \cdot \vec{v}) c^2} = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, T)$$

LIENARD-WIECHERT POTENTIALS

4.2 FIELDS OF A MOVING POINT-CHARGE (E)

Per calcolare i campi parte dai potenziali di Liénard-Wiechert oppure ricorrendo a 2 equazioni:  
 $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial T}$ ,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

\* La differenziazione deve tener conto del fatto che  $\vec{e} = \vec{r} - \vec{w}(Tr)$  e  $\vec{v} = \dot{\vec{w}}(Tr)$  sono relativi al tempo ritardato e  $Tr$ , definito implicitamente da  $|\vec{r} - \vec{w}(Tr)| = c(T - Tr)$  è funzione di  $\vec{r}, T$ .  
 Alright, let's do it.  
 Considero

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(rc - \vec{e} \cdot \vec{v})^2} \nabla(rc - \vec{e} \cdot \vec{v}) \rightarrow \nabla rc = -\vec{c}$$

$$(c) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(rc - \vec{e} \cdot \vec{v})} (-c^2 \nabla Tr - \nabla(\vec{e} \cdot \vec{v})) \leftarrow$$

Analizzo il termine

$$\nabla(\vec{e} \cdot \vec{v}) = (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{e} + \vec{e} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{e})$$

(i) (ii) (iii) (iv)

$$(i) (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{v} = (e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{v}(Tr)$$

$$= e_x \frac{\partial v_x}{\partial Tr} \frac{\partial Tr}{\partial x} + e_y \frac{\partial v_x}{\partial Tr} \frac{\partial Tr}{\partial y} + e_z \frac{\partial v_x}{\partial Tr} \frac{\partial Tr}{\partial z}$$

$$= \vec{e} \cdot (\nabla Tr)$$

$$(ii) (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{e} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{r} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{r} = (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{r}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} = \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla Tr)$$

$$= \vec{v} - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla Tr)$$

$$(iii) \vec{e} \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \times \vec{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}) \hat{x} + (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}) \hat{y} + (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) \hat{z}$$

$$= (\frac{\partial v_z}{\partial Tr} \frac{\partial Tr}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial Tr} \frac{\partial Tr}{\partial z}) \hat{x} + \dots$$

$$= -\vec{e} \times \nabla Tr$$

$$(iv) \vec{v} \times (\nabla \times \vec{e})$$

$$\nabla \times \vec{e} = \nabla \times \vec{r} - \nabla \times \vec{w} = \vec{v} \times \nabla Tr$$

$$\Rightarrow \nabla(\vec{e} \cdot \vec{v}) = \vec{e} \cdot (\nabla Tr) + \vec{v} - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla Tr) - \vec{e} \times (\vec{e} \times \nabla Tr) + \vec{v} \times (\vec{v} \times \nabla Tr)$$

$$\oplus \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$= \vec{e} \cdot (\nabla Tr) + \vec{v} - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla Tr) - \vec{e} \cdot (\vec{e} \cdot \nabla Tr) + \nabla Tr (\vec{e} \cdot \vec{e}) + \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla Tr) - \nabla Tr v^2$$

$$= \vec{v} + (\vec{e} \cdot \vec{e} - v^2) \nabla Tr$$

Dalle (c)

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(rc - \vec{e} \cdot \vec{v})^2} [\vec{v} + (c^2 - v^2 + \vec{e} \cdot \vec{e}) \nabla Tr]$$

Mi rimane da calcolare  $\nabla Tr$ , prendo a questo scopo la divergenza dell'eq. che definisce  $Tr$   
 $r = c(T - Tr) \rightarrow \nabla r = -c \nabla Tr$ , essendo

$$-c \nabla Tr = \nabla r = \nabla \sqrt{rc - \vec{e} \cdot \vec{v}} = \frac{1}{2\sqrt{rc - \vec{e} \cdot \vec{v}}} \nabla(rc - \vec{e} \cdot \vec{v})$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} [(\vec{e} \cdot \nabla) \vec{e} + \vec{e} \times (\nabla \times \vec{e})]$$

So peró che  $(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} = \vec{E} - \nabla(\vec{E} \cdot \nabla r)$  cfr (ii)

Mentre  $\nabla \times \vec{E} = (\nabla \times \nabla r)$  cfr (iv)

Otengo 
$$-\nabla \nabla r = \frac{1}{c} \left[ \vec{E} - \nabla(\vec{E} \cdot \nabla r) + \vec{E} \times (\nabla \times \nabla r) \right]$$

$$= \frac{1}{c} \left[ \vec{E} - \nabla(\vec{E} \cdot \nabla r) + \nabla(\vec{E} \cdot \nabla r) - \nabla r (\nabla \cdot \vec{E}) \right]$$

$$= \frac{1}{c} \left( \vec{E} - (\nabla \cdot \vec{E}) \nabla r \right)$$

$\Rightarrow \nabla r = \frac{-\vec{E}}{c - \nabla \cdot \vec{E}}$  Dalla (c) ottengo infine

$$\nabla \nabla = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_c}{(c - \nabla \cdot \vec{E})^3} \left[ (c - \nabla \cdot \vec{E}) \nabla - (c^2 - v^2) \nabla \cdot \vec{a} \right] \vec{E}$$

Analog.

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_c}{(c - \nabla \cdot \vec{E})^3} \left[ (c - \nabla \cdot \vec{E}) (-\vec{v} + c\vec{a}) + \frac{c}{c} (c^2 - v^2) \nabla \cdot \vec{a} \right] \vec{E}$$

Introduco  $\vec{U} := c\vec{E} - \vec{v}$  e ottengo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-c}{(\vec{E} \cdot \vec{U})^3} \left[ c\vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{v} - (c^2 - v^2)\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{a})\vec{E} \right.$$

$$\left. - c\vec{v} + c^2\vec{a} + (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{v} - \frac{c}{c} (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{a} \right.$$

$$\left. + \frac{c}{c} (c^2 - v^2)\vec{v} + \frac{c}{c} (\vec{E} \cdot \vec{a})\vec{v} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{(\vec{E} \cdot \vec{U})^3} \left[ (c^2 - v^2)\vec{U} + c\vec{r}(\vec{E} \cdot \vec{a}) - c\vec{r}\vec{a} \right.$$

$$\left. + (\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{a} - (\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{v} \right]$$

$$\cdot \left[ (c^2 - v^2)\vec{U} + (\vec{E} \cdot \vec{a})\vec{U} - \vec{a}(\vec{U} \cdot \vec{r}) \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{(\vec{E} \cdot \vec{U})^3} \left[ (c^2 - v^2)\vec{U} + \vec{E} \times (\vec{U} \times \vec{a}) \right]$$

Infine

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \nabla \times (\nabla \vec{v}) = \frac{1}{c^2} \left[ \nabla(\nabla \times \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \vec{v}) \right]$$

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{U} \cdot \vec{r})^3} \vec{E} \times \left[ (c^2 - v^2)\vec{v} + (\vec{E} \cdot \vec{a})\vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{U})\vec{a} \right]$$

Il termine in parentesi è simile a quello per l'espressione di  $\vec{E}$ , se non per il fatto che c'è  $\vec{v}$  e non  $\vec{U}$ . Ma poiché l'ultima è in prodotto vettoriale con  $\vec{E}$  posso impunemente scambiare  $-\vec{U}$  con  $\vec{v}$ .

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{e} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Il campo  $\vec{B}$  è sempre  $\perp$  al campo elettrico e al vettore dal punto a l'orbita!

Considero  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . Il primo termine va come  $1/r^2$  e non dipende da  $\vec{a}$  → velocity field (GENERALIZED COULOMB LAW). Il secondo termine va come  $1/r$ , domina a grandi distanze e dipende da  $\vec{a}$  (RADIATION FIELD).

Posso ora scrivere la Forza di Lorentz nei termini più generali:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{(\vec{E} \cdot \vec{U})^3} \left\{ \left[ (c^2 - v^2)\vec{U} + \vec{r} \times (\vec{U} \times \vec{a}) \right] + \frac{\vec{v}}{c} \times \left[ \vec{r} \times \left[ (c^2 - v^2)\vec{U} + \vec{E} \times (\vec{U} \times \vec{a}) \right] \right] \right\}$$

$\vec{v}$  veloc. di  $Q$ ;  $\vec{E}, \vec{U}, \vec{v}, \vec{a}$  velocità al tempo ritardato. //

# IV RADIAZIONE

Quando le cariche accelerano, la loro energia può essere irreversibilmente trasportata verso  $\infty$ . Tale processo prende il nome di RADIAZIONE.

Immagino una sfera di raggio  $r$ . La potenza che attraversa la superficie è data da

$$P(r, t) = \oint \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$$
 poiché un'informazione viaggia alla velocità della luce, l'energia in realtà

ha lasciato la sorgente al tempo  $t_0 = t - r/c$  dunque  $P_{\text{rec}}(t_0) = \frac{c}{r} P(r, t_0 + r/c)$  ← energia per unità di tempo radiata.

Affinché l'integrale converga e un valore non nullo deve risultare che  $\vec{S}$  vada come  $1/r^2$  (essendo l'area della sfera  $4\pi r^2$ ). In elettrostatica - magnetostatica sia  $\vec{E}$  che  $\vec{B}$  vanno come  $1/r^2$  dunque  $\vec{S} \sim 1/r^4$  OVVERO no radiazione per campi statici!

In elettrodinamica l'ultima le espressioni di campi di Jefimenko contengono termini che vanno come  $1/r$  e che dunque producono l'andamento richiesto affinché ci sia radiazione.

IDEA GENERALE. Considero  $\vec{E}, \vec{B}$ , costruisco il termine di  $\vec{S}$  che va come  $1/r^2$ , integro su una superficie sferica, considero il limite per  $r \rightarrow \infty$ .

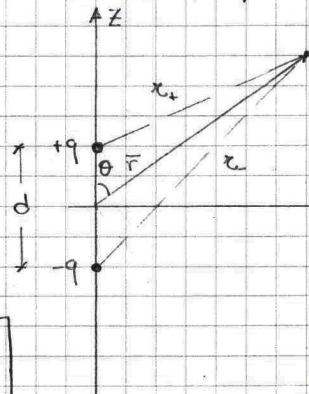
## 1. ELECTRIC DIPOLE RADIATION (D)

\* Suppongo un dipolo oscillante con frequenze angolare  $\omega$   
 $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{z}$$

Il potenziale ritardato è

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_0 \cos[\omega(t - r/c)]}{r_+} + \frac{-q_0 \cos[\omega(t - r/c)]}{r_-} \right]$$



Per il Teorema di Carnot  $r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp r d \cos \theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

Sto peró cercando di costruire un dipolo perfetto da una fissura, è ragionevole pensare la seguente approssimazione

APPROX. 1.  $d \ll r$   $r_{\pm} = r \sqrt{1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2}$   
 $\approx r \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mp d \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2}}{1} \right) \approx r \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$

Uso poi  $1 \sim 1-x$  ( $x \ll 1$ )  
 $1+x$

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

Considero poi il fattore  $\cos[\omega(t - r_{\pm}/c)] \approx \cos[\omega(t - r/c) \pm \frac{\omega d \cos \theta}{2c}]$

$$= \cos[\omega(t - r/c)] \cos\left(\frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right) + \frac{1}{2} \sin[\omega(t - r/c)] \sin\left(\frac{\omega d \cos \theta}{2c}\right)$$

Se il dipolo è perfetto

APPROX. 2.  $d \ll c$   
 $\approx \cos[\omega(t - r/c)] + \frac{\omega d \cos \theta}{2c} \sin[\omega(t - r/c)]$

$d \ll \lambda$

Otengo

$$V(r, \theta, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right) \left( \frac{\cos(\omega(t-r))}{c} - \frac{\omega d \cos \theta \sin(\omega(t-r))}{2c} \right) - \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{d \cos \theta}{2r} \right) \left( \frac{\cos(\omega(t-r))}{c} + \frac{\omega d \cos \theta \sin(\omega(t-r))}{2c} \right) \right]$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{d \cos \theta}{c} \cos(\omega(t-r)) - \frac{\omega d \cos \theta}{c} \sin(\omega(t-r)) \right)$$

$$= \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left( -\frac{\omega}{c} \sin(\omega(t-r)) + \frac{1}{r} \cos(\omega(t-r)) \right)$$

Mi interessa il comportamento a grandi distanze, per questo dunque

APPROX. 3  $r \gg \frac{c}{\omega}$

Otengo il caso statico per  $\omega \rightarrow 0$   
 $V = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$r \gg \lambda$

$$\rightarrow V(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

La corrente  $I(t)$  determina il potenziale vettore

$$I(t) = dq \hat{z} = q_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$da cui \vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{-q_0 \omega \sin[\omega(t-r/c)] \hat{z}}{r} dz$$

$r \sim r$  al primo ordine!  $\rightarrow \vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega \sin[\omega(t-r/c)]}{4\pi r} \hat{z}$

Ottenuti i potenziali, non ha che da calcolare

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$= -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \hat{r} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \sin[\omega(t-r/c)] - \frac{\cos \theta \omega}{r c} \cos[\omega(t-r/c)] \right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \left( -\frac{\sin \theta}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \right) \right]$$

drop out the  $\pi$  order terms

$$\approx + \frac{p_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \hat{r}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \cos[\omega(t-r/c)]}{4\pi r} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

Dallo relazione

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ ottengo}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\theta}$$

Per vedere il campo  $\vec{B}$  cerco il rotore di  $\vec{A}$

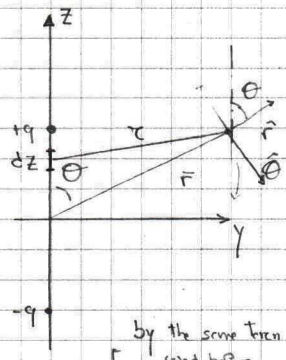
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \left[ \frac{\omega \sin \theta}{c} \cos[\omega(t-r/c)] + \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin[\omega(t-r/c)] \right] \hat{\phi}$$

Otengo

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 q_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\phi}$$

Ho ottenuto campi  $\vec{E}, \vec{B}$  in fase,  $\perp$ , con moduli uguali da  $E_0/B_0 = c$ . Sono molto chiari e sfavillanti, ma a grandi distanze simili a onde plane.



L'energia radiata è determinata dal vettore di Poynting

$$\vec{S}(r, t) = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{\mu_0}{c} \left( \frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \right)^2 \hat{r}$$

da cui:

$$\langle S \rangle = \left( \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

no radiazioni lungo l'asse di dipolo!

La potenza radiata è infine

$$\langle P \rangle = \int \langle S \rangle d\vec{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

## 2. POINT CHARGES (B)

Il campo irradiato da una carica puntiforme  $q$  è

$$\vec{E}(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(r-\vec{r} \cdot \vec{u})^3} [(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})]$$

$$\vec{B}(r, t) = \frac{1}{c} \vec{r} \times \vec{E}(r, t) \quad (\vec{u} = c\hat{r} - \vec{v})$$

Il vettore di Poynting è

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times (\vec{r} \times \vec{E}))$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[ E^2 \hat{r} - (\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right]$$

Non tutto il flusso di energia però è radiazione. Per calcolare solo quest'ultimo contributo al tempo  $T_r$  considero una sfera di raggio  $r$  centrata nella posizione delle cariche al tempo  $t$  (l'energia raggiunge la sfera) nell'angolo  $\theta$  (l'energia raggiunge la sfera) nell'angolo  $\theta$  (l'energia raggiunge la sfera). L'area è proporzionale a  $r^2$  dunque nell'integrazione contributi del tipo  $\sim 1/r^3 \sim 1/r^4$  a superficie danno 0. Per tale motivo solo la parte di "campo di accelerazione" di  $\vec{E}$  è da considerare da cui il nome CAMPO DI RADIAZIONE.

$$\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(r-\vec{r} \cdot \vec{u})^3} [\vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})]$$

$\vec{E}_{rad} \perp \hat{r}$  dunque

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{rad}^2 \hat{r}$$

Se la carica è istantaneamente ferma a  $T = T_r$

$$\vec{u} = c\hat{r} \text{ e } \vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{a})) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} ((\hat{r} \cdot \vec{a}) \hat{r} - \vec{a})$$

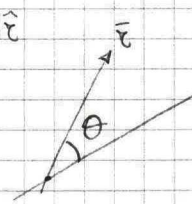
$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \right)^2 (a^2 - (\hat{r} \cdot \vec{a})^2) \hat{r}$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left( \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{r}$$

È dond! No energia irradiata nella direzione dell'accelerazione istantanea.

$$P = \oint \vec{S} d\vec{a} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \quad \text{LARMOR FORMULA}$$



La Larmor formula, sebbene derivata per  $v \ll c$ , è una buona approssimazione per  $v \ll c$ . Altrimenti l'approccio di utilizzazione è relativistico.  $v \ll c$  in questo contesto non è altro che un'ipotesi sotto il sistema di riferimento. Tramite trasformazioni relativistiche si può dunque dedurre dalle formule di Larmor l'espressione generalizzata. In questo caso non solo l'espressione di  $\vec{E}_{rad}$  è diversa, ma bisogna anche considerare che la quantità d'energia nel tempo che attraversa la sfera (il teso) non è la stessa che ha esercitato la particella!

Si ricorre

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

### 3. RADIATION REACTION (A)

Una carica accelerata irradia. La radiazione comporta una dissipazione di energia a sua volta in ultima analisi dell'energia cinetica. L'effetto è quello di una forza in direzione opposta al moto  $\rightarrow$  RADIATION REACTION force! Per  $v \ll c$  l'energia irradiata dalla Larmor formula è

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}. \text{ Qual è il teso e con la particella perde energia? A rigore la posizione}$$

$\vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$  è SBAFFATA! Ho trascurato infatti nel derivare le formule di Larmor i tempi di ritardo, che tuttavia scambiano energia con la carica; non posso dunque in generale trascurarli, se non l'energia totale che esce la carica in un istante dt.

D'altra parte, se considero un moto periodico, in cui energia e velocità tornano ai valori iniziali agli estremi e la perdita d'energia è dovuta solo all'effetto radiativo. La posizione di cui sopra è vera in MEDIA.

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{T_1}^{T_2} a^2 dt \quad (\text{a}) \quad \text{poiché che la data del sistema s.e. è uguale in } T_1, T_2.$$

Se il moto non è periodico la condizione richiesta in principio è che siano uguali  $v, a$  e tutte le derivate superiori in  $T_1, T_2$ . In pratica basta che la carica sia  $v, a$  data che il campo di velocità sia 0 molto rapidamente.

Integro per parti (a)

$$\int_{T_1}^{T_2} a^2 dt = \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dt = \left( \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \Big|_{T_1}^{T_2} - \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

Dunque

$$\int_{T_1}^{T_2} \left( \vec{F}_{rad} - \frac{\mu_0 q^2 \dot{\vec{v}}}{6\pi c} \right) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (*)$$

La prec. espressione è sicuramente verificata se

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{\vec{v}}}{6\pi c}$$

ABRAHAM-LORENTZ FORMULA

Il ragionamento fatto NON prova la formula poiché, innanzitutto perché (\*) non dice nulla sulle componenti di  $\vec{F}_{rad} \perp \vec{v}$ , poi perché ricavate sotto condizioni molto particolari.

Nota. Perplexità.

Suppongo non ci siano forze esterne

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{\vec{v}}}{6\pi c} = m\dot{\vec{a}} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c m}$$

ovvero l'accelerazione cresce esponenzialmente col tempo! Se invece si applica una forza esterna la particella si muove prima che la forza agisca!

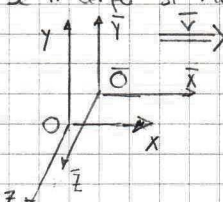
## V ELETRODINAMICA E RELATIVITÀ

### 1. INTRODUZIONE

#### 1.1 MAXWELL E GALILEO

Molte delle eq. dell'elettrodinamica fanno riferimento esplicito a LA velocità della particella. Sembra che quindi che esse presuppongano l'esistenza di sistema di riferimento (solo) assoluto, oppure ci sono nelle teorie svariati indizi di simmetria (vd legge di Faraday!). But, unit e minuto. In realtà le eq. di Maxwell NON sono compatibili con la relatività di Galileo!

\* Secondo Galileo, se il corpo si muove lungo x

$$\begin{cases} \bar{x} = x - vt \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \\ \bar{t} = t \end{cases}$$


Considero ora

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (S) \quad \text{Qual è la forma in } \bar{S}?$$

Verifico

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \bar{t}} - v \frac{\partial E}{\partial \bar{x}}$$

E ancora

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{t}^2} - 2v \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} + v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{x}^2}$$

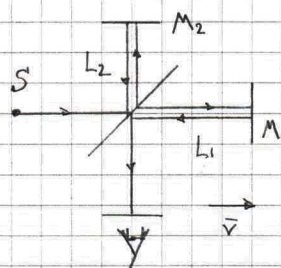
$$\Rightarrow \left[ (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} \right] E(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \quad (S')$$

dunque la relatività di Galileo NON preserva le eq. di Maxwell!

#### 1.2 INTERI: BISLAGGA. IL VENTO D'ETERE

Etere ipotetico mezzo in cui sarebbe immersa la Terra che costituisce il supporto delle orb. e.m.  $\rightarrow$  responsabile delle incongruenze fra relatività classica e teoria e.m. Ma esiste?

MICHELSON-MORLEY experiment



Suppongo il set up sperimentale in figura. Suppongo tutto il sistema si muova nell'etere con velocità  $\vec{v} \parallel L_1$ . Comparo i tempi impiegati dalle luce a percorrere i due bracci supponendo la relatività di Galileo.

$$T_1 = L_1 \left( \frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right)$$

$$T_2 = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

hence  $\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2}{c} \left( \frac{L_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$

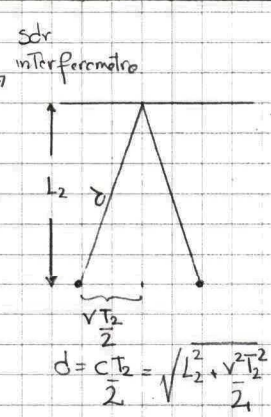
→ c'è interferenza!  
Se ora ruota l'interferometro di  $\pi/2$

$$(\Delta T)_{\pi/2} = \frac{2}{c} \left( \frac{L_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\Delta(\Delta T) = \frac{2}{c} \left( \frac{L_1+L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_1+L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\approx \frac{2}{c} (L_1+L_2) \left( \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \right)$$

$$= \frac{2}{c} (L_1+L_2) \frac{v^2}{2c^2}$$



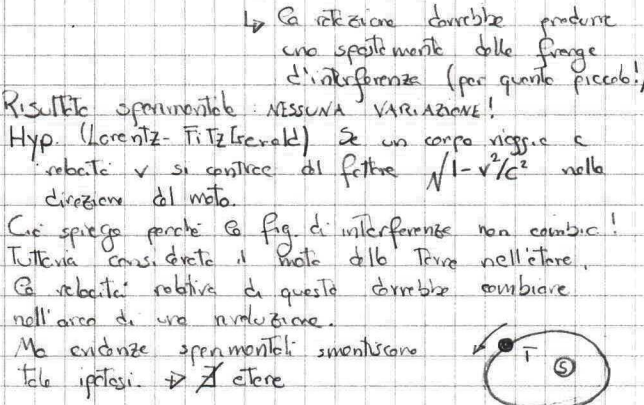
→ la rotazione dovrebbe produrre una spostamento delle frange d'interferenza (per quanto piccoli!)

Risultato sperimentale: **NESSUNA VARIAZIONE!**

Hyp. (Lorentz-FitzGerald) Se un corpo rigido e solido  $v$  si contrae di fattore  $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$  nella direzione del moto.

Ciò spiega perché la fig. di interferenza non cambia! Tuttavia considero il moto della Terra nell'etere. La contrazione relativa di questo dovrebbe cambiare nell'arco di una rivoluzione.

Ma evidenze sperimentali smentiscono tale ipotesi. → ~~Et~~ etere



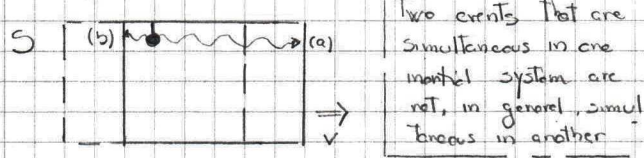
OLTRE Michelson. Altre evidenze sperimentali:  
 > osservazione luce stellare  
 > trascinamento forzato nei dielettrici in movimento

### 1.3 PRINCIPIA. (A)

- EINSTEIN pone i seguenti due postulati
1. THE PRINCIPLE OF RELATIVITY. The laws of physics apply in all inertial reference systems
  2. UNIVERSAL SPEED OF LIGHT. The speed of light in vacuum is the same for all inertial observers, regardless of the motion of the source.

La relatività definisce la struttura dello spazio-tempo. Descrive ora 3 Gedanken experiments.

#### 0I. Relativity of simultaneity.



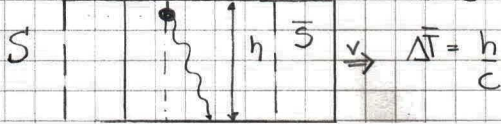
In  $S$  gli eventi (a) e (b) avvengono in tempi diversi perché nel moto che la luce raggiunge l'intero sistema si muove con  $v$ .

In  $\bar{S}$  tuttavia (a) e (b) sono simultanei!

#### 0II. Time dilation

Considero un raggio di luce verso il basso. Quanto tempo impiega a raggiungere il suolo?

In  $\bar{S}$



In  $S$

$$\Delta T = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta T)^2}}{c}$$

da cui  $\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Delta T$

$\Delta T^2 c^2 = h^2 + v^2 \Delta T^2$

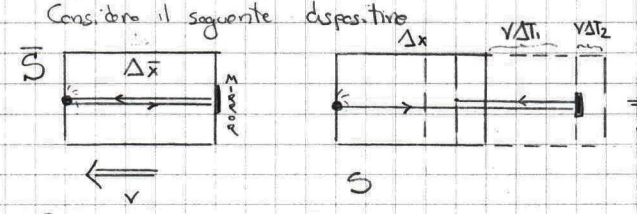
$$\Delta T = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

**TIME DILATION**

Posso definire  $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

**LORENTZ FACTOR** ( $\gamma > 1$ )

#### 0III. LORENTZ CONTRACTION



Quanto tempo impiega la luce ad andare e tornare indietro?

In  $\bar{S}$   $\Delta T = \frac{2\Delta \bar{x}}{c}$

In  $S$   $\Delta T_1 = \frac{\Delta x + v\Delta T_1}{c} \rightarrow \Delta T_1 = \frac{\Delta x}{c-v}$

$\Delta T_2 = \frac{\Delta x - v\Delta T_2}{c} \rightarrow \Delta T_2 = \frac{\Delta x}{c+v}$

$$\Delta T = \Delta x \left( \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = 2\Delta x \frac{1}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Se però che  $\Delta T = \frac{1}{\gamma} \Delta T$  dunque

$$\frac{2}{c} \Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{2\Delta x}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Delta x$$

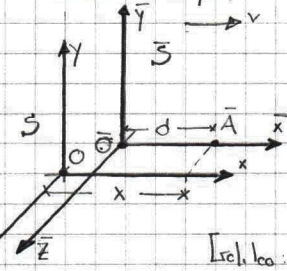
**LORENTZ CONTRACTION**

$$(\Delta \bar{x} = \gamma \Delta x)$$

Nota. Le dimensioni  $\perp$  al moto  $N_{\text{ov}}$  sono modificate.

#### 1.1 LORENTZ TRANSFORMATIONS (A)

EVENT := something that takes place at a specific location  $(x, y, z)$  at a precise time  $(t)$ .



Al tempo  $t=0$   $O \equiv \bar{O}$ .  
 al tempo  $t$   $\bar{O}$  è a distanza  $v$  da  $O$   
 $\rightarrow x = d + vt$   
 $d =$  distanza  $\bar{O}-\bar{A}$  in  $S$   
 $\bar{x} =$  distanza  $\bar{O}-\bar{A}$  in  $\bar{S}$

Rel. loc:  $\bar{x} = d \Rightarrow \bar{x} = x - vt$   $\times$   
 Einstein  $\bar{x} = \gamma d \rightarrow \bar{x} = \gamma(x - vt)$   $\checkmark$

Il discorso può essere unicamente fatto dal punto di vista di  $\bar{S}$ ! Dunque le 2 relazioni:

$$\begin{cases} \bar{x} = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \end{cases} \rightarrow \gamma(x - vt) = \frac{x}{\gamma} - v\bar{t}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{x}{v} - \gamma(x - vt) \right)$$

$$= \gamma \left( \frac{x}{v^2} - \frac{x + vt}{v} \right)$$

$$= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Analog.

$$t = \gamma \left( \bar{t} + \frac{v}{c^2} \bar{x} \right)$$

Posso dunque completare il relativistic dictionary

$$\begin{cases} \bar{x} = \gamma(x - vt) \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \\ \bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \\ y = \bar{y} \\ z = \bar{z} \\ t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right) \end{cases}$$

LORENTZ TRANSFORMATIONS

## 2. THE STRUCTURE OF SPACETIME

### 2.1 QUADRIVETTORI, $\Lambda^\mu_\nu$ (A)

Definisco le quantità  $x^0 := ct$ ,  $\beta := \frac{v}{c}$

Le transf. di Lorentz diventano

$$\begin{cases} \bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ \bar{x}^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ \bar{x}^2 = x^2 \\ \bar{x}^3 = x^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

In forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

In forma compatta  $\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) x^\nu$  (\*)

$\Lambda^\mu_\nu$  = LORENTZ TRANSFORMATION MATRIX

La form. (\*) in realtà può descrivere una qualunque trasformazione dello spazio-tempo. Quest'ultima dunque è univocamente definita dalla matrice che le è associata. Un QUADRIVETTORE è un set di 4 componenti che trasformano come  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  sotto trasformazioni di Lorentz.

È definito un prodotto SCALARE quadridimensionale con l'accoppiamento delle componenti 0 ha segno meno!

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$a^\mu \cdot b^\mu = -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Per tener conto del segno meno introduco il vettore COVARIANTE  $a_\mu := (-a^0, a^1, a^2, a^3)$  che def.

Perisce dal vettore CONTRAVARIANTE  $a^\mu$  seb per  $\otimes$  compatte 0. Ottingo

$$a_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\nu, \quad g_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MINKOWSKI METRIC.

Il prodotto scalare si scrive allora come  $\sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu$

$a^\mu b_\mu$  ! Summation is implied whenever a greek index is repeated in a product → EINSTEIN SUMMATION CONVENTION.

### 2.2 GEOMETRIA DELLE TRASFORMAZIONI (A)

o Grazie alla forma di una trasformazione di Lorentz per un boost lungo un asse generico.

Sia  $\vec{v}$  la velocità. Sia  $\vec{r}$  il vettore rettile risp.  $S$  ed  $\vec{r}'$  il vettore rettile risp.  $S'$ . Scompongo i vettori lungo le direzioni  $\parallel$  e  $\perp$  a  $\vec{v}$ .

$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$       $\vec{r}' = \vec{r}'_\parallel + \vec{r}'_\perp$

Le Trasformazioni sono

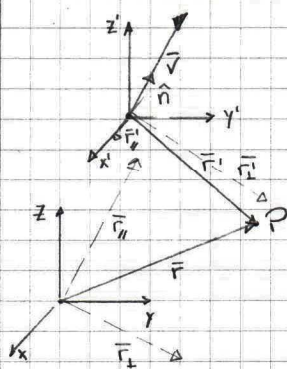
$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{r}_\parallel \cdot \vec{v}}{c^2}\right) \\ \vec{r}'_\parallel = \gamma(\vec{r}_\parallel - \vec{v}t) \\ \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \end{cases}$$

Introduco  $\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$

$\vec{r}_\parallel = (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}$ ,  $\vec{r}_\perp = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}$

Ottingo la trasformazione

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{v \hat{n} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \\ \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \gamma t v \hat{n} \end{cases}$$



Le transf. inverse

$$\begin{cases} t = \gamma\left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \hat{n} v}{c^2}\right) \\ \vec{r} = \vec{r}' + (\gamma - 1)(\vec{r}' \cdot \hat{n}) \hat{n} + \gamma t' v \hat{n} \end{cases}$$

Boost ALONG A GENERIC AXIS

o Introduco una parametrizzazione definita da  $\zeta := \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)$  RAPIDITÀ

La matrice di boost lungo l'asse x prende in questa modo la forma di una rotazione dello spazio-tempo! Infatti:

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \zeta}} = \cosh \zeta$

$\gamma\beta = \sinh \zeta$

$\beta = \tanh \zeta$

di cui

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.3 INTERVALLO INVARIANTE - SPACETIME DIAGRAMS (A)

o Considero il prodotto scalare di un quadri-vettore con se stesso  $a^\mu a_\mu = -(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$

If  $\begin{cases} a^\mu a_\mu > 0 & a^\mu \text{ is SPACELIKE} \\ a^\mu a_\mu < 0 & a^\mu \text{ is TIMELIKE} \\ a^\mu a_\mu = 0 & a^\mu \text{ is LIGHT LIKE} \end{cases}$

Suppongo due eventi A, B

$\Delta x^\mu = x^\mu_B - x^\mu_A$  è il DISPLACEMENT 4-VECTOR

Definisco allora l'INTERVALLO INVARIANTE

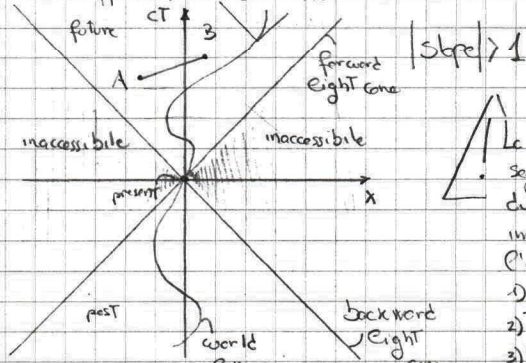
$I := (\Delta x)^\mu (\Delta x)_\mu = -c^2 T^2 + d^2$  quantità invariante per trasformazioni di Lorentz!

Se  $I < 0$  (timelike)  $\exists$  sdr inerziale in cui i due eventi avvengono nello stesso punto (d=c)

Se  $I > 0$  (spacelike)  $\exists$  sdr inerziale in cui i due eventi avvengono nello stesso istante ( $\vec{r} = \vec{r}'$ )

Se  $I = 0$ , due eventi possono essere connessi da un segnale.

o Per rappresentare un evento si usano i MINKOWSKI DIAGRAM



Le pendenze di seguito che collegano due eventi che immediatamente se  $I$  l'intervallo fra loro è   
 1) Spacelike, slope < 1   
 2) Timelike, slope > 1   
 3) lightlike, slope = 1



Sotto Trasformazioni di Lorentz la quantità preservata è

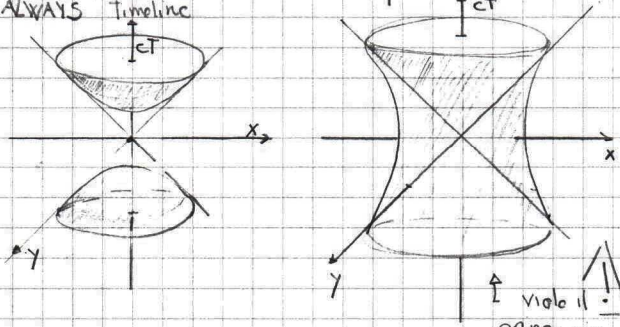
$$I = (c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2) = c^2 T^2$$

ciò definisce una struttura IPERBOLICA per lo spazio-tempo. Se mi limito a considerare x, y posso rappresentarli come il cono di luce, ovvero un'iperbolica a due fogli (I Timeline) o a una falda (I spaziali).

Una trasf. di Lorentz è uno spostamento sulla 'stessa' iperbolica (I=cost).

Se l'intervallo è dunque timeline l'ordinamento temporale degli eventi è assoluto! Se invece è spaziale l'ordine dipende dal sdr.

Deduco che  
! The displacement between causally related events is ALWAYS timeline



### 3 RELATIVISTIC MECHANICS (B)

Corca una generalizzazione della cinematica - dinamica. Sia U la velocità di un oggetto. Il tempo  $\tau$  che l'oggetto registra nel suo sdr è detto PROPER TIME.

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - U^2} dt$$

Proper time is invariant whereas "ordinary" time depends on the particular reference frame

La definizione di velocità resta

$$\vec{U} = \frac{d\vec{e}}{dt} \quad d\vec{e} \text{ e } dt \text{ risp. } S$$

Posso ora introdurre una quantità ibrida, detta PROPER VELOCITY

$$\vec{\eta} = \frac{d\vec{e}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-U^2/c^2}} \vec{U}$$

Il rimbombamento di queste velocità è che trasformano in modo semplice sotto trasf. di Lorentz

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{whose zeroth component is } \eta^0 = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$$

Considero ad esempio il boost lungo l'asse x.

$$\begin{cases} \eta^0 = \gamma(\eta^0 - \beta \eta^1) \\ \eta^1 = \gamma(\eta^1 - \beta \eta^0) \\ \eta^2 = \eta^2 \\ \eta^3 = \eta^3 \end{cases} \quad (\text{qui } \Rightarrow S)$$

$$\vec{\eta}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \eta^\nu$$

con  $\eta^\mu$  PROPER VELOCITY 4-VECTOR

Le velocità ordinarie invece trasformano secondo

$$\begin{cases} \bar{U}_x = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{U_x - v}{1 - vU_x/c^2} \\ \bar{U}_y = \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{U_y}{\gamma(1 - vU_x/c^2)} \\ \bar{U}_z = \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{U_z}{\gamma(1 - vU_x/c^2)} \end{cases}$$

EINSTEIN VELOCITY ADDITION RULES

Qui dove trasformare sia numeratore che denominatore!

\*Dim. Considero  $\bar{U}_x$

$$\bar{U}_x = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - v dx/c^2)} = \frac{U_x - v}{1 - vU_x/c^2}$$

Analog. per le altre.

Nota. Considero  $U = \bar{U} + v$  dividendo tutto per  $1 + v\bar{U}/c^2$

$$\beta_{\bar{U}} = \frac{\beta_{\bar{U}} + \beta}{1 + \beta\beta_{\bar{U}}} \Leftrightarrow \tan \zeta_{\bar{U}} = \frac{\tan \zeta_{\bar{U}} + \tan \zeta}{1 + \tan \zeta_{\bar{U}} \tan \zeta} = \tan(\zeta_{\bar{U}} + \zeta)$$

Così

$$\zeta_{\bar{U}} = \zeta_{\bar{U}} + \zeta$$

le velocità sono additive nella cinematica di Einstein!

Posso ora definire il RELATIVISTIC MOMENTUM

$$\vec{p} := m \vec{\eta} = \frac{m \vec{U}}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$$

Il momento relativistico è la parte spaziale del quadrivettore

$$p^\mu = m \eta^\mu \quad \text{whose zeroth component is } p^0 = m \eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$$

Einstein pare

$$E := \frac{mc^2}{\sqrt{1-U^2/c^2}}$$

RELATIVISTIC ENERGY  $p^\mu$  è detto ENERGY-MOMENTUM 4-VECTOR

Nota subito che anche quando l'oggetto è fermo, esiste un'energia a riposo

$$E_{\text{rest}} = mc^2$$

La restante parte è allora attribuibile all'ENERGIA CINETICA

$$E_{\text{kin}} = mc^2(\gamma - 1)$$

Nota. E' costante! Per  $U \ll c$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m U^2 + \frac{3}{8} \frac{m U^4}{c^2} + \dots$$

Spontaneamente si osserva che

In every closed system the total relativistic energy and momentum are conserved.

Controllo

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + (\vec{p} \cdot \vec{p}) = -m^2 c^2$$

come si verifica immediatamente vale inoltre la seguente relazione

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

DICTIONARY  
• INVARIANTE: non dipende dal sdr  
• CONSERVATO: stesso valore prima e dopo il processo in esame

$$\begin{aligned} * \text{Dim. } E^2 - p^2 c^2 &= \frac{m^2 c^4}{1 - U^2/c^2} - \frac{m^2 U^2 c^2}{1 - U^2/c^2} \\ &= m^2 c^2 \left( \frac{c^2 - U^2}{1 - U^2/c^2} \right) = m^2 c^4 \end{aligned}$$

La seconda legge di Newton conserva in relatività il suo significato, e potrà di usare il momento relativistico.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Il lavoro  $W := \int \vec{F} \cdot d\vec{e}$  permette di scrivere

WORK-ENERGY THEOREM, che continua a valere in ambito relativistico

$$W = E_{\text{final}} - E_{\text{initial}}$$

$$\begin{aligned} * \text{Dim. } W &= \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{e} \\ &= \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{U} dt \end{aligned}$$

Considero l'integranda

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \vec{u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \vec{u}$$

$$= \frac{m d\vec{u}/dt \sqrt{1-u^2/c^2} - m\vec{u} (1-u^2/c^2)^{-3/2} u du/dt}{(1-u^2/c^2)^2} \vec{u}$$

$$= \left( \frac{m d\vec{u}}{dt} \frac{1-u^2}{c^2} + \frac{m u \vec{u} du}{c^2 dt} \right) \frac{\vec{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{m\vec{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \frac{dE}{dt}$$

Ottengo allora  $W = \int \frac{dE}{dt} dt = E_{\text{fin}} - E_{\text{in}} //$

Ha la seguente importante osservazione: per la relatività della simultaneità, la Terza Legge di Newton in generale NON vale in ambito di relatività.

$\vec{F}$  è densità del momento risp. il Tempo ordinario, eredita il comportamento di  $\vec{v}$ ! Nello specifico

$$\vec{F}_y = \frac{d\vec{p}_y}{dt} = \gamma \left( \frac{dp_y}{dt} - \beta \frac{dx}{c} \right) = \gamma \left( 1 - \beta \frac{v_x}{c} \right) F_y$$

$$\vec{F}_z = \frac{F_z}{\gamma \left( 1 - \beta \frac{v_x}{c} \right)}$$

$$\vec{t}_x = \frac{d\vec{p}_x}{dt} = \gamma \left( \frac{dp_x}{dt} - \beta \frac{dp^0}{c} \right) = \frac{F_x - \beta \left( \frac{dE}{dt} \right)}{1 - \beta \frac{v_x}{c}}$$

$$= \frac{\vec{t}_x - \beta (\vec{u} \cdot \vec{F})/c}{1 - \beta v_x/c}$$

Si può d'altro pertè evitare queste espressioni in alcuni casi introducendo la MINKOWSKI FORCE

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{dt}$$

Le componenti spaziali sono  $\vec{K} = \left( \frac{dt}{dt} \right) \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \vec{F}$

mentre la zeroth componente è  $K^0 = \frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \left( \frac{dE}{dt} \right)$  che rappresenta l'energia  $\gamma mc^2$  a parte, il tasso (proprio) con cui l'energia della particella varia, ovvero la potenza ricevuta dalla particella.

In relatività infine si definisce il CENTER-OF-ENERGY

$$\vec{R}_e = \frac{1}{E} \int E_i \vec{r}_i \rightarrow \vec{P} = \frac{E}{c^2} \frac{d\vec{R}_e}{dt}$$

dove  $\vec{P}$  include ogni forma di momento ed  $E$  ogni forma di energia //

## 4. RELATIVISTIC ELECTRODYNAMICS (c)

### 4.1 INTRODUZIONE

Dimostrerò con un esempio introduttivo come l'esistenza del magnetismo è necessaria, posta l'elettrostatica e la relatività

\* Suppongo un filo di cariche positive che si muovono verso dx con velocità  $v$ . Assumo di poter utilizzare le densità di carica  $\lambda$

Suppongo a questa suppongo una sequenza di cariche negative  $-\lambda$  che procedono verso  $-x$ . La corrente netta nel filo è dunque  $I = 2\lambda v$ . A distanza  $s$  da questi suppongo una carica  $q$ , moventesi verso dx con velocità  $u$ . In questo sdr  $q$  è a riposo e per la composizione delle velocità

$$v_{\pm} = \frac{v \mp u}{1 \mp \frac{vu}{c^2}} \quad (3)$$



Ma  $v > v_+$  dunque la contrazione di Lorentz per le cariche - è più grande che per quelle +

$$\lambda_+ = \gamma_+ \lambda_0$$

con  $\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\pm}^2}{c^2}}}$

$\lambda_0 =$  densità di carica della stringa + nel suo sdr a riposo (lunghezza propria). Dunque il filo, che in  $S$  è neutro, in  $S'$  non lo è! Cerco un'espressione più semplice per



$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (v \mp u)^2 (1 \mp \frac{vu}{c^2})^2}}$$

$$= \frac{c^2 \mp vu}{\sqrt{(c^2 \mp vu)^2 - c^2 (v \mp u)^2}}$$

$$= \frac{c^2 \mp vu}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}} = \gamma \frac{1 \mp vu/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

La densità lineare di carica in  $S'$  è dunque

$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0 (\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda_0 uv}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \neq 0$$

Se che una densità di carica  $\lambda_{\text{tot}}$  produce un campo elettrico

$$E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi \epsilon_0 s} \quad \text{dunque ho una forza su } q$$

$$\text{in } S', \text{ la forza } \vec{F} = q\vec{E} = -\frac{\lambda v}{\pi \epsilon_0 s c^2} \frac{qu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

così è questa forza? E soprattutto se esiste in  $S'$  dove esiste anche in  $S$ ! Ritrasfermo in  $\vec{F}$  (q forma in  $S$  e  $\vec{F}(u)$ )

$$\vec{F} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \vec{F} = -\frac{\lambda v}{\pi \epsilon_0 c^2} \frac{qu}{s} \left( \frac{1 - \frac{vu}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)$$

campo magnetico filo carico

$\rightarrow$  forza di Lorentz in  $S$  !!! //

### 4.2 HOW THE FIELDS TRANSFORM (D)

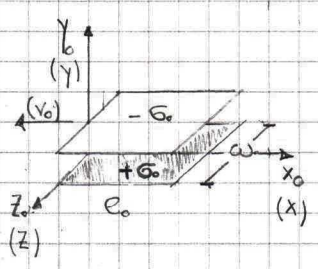
Ipotesi fondamentali del modello

- Hyp 1. La carica è invariante
- 2. Le regole di trasformazione sono le stesse indipendentemente da come i campi sono stati prodotti.

Très bien, iniziamo:

Considero il campo elettrico uniforme di un conduttore piano. Suppongo questo sia a riposo in  $S_0$  e sia dotato di una carica su superficie  $\sigma_0$ . Ho dunque

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}$$



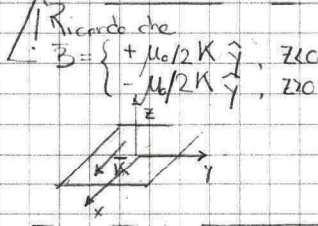
Suppongo ora un sistema S, che si muova con velocità  $v_0$  verso dx  
 Il campo ha ancora la forma  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}$   
 ma  $\sigma \neq \sigma_0$   
 La carica totale è invariante e la densità di carica è aumentata dello stesso fattore  
 $\sigma = \gamma_0 \sigma_0$   
 e infine  $\vec{E}' = \gamma_0 \vec{E}_0$

Il campo E è ancora  $\perp$  in S?  
 Sì, ma anche non  $\sigma$  fosse la sovrapposizione del campo di  $+\sigma$  e  $-\sigma$  darebbe un campo  $\perp$  in ogni caso!

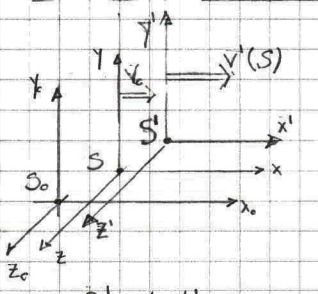
Tale trasformazione vale per le componenti che sono  $\perp$  al moto, se invece la pista era parallela al piano yz la contrazione riguarda d = distanza fra le piste. Ma E non dipende da d, dunque anche  $E'' = E_0$ .

I risultati appena ottenuti non sono  $\sigma$  e  $\gamma_0$  più generali, in S\_0 le cariche erano ferme e dunque non c'era campo magnetico.

Considero S di cui sopra. Oltre al campo elettrico  $E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  c'è un campo magnetico dovuto a  $\vec{v} \pm = \mp \sigma v_0 \hat{x} \Rightarrow B_z = -\mu_0 \sigma v_0$



Considero ora un terzo scd S' che viaggi con velocità v (risp. S) verso dx  
 I campi saranno  $E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$   $B'_z = -\mu_0 \sigma' v'$   
 $v'$  velocità di S' risp S\_0.



$v' = \frac{v + v_0}{1 + \frac{v v_0}{c^2}}$   $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$   
 $\sigma' = \gamma' \sigma_0$   
 Dare ora esprimere  $E', B'$  in funzione di  $E, B$ .

$$E'_y = \frac{\gamma'}{\gamma_0} \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_z = -\left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \mu_0 \sigma v'$$

Esprime il fattore

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{(v + v_0)^2}{c^2}}} \cdot \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v^2 v_0^2}{c^4} + \frac{2v v_0^2}{c^2} + \frac{v_0^2}{c^2}}} \cdot \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)$$

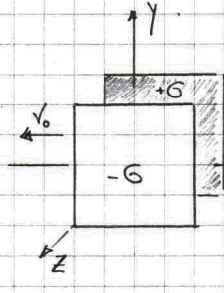
$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right)$$

$$\rightarrow E'_y = \gamma \left(1 + \frac{v v_0}{c^2}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma (E_y - v B_z)$$

$$B'_z = -\gamma \left(1 + \frac{v_0 v}{c^2}\right) \mu_0 \sigma \left(\frac{v_0}{c}\right) = \gamma (B_z - \frac{v}{c^2} E_y)$$

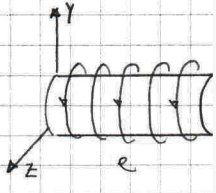
Per trovare  $E'_z, B'_y$  basta sottrarre allineare e stesso rispetto al piano xy  
 I campi in S sono allora  $E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, B_y = \mu_0 \sigma v_0$

da cui analogamente a quanto visto prec.  
 $E'_z = \gamma (E_z + v B_y)$   
 $B'_y = \gamma (B_y + \frac{v}{c^2} E_z)$



Se già che  $E'_x = E_x$  ma in questo caso non c'è campo magnetico dunque non posso dedurre  $B'_x$ .  
 Suppongo invece un solenoide allineato all'asse x e a riposo in S, il campo magnetico all'interno è  $B_x = \mu_0 n I$  (n > spire per unità di lunghezza)

In S' si scorre, dunque  $n' = \gamma n$   
 D'altra parte il tempo si dilata  $I' = \frac{1}{\gamma} I$   
 e i due fattori cancellano, ovvero  $B'_x = B_x$



Ho dunque ottenuto

$E'_x = E_x$	$E'_y = \gamma (E_y - v B_z)$	$E'_z = \gamma (E_z + v B_y)$
$B'_x = B_x$	$B'_y = \gamma (B_y + \frac{v}{c^2} E_z)$	$B'_z = \gamma (B_z - \frac{v}{c^2} E_y)$

### 4.3 THE FIELD TENSOR (3)

Cercare un formalismo che descriva le trasformazioni di  $\vec{E}, \vec{B}$  come prec. ricavato.  
 L'oggetto matematico che rappresenterebbe tali campi sarei un **ANTISYMMETRIC SECOND-RANK TENSOR**  
 Ricordando il significato della matrice  $\Lambda$  introdotta per definire un **SECOND-RANK TENSOR**, che trasformo secondo

$$(c) \quad \bar{T}^{MN} = \Lambda^M_\alpha \Lambda^N_\beta T^{\alpha\beta}$$

$$T^{MN} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

Se è simmetrica  $T^{MN} = T^{NM}$   
 Se, come nel caso in esame, è **ANTISIMMETRICO**  
 $T^{MN} = -T^{NM} \Leftrightarrow T^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ -T^{01} & 0 & T^{12} & T^{13} \\ -T^{02} & -T^{12} & 0 & T^{23} \\ -T^{03} & -T^{13} & -T^{23} & 0 \end{pmatrix}$   
 o 6 elementi sono indipendenti!

In accordo con la regola (c) cerco le trasformazioni per 6 componenti del tensore  $\Lambda$  sono quelle per il boost lungo x.

$$\bar{T}^{01} = \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta T^{\alpha\beta} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nota che può solo essere  $\lambda = 1, \sigma = 1, 0$

$$= \Lambda^0_0 \Lambda^1_0 T^{00} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 T^{10} + \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 T^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_1 T^{11}$$

$$= T^{01} (\gamma^2 - (\gamma\beta)^2) = T^{01}$$

Analog. si ricavano 6 momenti 5 componenti

$$\bar{T}^{01} = T^{01}, \quad \bar{T}^{02} = \gamma(T^{02} - \beta T^{12}), \quad \bar{T}^{03} = \gamma(T^{03} + \beta T^{13})$$

$$\bar{T}^{23} = T^{23}, \quad \bar{T}^{31} = \gamma(T^{31} + \beta T^{03}), \quad \bar{T}^{12} = \gamma(T^{12} - \beta T^{02})$$

Costruisco il TENSORE DI CAMPO  $F^{\mu\nu}$  per comparazione diretta

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ho costruite componenti di  $G$  prima riga delle trasformazioni di tempo con  $G$  prima delle trasformazioni del tempo e  $G$  seconde con  $G$  seconde. E' inoltre ugualmente possibile costruire un altro

Tensore detto TENSORE DUALE  $F^{\mu\nu}$  comparando le righe incrociate

Nota: Si può ottenere  $F^{\mu\nu}$  da  $F^{\mu\nu}$  per sostituzione  $E \rightarrow \vec{B}$   
 $\vec{B} \rightarrow -E/c$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

### 4.4 ELETTRODINAMICS IN TENSOR NOTATION (B)

Precisamente, restano come  $G$  sorgenti di campo  $f$ .  
 $\vec{J}$  trasformano solo che  $p = \rho$ ,  $\vec{J} = p\vec{u}$

meglio esprimere tali quantità in termini di densità proprie di carica nel sistema a riposo delle cariche  
 $p = \rho$  la trasformazione lungo  $x$  modifica una dimensione del fattore  $\gamma$   
 $\rho \rightarrow \gamma (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \rho_0$

$$p = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \vec{J} = \rho_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Riassumo definendo il CURRENT DENSITY 4-VECTOR

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$$

Posso ora prescrivere:  
o Eq. di continuità

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{Nota che } \nabla \cdot \vec{J} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J^i}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0}$$

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \text{EQ. DI CONTINUITA'}$$

o MAXWELL EQUATIONS

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

\*Dim.

$$\text{Considero } \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu$$

Ognuna delle eq. può rappresentare 4 diverse eq. v componenti  $\mu$

|| Sia  $\mu=0$

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3}$$

$$= \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\mu_0 J^0 = \mu_0 c \rho$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{I legge di Maxwell/}$$

||) Sia  $\mu=1$  nella prima eq

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^1 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ &= \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} \right)_x \\ \mu_0 J^1 &= \mu_0 J_x \end{aligned} \right.$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{IV legge di Maxwell/}$$

||) Considero  $G$  seconde eq. con  $\mu=0$

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{B} \quad \text{II legge di Maxwell}$$

||) Seconde eq. con  $\mu \neq 0$

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} + (\nabla \times \vec{E})_x = 0$$

Scemando i risultati per tutte le componenti ho

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{III legge di Maxwell //}$$

o Forza di Lorentz.

Scrivo invariante la FORZA di MINNOWSKI in termini di tensore,  $q$  velocità propria.

$$K^\mu = q \eta_\nu F^{\mu\nu}$$

Dimostro che da questo ottengo la forza di Lorentz  
\* Sia  $\mu=1$

$$K^1 = q \eta_\nu F^{1\nu} = q \left( -\eta^0 F^{10} + \eta^1 F^{11} + \eta^2 F^{12} + \eta^3 F^{13} \right)$$

$$= q \left[ -\frac{e}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (-E_x) + \frac{u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (B_x) + \frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (-B_z) + \frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (B_y) \right]$$

$$= \frac{q}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_x$$

raccolgendo analogo risultato anche da  $\mu=2,3$  ottengo

$$\vec{K} = \frac{q}{\sqrt{1-u^2/c^2}} [\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B})]$$

$$\text{ovvero } \vec{F} = q [\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B})] \quad \text{FORZA DI LORENTZ //}$$

### 4.5 RELATIVISTIC POTENTIALS

Introduco il 4-VECTOR POTENTIAL

$$A^\mu = \left( \frac{V}{c}, A_x, A_y, A_z \right)$$

TA. Le equazioni dei campi  
 $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  si scrivono in notazione

$$\text{Tensore come}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$$

\*Dim. Considero  $\mu=0, \nu=1$

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial x^0} - \frac{\partial A^0}{\partial x^1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} \equiv -E_x$$

raccolgendo anche per  $\nu=2,3$  ottengo

$$\vec{F} = \nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Considera invece  $\mu=1, \nu=2$

$$\mathbf{F}^2 = \partial x_1^2 - \partial x_2^2 = \partial x_1 \partial x_2 - \partial x_2 \partial x_1 = (\nabla \times \mathbf{A})_z = B_z$$

collecting  $F^{23}, F^{31}, \dots$

$$(\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B}$$

Le altre eq. a sono  
bordi o ridondanti!

Nel formalismo tensoriale l'eq. di Maxwell inhomogenea è dunque

$$\partial_{x_\mu} \left( \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \right) - \partial_{x_\nu} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \mu_0 J^\mu$$

In questa forma l'eq. è intrattabile. Tuttavia ho ancora da imporre un'opportuna GAUÛE. Infatti:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial x_\mu \lambda \quad \text{non cambia } F^{\mu\nu}$$

In particolare il GAUÛE di LORENTZ tensoriale è

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

e dunque

$$\square^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu, \quad \text{con } \square^2 := \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_{x_\nu} \partial x^\nu$$

MAXWELL  
EQUATIONS

(modo che sbobillo)

## APPENDIX. HELMHOLTZ THEOREM

### HELMHOLTZ DECOMPOSITION THEOREM

Se  $G$  divergenza  $D(\vec{F})$  e il rotore  $\vec{C}(\vec{F})$  di una funzione vettoriale  $\vec{F}(\vec{r})$  sono note, ed entrambe vanno a 0 più rapidamente di  $1/r^2$  per  $r \rightarrow \infty$  e se  $\vec{F}(\vec{r})$  va a 0 per  $r \rightarrow \infty$ , allora  $\vec{F}$  si decomponere unicamente come

$$\vec{F} = -\nabla U + \nabla \times \vec{W}$$

con

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}') d\tau'}{r}, \quad \vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}') d\tau'}{r}$$

\* Ho dunque  $\nabla \cdot \vec{F} = D, \quad \nabla \times \vec{F} = \vec{C}$

Se robe  $G$  decomposizione di cui sopra, con  $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , integrazioni su tutta  $G$  spazio, allora verifica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= -\nabla^2 U = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= \int D(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' = D(\vec{r}) \quad \text{OK} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{W}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \vec{W}) - \nabla^2 \vec{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Esemplio } -\nabla^2 \vec{W} &= -\frac{1}{4\pi} \int \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= \int \vec{C}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' = \vec{C}(\vec{r}) \end{aligned}$$

MEMENTO

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) &= -4\pi \delta^3(\vec{r}) \\ \nabla \left( \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right) &= \dots \end{aligned}$$

se riesce a dimostrare nelle ipotesi fornite che il rimanente termine va a 0, ho  $G$  Tesi.

Integre per parti  $\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau = -\int_V \vec{A} \cdot (\nabla \cdot \vec{r}) d\tau + \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma$   
notando che  $G$  circondata di  $r$  risp.  $G$  circondata primed differisce da quella risp.  $G$  un parametro per un segno

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla \cdot \vec{W} &= \int \vec{C}(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= -\int \vec{C}(\vec{r}') \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{C} d\tau' - \oint \frac{1}{r} \vec{C} \cdot d\vec{a} \\ &= -\oint \frac{1}{r} \vec{C} \cdot d\vec{a} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Nelle condizioni richieste per  $\vec{C}$  ho che  $\text{OK} \rightarrow$  e dunque ho  $G$  Tesi.

Nelle ipotesi del Teorema è ovviamente assunto che gli integrali che definiscono  $U$  e  $\vec{W}$  convergono.

L'ordine di decimale per  $r' \rightarrow \infty$   $r \sim r'$  e gli integrali citati hanno  $G$  forme

$$\int \frac{\chi(r') r'^2 dr'}{r^i} = \int r' \chi(r') dr'$$

da cui  $G$  richieste che  $\chi$  vada a zero più rapidamente di  $r^2$

Per quanto riguarda l'unicità? L'espressione che definisce  $\vec{F}$  non implica univocamente unicità; aggiungendo infatti ad  $\vec{F}$  una funzione  $G$  cui divergenza è il cui rotore si annullano ho ancora

$$\nabla \cdot (\vec{F}') = D, \quad \nabla \times \vec{F}' = \vec{C}$$

Ma NON esiste funzione  $G$  con  $\nabla \cdot \vec{G} = 0, \quad \nabla \times \vec{G} = 0$  everywhere  $\wedge \vec{G} \rightarrow 0$  se  $r \rightarrow \infty$

Dunque l'insieme delle condizioni richieste implica unicità. //

COROLLARIO. Qualunque funzione vettoriale differenziabile che vada a 0 più velocemente di  $1/r$  per  $r \rightarrow \infty$  può essere espressa come gradiente di uno scalare più rotore di un vettore

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}') d\tau'}{r} \right) + \nabla \times \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}') d\tau'}{r} \right)$$

Esempi

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{r} \right) \\ &= -\nabla V \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d\tau'}{r} \right) = \nabla \times \vec{A} //$$

In realtà si dimostra (a altri metodi) che basta  $G$  differenziabilità  $G$  costruzione è in questo caso diversa

## L-VECTORS

$$x^\mu \quad (ct, \vec{x})$$

$$\eta^\mu \quad \left( \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), \quad \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$p^\mu \quad \left( \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \left( \frac{E}{c}, \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), \quad m\eta^\mu$$

$$K^\mu \quad \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right), \quad \frac{d}{dt} p^\mu$$

$$J^\mu \quad (cp, \vec{J}), \quad p_0 \eta^\mu$$

$$A^\mu \quad \left( \frac{V}{c}, \vec{A} \right)$$

# HELMHOLTZ - HODGE DECOMPOSITION

TEOREMA.

Siano  $D(\vec{r})$ ,  $\vec{C}(\vec{r})$  rispettivamente divergenza e rotore di una funzione  $\vec{F}(\vec{r})$ , note

Chiedo:

1.  $D(\vec{r})$ ,  $\vec{C}(\vec{r})$  vada a 0 più rapidamente di  $1/r^2$  ( $r \rightarrow \infty$ )
2.  $F(\vec{r})$  vada a 0 più rapidamente di  $1/r$

Allora  $\vec{F}$  si scompone unicamente come

$$\vec{F} = -\nabla U + \nabla \times \vec{W}$$

con

$$U = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}')}{r} d\vec{r}', \quad \vec{W} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r} d\vec{r}'$$

$r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , integrazioni su tutto lo spazio.

\*Dim. Verifico  $\nabla \cdot \vec{F} = D$ ,  $\nabla \times \vec{F} = \vec{W}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= -\nabla^2 U = -\nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\vec{r}')}{r} d\vec{r}' \right) \\ &= -\int \frac{D(\vec{r}')}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\vec{r}' \\ &= D(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{W}) - \nabla^2 \vec{W} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{C}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\vec{r}' \\ &= \vec{C}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Analizzo

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla \cdot \vec{W} &= -\int \vec{C}(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\vec{r}' \\ &= \int \frac{\nabla' \cdot \vec{C}(\vec{r}')}{r} d\vec{r}' - \oint \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r} d\vec{a} \\ &= -\oint \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{r} d\vec{a} \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

nelle condizioni richieste.

Ho implicitamente assunto che  $\exists U, \vec{W}$  (integrali sono ben posti).

Devo all'occorrenza chiedere che l'andamento sia più rapid di  $1/r^2$ , infatti

$$\sim \int \frac{\chi(\vec{r}')}{r'} r'^2 dr' \rightarrow \int \chi(\vec{r}') r' dr' !$$

Posso aggiungere ad  $\vec{F}$  una funzione  $\vec{G}$  tale  $\nabla \times \vec{G} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{G} = 0$ , ma sotto le boundary conditions richieste ho  $\vec{G} = 0$ , infatti:

$$\nabla \times \vec{G} = 0 \Rightarrow \exists P \text{ tale } \nabla P = \vec{G} \oplus \nabla \cdot \vec{G} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 P = 0} \text{ Eq. DI LAPLACE}$$

Tale equazione non è univoc determinata, ho bisogno delle boundary conditions. Se chiedo  $P \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) allora una soluzione è  $P = 0$ , per il FIRST UNIQUENESS THEOREM questa è L'UNICA soluzione.

$$\nabla^2 P = 0 \oplus B.C. \Rightarrow P = 0 \Rightarrow \vec{G} = 0.$$

Posso invertire il Teorema (Helmholtz decomposition)

Sia  $\vec{F}$  differenziabile, che vale a 0 più rapidamente di  $1/r$  allora  $\vec{F}$  si scrive come

$$\vec{F} = \nabla \cdot \left( -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{r} d\vec{r}' \right) + \nabla \times \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{r} d\vec{r}' \right)$$

Esempi.  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\vec{r}' \right) = -\nabla V$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{r} d\vec{r}' \right) = \nabla \times \vec{A}$

Storicamente

1858. Hermann Von Helmholtz spiega come il moto di un elemento di volume in  $\mathbb{R}^3$  consiste di

1. Espansione / compressione nelle 3 direzioni (irrotazionale)
2. Rotazione attorno un asse istantaneo (incompressibile)
3. Traslazione (incompressibile & irrotazionale)

Helmholtz rappresenta

1. Gradiente potenziale scalare
2. Rotore potenziale vettore
3. Gradiente potenziale scalare (possibile anche rotore potenziale vettore)

VERSIONE 1. Il moto di un fluido  $\vec{\xi}(x)$  in uno spazio infinito ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) tale che all'infinito sia nullo, è completamente determinata se sono noti  $\Theta(x), \vec{\omega}(x)$

$$\Theta(x) = \nabla \cdot \vec{\xi}(x) \quad \vec{\omega}(x) = \nabla \times \vec{\xi}(x)$$

Se il moto del fluido è confinato in una regione semplicemente connessa  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  con frontiera  $\partial\Omega$ , esso è determinato se sono noti  $\Theta(x), \vec{\omega}(x)$  e il flusso normale alla frontiera  $\xi_n(x) = \vec{\xi}(x) \cdot \hat{n}$  per  $x \in \partial\Omega$ .

↳ condizione richiesta per l'unicità in caso di dominio con frontiera

Generalizzazioni. È possibile estensione per

- smooth  $L^2$  spaces
- antisymmetric second-rank Tensor field ( $\mathbb{R}^4$ )

Nota. Under vanishing condition at infinity, the harmonic component is zero. In the case of bounded domains it may be present!

HODGE DECOMPOSITION decomporre una  $k$ -forma differenziale su un Riemannian manifold in 3 componenti mutualmente  $L^2$  ortogonali.

VERSIONE 2. HHD - 2 COMPONENTS FORM

Un campo vettoriale  $\vec{\xi}$  è unicamente determinato se sono noti  $\nabla \cdot \vec{\xi}, \nabla \times \vec{\xi}$  così come una fra le componenti normale  $\xi_n = \vec{\xi} \cdot \hat{n}$  e tangenziale  $\vec{\xi}_t = \hat{n} \times \vec{\xi}$  alla frontiera

$$\vec{\xi} = \nabla D + \nabla \times \vec{R} = \vec{d} + \vec{r}$$

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \nabla \cdot \vec{d} = \nabla^2 D$$

$$\nabla \times \vec{\xi} = \nabla \times \vec{r} = \nabla \times (\nabla \times \vec{R})$$

ed è soddisfatta una fra

NP BOUNDARY CONDITIONS  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \nabla D = \xi_n \quad \wedge \quad \vec{n} \times \vec{d} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \times (\nabla \times \vec{R}) = \vec{\xi}_t \\ \text{con } \hat{n} \text{ versore normale alla superficie. } (\vec{d} \text{ irrotazionale, } \vec{r} \text{ incompressibile).} \end{array} \right.$

ESISTENZA, UNICITÀ, ORTOGONALITÀ!

LAST VERSION (3 components)

A smooth vector field  $\vec{\xi}$  defined on a bounded or unbounded domain, can be uniquely decomposed into components 1. Irrotational,  $\vec{d}$ , normal to  $\partial\Omega$ ; 2. Incompressible,  $\vec{r}$ , parallel to  $\partial\Omega$ ;