QUINDI I_{MAX} E I_{min} SONO DATI DA

$$I_{MAX} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}| \quad E \quad I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}|$$

D'ALTRA PARTE POSSIAMO DEFINIRE LA VISIBILITÀ DELLE FRANGE DI INTERFERENZA COME

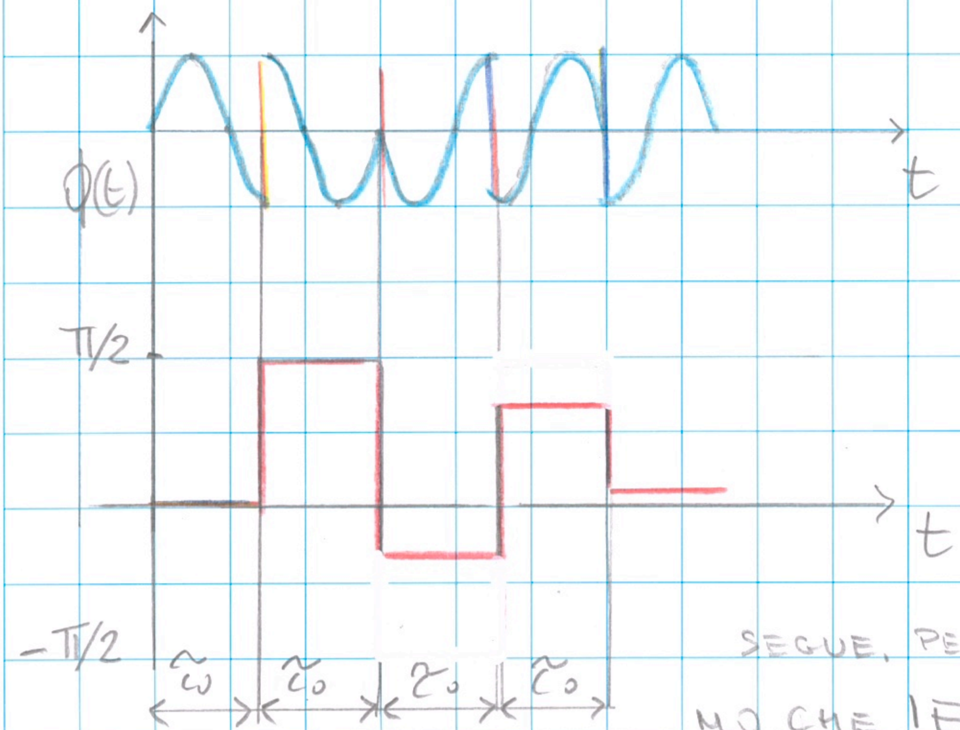
$$\mathcal{V} = \frac{I_{MAX} - I_{min}}{I_{MAX} + I_{min}} \Rightarrow = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}|}{I_1 I_2} \quad \text{E PER } I_1 = I_2$$

$\mathcal{V} = |\gamma_{12}|$ $\Rightarrow$ LA MISURA DELLA $\mathcal{V}$ È LA MISURA DEL GRADO DI COERENZA TEMPORALE PARZIALE DELL'ONDA.

- COERENZA TEMPORALE E LUNGHEZZA DI COERENZA

- OSSERVAZIONE: LA COERENZA TEMPORALE È DETTA ANCHE COERENZA LONGITUDINALE.

SCRIVIAMO IL CAMPO $\tilde{E}(t) = \tilde{E}_0 e^{i\phi(t)} e^{-i\omega t}$ DOVE $\phi(t) = \bar{k}\cdot\bar{r} + \phi_0(t)$ E ASSUMIAMO CHE $\phi(t)$ SIA UNA FUNZIONE GRADINO REGOLARE, OVVERO CHE CAMBIA VALORE IN MODO CASUALE A INTERVALLI DI TEMPO REGOLARI $\tilde{\tau}_0$. LA MISURA DEL GRADO DI COERENZA PARZIALE PUÒ ESSERE CALCOLATA COME SEGUE. PER SEMPLICITÀ ASSUMIAMO CHE $|E_1| = |E_2| = |E|$.



RISCRIVIAMO LA RELAZIONE DEL GRADO DI COERENZA PARZIALE SENZA INDICI DATO CHE SI TRATTA DI

ALLORA $\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \dfrac{\langle \tilde{E}(t)\,\tilde{E}^*(t+\tau)\rangle}{\langle |E|^2\rangle}$ $\Rightarrow$ ($\tilde{\gamma}_{11} \Rightarrow$ AUTO-CORRELAZIONE)

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \langle e^{i\omega\tau} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]} \rangle \Rightarrow$$

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = e^{i\omega\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}\,dt$$

- OSSERVAZIONE VERIFICHIAMO LA CONSISTENZA DI QUESTA RELAZIONE NEL CASO DI UN'ONDA E.M. MONOCROMATICA

$$(\tau_0 \to \infty)\ \tilde{\gamma}_{11}(\tau) = e^{i\omega\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}\,dt$$

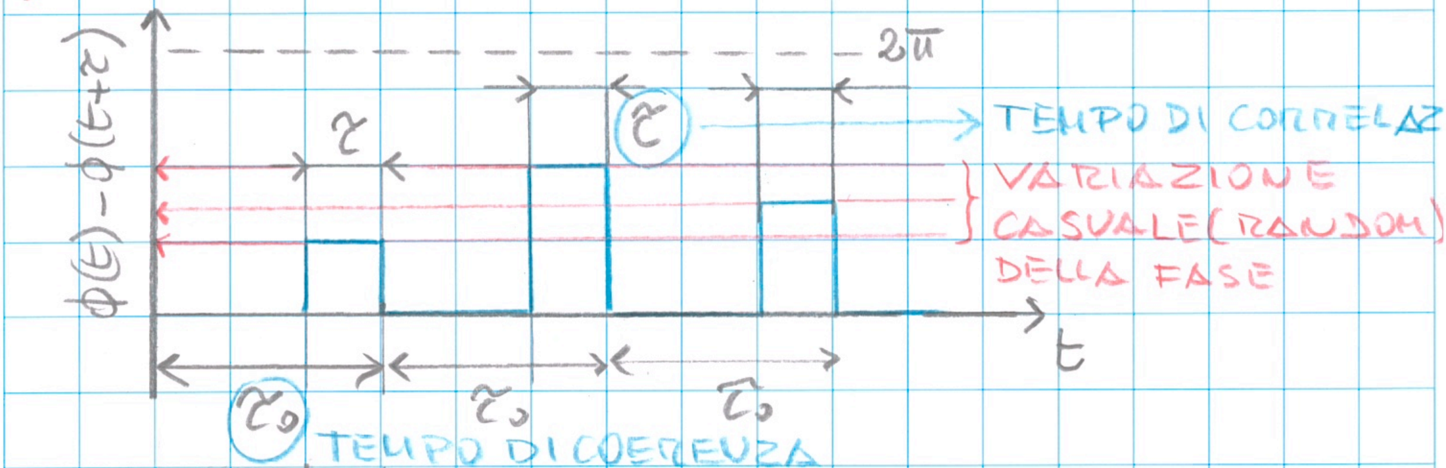
$$= e^{i\omega\tau} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int (\cos\Delta\phi + i\sin\Delta\phi)\,dt$$ DOVE

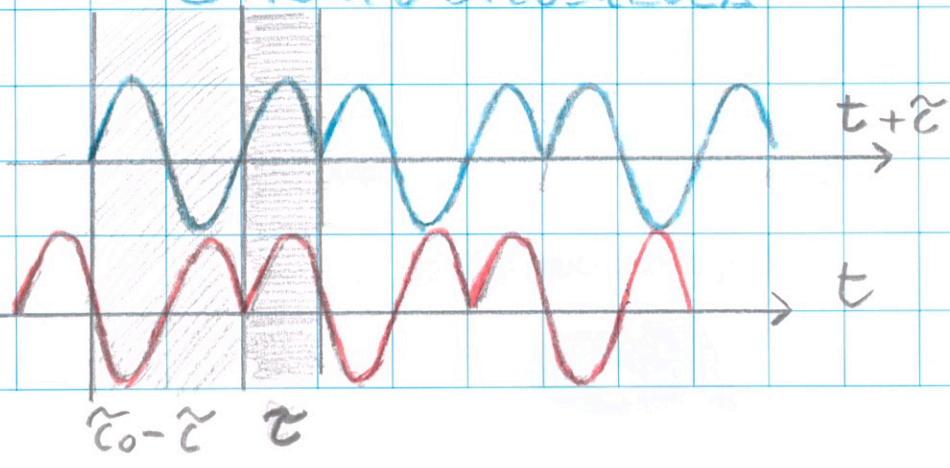
$\Delta\phi = \phi(t+\tau) - \phi(t)$ CHE PER UN'ONDA MONOCROMATICA

$\phi(t) = \bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t \Rightarrow \Delta\phi = -\omega\tau \Rightarrow \gamma_{11}(\tau) = e^{i\omega\tau}(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau)$

$= e^{i\omega\tau}\cdot e^{-i\omega\tau} = 1 \Rightarrow$ COERENZA COMPLETA.

$\rightarrow$ CONSIDERIAMO ORA LA QUANTITÀ $\phi(t) - \phi(t+\tau)$





$(\tau_0 - \tau)$ LE FASI DEI SEGNALI SONO CORRELATE

(τ) LE FASI SONO SCORRELATE E VARIANO IN MODO RANDOM.

NEL INTERVALLO $0<t<\tau_0$ LA DIFFERENZA TRA LE FASI $\phi(t)-\phi(t+\tau)=\emptyset$ SE $0<t<\tau_0-\tau$ NEL RIMANENTE INTERVALLO ASSUME DEI VALORI RANDOM TRA $\emptyset$ E 2π, E LO STESSO SI OSSERVA PER CIASCUN INTERVALLO SUCESSIVO. QUINDI

$$\gamma_{11}(\tau)=e^{i\omega\tau}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{-i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt=\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0-t}dt+\frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0}e^{i\Delta(t)}dt \Rightarrow$$

$$=\frac{\tau_0-\tau}{\tau_0}+\frac{\tau}{\tau_0}e^{i\Delta(t)}$$

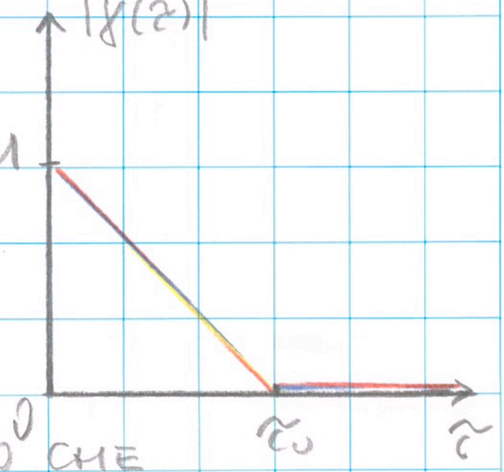
DOVE Δ E' UNA DIFFERENZA DI FASE CHE VARIA CASUALMENTE (RANDOM) NEL TEMPO. LO STESSO VALE PER GLI INTERVALLI DI TEMPO SUCESSIVI. DATO CHE $\Delta(t)$ VARIA IN MODO RANDOM IL SUO VALORE MEDIO E' $\emptyset$. L'ALTRO TERMINE $(\tau_0-\tau)/\tau_0$, E' LO STESSO PER TUTTI GLI INTERVALLI QUINDI E' UGUALE AL VALORE MEDIO DEL SUO INTEGRALE. NATURALMENTE, SE $\tau>\tau_0$ ALLORA LA DIFFERENZA DI FASE $\phi(t)-\phi(t+\tau)$ E' SEMPRE RANDOM E DI CONSEGUENZA L'INTERO INTEGRALE HA MEDIA $\emptyset$. QUINDI PER UNA SORGENTE QUASI MONOCROMATICA LA SUA FUNZIONE DI AUTO-CORRELAZIONE E' DATA DA

$$\gamma_{11}(\tau)=\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)e^{i\omega\tau} \quad \tau<\tau_0$$

$$=\emptyset \quad \tau\geq\tau_0$$

$$|\gamma_{11}(\tau)|=1-\frac{\tau}{\tau_0} \quad \tau<\tau_0$$

$$=0 \quad \tau\geq\tau_0$$



DA QUESTO GRAFICO DEDUCIAMO CHE NEL CASO DI AUTO-INTERFERENZA CON CAMPI

BILANCIATI, $|\tilde{E}_{01}| = |\tilde{E}_{02}| \Rightarrow |\gamma_{11}(\tau)| = \mathcal{V}$ (VISIBILITÀ DELLE FRANGIE) $\Rightarrow \mathcal{V} \to \emptyset$ PER $\tau > \tau_0 \Rightarrow$ LA DIFFERENZA DI PERCORSO $|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|$ NON DEVE ESSERE MAGGIORE DI $c\tau_0$ ALTRIMENTI NON SI OSSERVA PIÙ INTERFERENZA. SI DEFINISCE $c\tau_0 = L_c$ LUNGHEZZA DI COERENZA.

- OSSERVAZIONE: UNA SORGENTE DOVE GLI OSCILLATORI CHE GENERANO LA RADIAZIONE SONO BLOCCATI IN FASE, COME IN UN LASER, È UNA SORGENTE A ALTA COERENZA. MENTRE NEL CASO DI OSCILLATORI CON FASE RANDOM, COME IN UNA LAMPADA A FILAMENTO, LA LUCE È INCOERENTE. IN QUESTO CASO SI DEFINISCE LA SORGENTE TERMICA.
- RISOLUZIONE SPETTRALE DI UN IMPULSO E.M. FINITO, COERENZA E LARGHEZZA DI RIGA. UNA SORGENTE DI RADIAZIONE FISICA NON È MAI MONOCROMATICA. PER QUESTO UNA CORRETTA RAPPRESENTAZIONE DI UN IMPULSO DI LUCE È NECESSARIO USARE GLI INTEGRALI DI FOURIER. PER CONSISTENZA CON IL TESTO DEL FOWLES USIAMO LA SEGUENTE RAPPRESENTAZIONE $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} d\omega$$

. CONSIDERIAMO ORA IL CASO IN CUI $f(t)$ RAPPRESENTA UN SINGOLO TRENO D'ONDA DELLA DURATA τ_0; $f(t) = e^{-i\omega t}$ CON $-\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2}$ E $f(t) = 0$ FUORI DA QUESTO INTERVALLO.

$$\boxed{g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt}$$

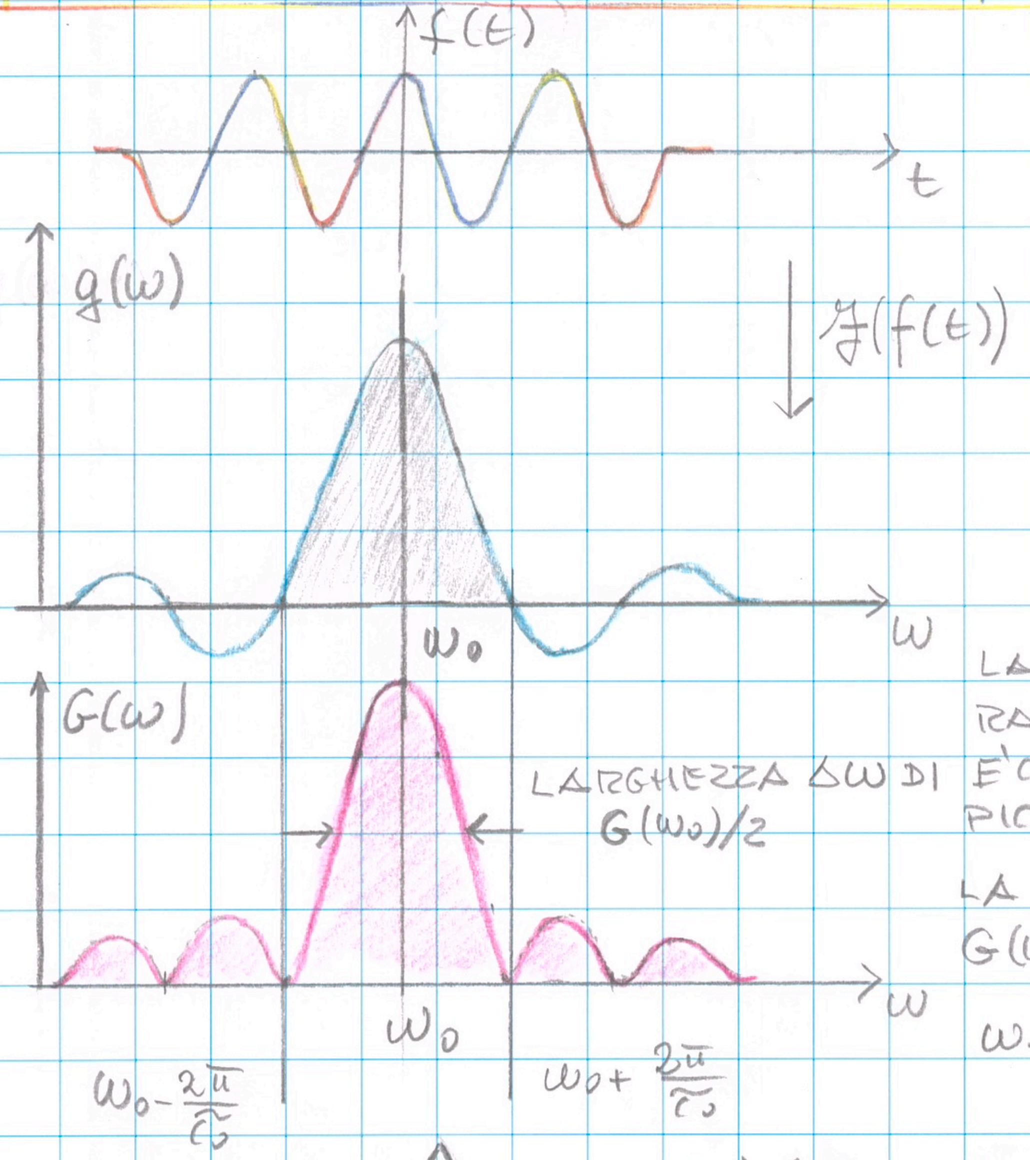
$$\boxed{= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{\sin[(\omega-\omega_0)\tau_0/2]}{\omega-\omega_0}}$$

DISTRIBUZIONE SPETTRALE

MENTRE

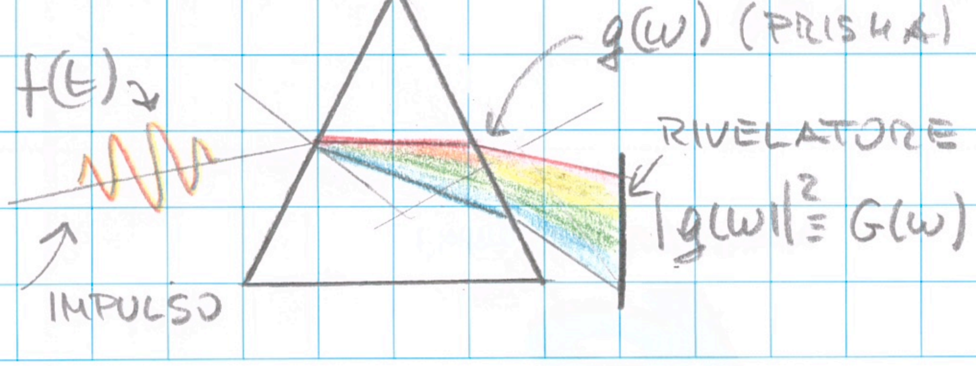
$$\boxed{|g(\omega)|^2 = G(\omega) = \frac{2\sin^2[(\omega-\omega_0)\tau_0/2]}{\pi(\omega-\omega_0)^2}}$$

SPETTRO DI POTENZA



LA PARTE PREPONDERANTE DELL'ENERGIA È CONTENUTA NEL PICCO CENTRATO A ω_0.

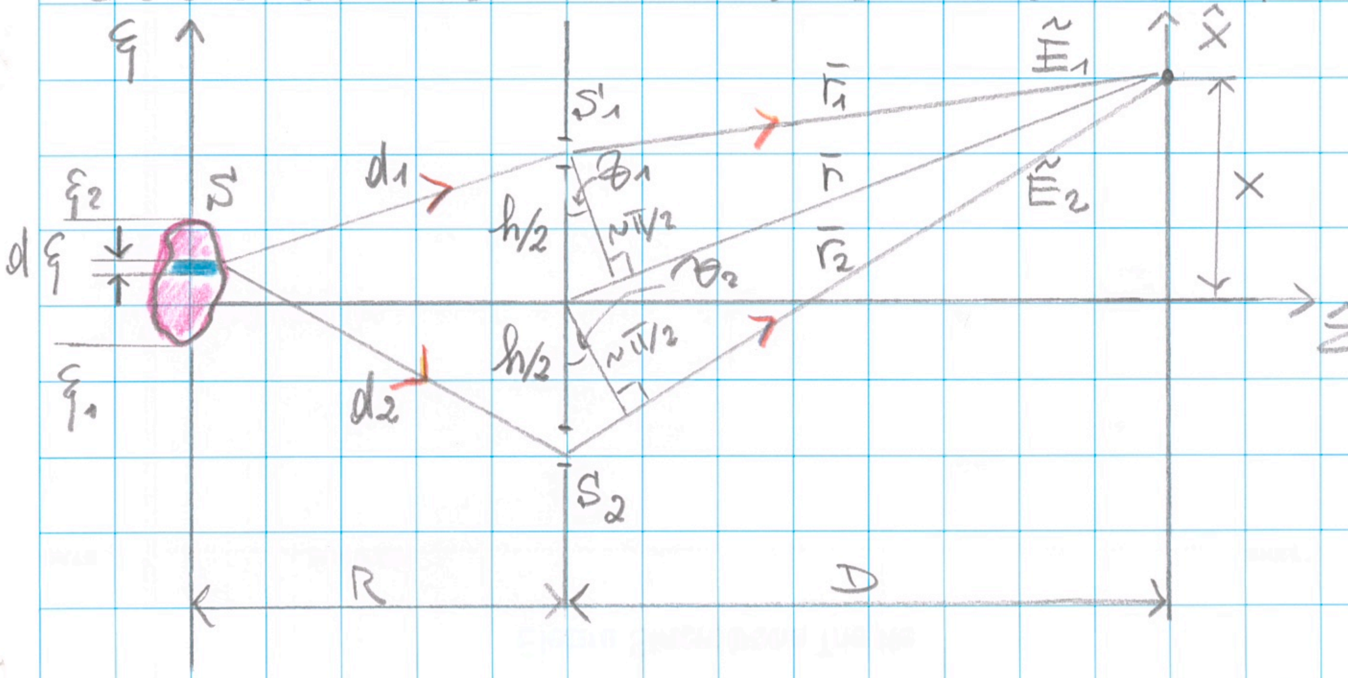
LA LARGHEZZA A $G(\omega_0)/2$ È $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} = \omega - \omega_0$ CON $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_0}$



SE $\tilde{\tau}_0$ VARIA DA IMPULSO A IMPULSO $\Rightarrow \langle \tilde{\tau}_0 \rangle$ VALORE MEDIO $\Rightarrow \langle \tilde{\tau}_0 \rangle = \dfrac{1}{\langle \Delta\nu \rangle} \Rightarrow L_c = c\langle \tilde{\tau}_0 \rangle = \dfrac{c}{\langle \Delta\nu \rangle}$ CHE ESPRES-SA IN TERMINI DI λ DA $\Delta\nu/\nu = |\Delta\lambda|/\lambda \Rightarrow L_c = \dfrac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

DOVE $\Delta\lambda$ È LA LARGHEZZA DELLA RIGA SPETTRALE $\Rightarrow$ LA COERENZA TEMPORALE È DIRETTAMENTE LEGATA ALLA MONOCROMATICITÀ, PER ESEMPIO UN LASER HeNe MONO-MODO HA $\Delta\nu \sim 10^3\,Hz$ E $\nu \sim 10^{14}\,Hz \Rightarrow \dfrac{\nu}{\Delta\nu} \sim \dfrac{10^{14}}{10^3} = 10^{11}$ OVVERO LA LUNGHEZZA DI COERENZA È DI CIRCA $10^{11}\lambda \Rightarrow 50\,km \sim L_c$.

- COERENZA SPAZIALE. LA COERENZA SPAZIALE È RELATIVA AL TERMINE SPAZIALE DELLA FASE COMPLESSIVA DELL'ONDA $\bar{K}\cdot\bar{r} + \varphi_0$. NEL CASO DI UNA SORGENTE PUNTUALE E CON UNA OPPORTUNA SCELTA DEL S.d.R $\varphi_0 = \emptyset$. TUTTAVIA, PER UNA SORGEN-TE ESTESA QUESTO NON È PIÙ POSSIBILE, DATO CHE L'ORIGINE DEL S.d.R. NON È PIÙ UNIVOCA.



L'INTENSITÀ NEL PUNTO P È DATA DA $I = \varepsilon_0 c \langle \tilde{E}^2 \rangle$

SVILUPPIAMO IL TERMINE $\langle \tilde{E}^2 \rangle$

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 (\underbrace{t + \frac{d_1}{c} + \frac{r_1}{c}}_{t_1}) \rangle \langle E_2^2 (\underbrace{t + \frac{d_2}{c} + \frac{r_2}{c}}_{t_2}) \rangle + 2 \langle E_1(t_1) E^*(t_2) \rangle$$

TERMINI DOVUTI ALLA DIMENSIONE FINITA DELLA SORGENTE. $\Delta \phi_\xi = \frac{d_2 - d_1}{c}$, $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c} = \Delta t$ DOVUTO ALLE DISTANZE $S_1P = r_1$ E $S_2P = r_2$ $\Rightarrow$

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 (t_2 - \Delta\phi - \tau) \rangle + \langle E_2^2 (t_2) \rangle +$$
$$+ 2 \langle E_1 (t_2 - \Delta\phi - \tau) \cdot E_2^* (t_2) \rangle.$$

NATURALMENTE, LA DIFFERENZA DI TEMPO τ RELATIVA ALLA PROPAGAZIONE DELLA LUCE DA $S_1 \to P$ E $S_2 \to P$ È EQUIVALENTE AL TEMPO DI RITARDO DISCUSSO PER LA COERENZA TEMPORALE $\Delta t = \tau = \frac{r_2 - r_1}{c}$. SE ORA APPLICHIAMO A QUESTO CASO LO SVILUPPO ANALITICO APPLICATO PER LA COERENZA TEMPORALE OTTENIAMO

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \tilde{E}_1 (t_2 - \Delta\phi - \tau) \tilde{E}_2^* (t_2) \rangle \Rightarrow$$
$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \tilde{E}_1 (t_2 - \Delta\phi - \tau) \tilde{E}_2 (t_2) \, dt_2 .$$

SE ORA MISURIAMO LA I_{MAX} E I_{min} PER IL MAX CENTRALE $(m=0)$ E IL PRIMO MINIMO, IN MODO TALE CHE $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c} \sim \phi$ OTTENIAMO

$$\gamma_{12}(\Delta\phi_\xi) = \frac{\langle \tilde{E}_1(t) \tilde{E}_2^*(t - \Delta\phi_\xi) \rangle}{\sqrt{E_1^2(t) \; E_2^2(t - \Delta\phi_\xi)}}$$

$$\gamma_{12}(\Delta\phi_\xi) = \frac{\Gamma_{12}(\Delta\phi_\xi)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0) \Gamma_{22}(0)}}.$$

SE ORA FACCIAMO VARIARE LA DISTANZA h TRA S_1 E S_2 POSSIAMO ESPLORARE IL FRONTE D'ONDA CHE INCIDE SU $S_1 - S_2$ E QUINDI AVERE CON BUONA APPROSSIMAZIONE LA MISURA DELLA COERENZA SPAZIALE (TRASVERSALE)

SE USASSIMO LO SCHEMA RIPORTATO DAL FOWLES (E ALTRI TESTI