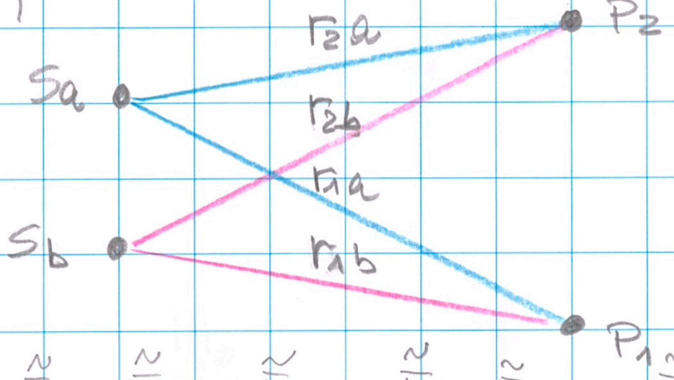
SE USASSIMO LO SCHEMA RIPORTATO DAL FOWLES (E ALTRI TESTI)



OTTENIAMO $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_{1a} + \tilde{E}_{1b}$; $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_{2a} + \tilde{E}_{2b}$ LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE NORMALIZZATA IN P_1 E P_2 È DATA DA

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}_1(t)\tilde{E}_2^*(t+\tau)\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} =$$

$$= \frac{\langle [\tilde{E}_{1a}(t) + \tilde{E}_{1b}(t)][\tilde{E}^*_{2a}(t+\tau) + \tilde{E}^*_{2b}(t+\tau)]\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} =$$ SE S_a E S_b SONO MUTUAMENTE INCOERENTI

$$= \frac{\langle \tilde{E}_{1a}(t)\tilde{E}^*_{2a}(t+\tau)\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} + \frac{\langle \tilde{E}_{1b}(t)\tilde{E}^*_{2b}(t+\tau)\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

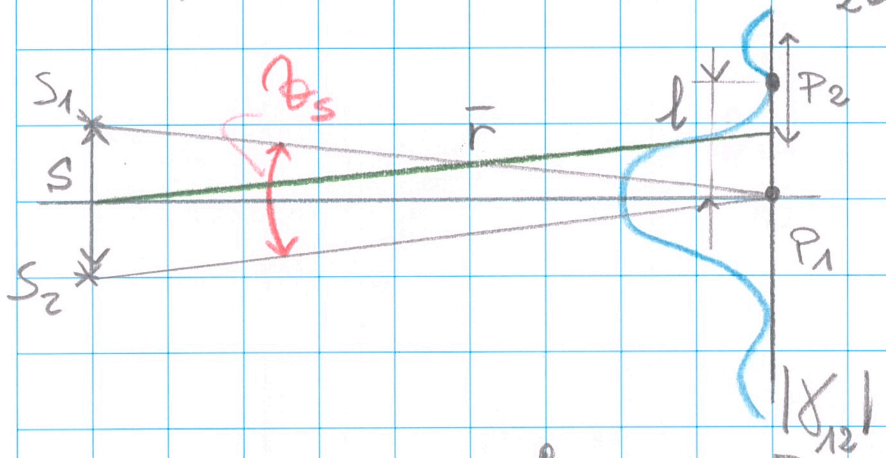
I TERMINI INCROCIATI $\langle \tilde{E}_{1a}\tilde{E}^*_{2b}\rangle$ E $\langle \tilde{E}_{1b}\tilde{E}^*_{2a}\rangle$ SONO NULLI. SE I CAMPI SONO DEL TIPO $\tilde{E}(t) = E_0 e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)}$ ALLORA I CAMPI MEDI, COME ABBIAMO FATTO IN PRECEDENZA SONO DATI DA $\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]}dt$. INOLTRE È NECESSARIO TENERE IN CONSIDERAZIONE I DIVERSI TEMPI CHE LE ONDE IMPIEGANO PER VIAGGIARE DALLE SORGENTI AI RICEVITORI. OPERANDO IN QUESTO MODO $\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\gamma(\tau_a) + \frac{1}{2}\gamma(\tau_b)$ DOVE $\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$ È LA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE RAPPRESENTATIVA DI ENTRAMBE LE SORGENTI

$\tau_a = \frac{r_{2a} - r_{1a}}{c} + \tau$, $\tau_b = \frac{r_{2b} - r_{1b}}{c} + \tau$. QUI NON RIPORTIAMO TUTTI I PASSAGGI MA SOLO IL RISULTATO FINALE

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 \sim \left(\frac{1+\cos[\omega(\tau_b-\tau_a)]}{2}\right)\left(1-\frac{\tau_a}{\tau_0}\right)\left(1-\frac{\tau_b}{\tau_0}\right)$$

DOV ABBIAMO ASSUNTO $(\tilde{\tau}_a - \tilde{\tau}_b) \ll \tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b$. QUESTA RELAZIONE DIMOSTRA CHE LA MUTUA COERENZA TRA I CAMPI SUI DUE RIVELATORI DIPENDE NON SOLO DAL TEMPO DI AUTO-COERENZA $\tilde{\tau}_0$ DELLE SORGENTI, MA ANCHE IN MODO PERIODICO DA $\tilde{\tau}_b - \tilde{\tau}_a \Rightarrow$ UNA DIPENDENZA SPAZIALE PERIODICA. NEL CASO PARTICOLARE DELL'INTERFEROMETRO DI YOUNG, SE SI CONSIDERANO DUE PUNTI SORGENTE SIMMETRICI RISPETTO ALL'ASSE OTTICO $\Rightarrow r_{1a} = r_{1b} \Rightarrow$

$\tilde{\tau}_b - \tilde{\tau}_a = (r_{2b} - r_{1b})/c \Rightarrow \tilde{\tau}_b - \tilde{\tau}_a \sim \frac{s\ell}{2cr}$, DOVE ABBIAMO ASSUNTO $r \gg s, \ell$



$\Rightarrow$ LA MUTUA COERENZA È MAX AL CENTRO DOVE P_1 E P_2 COINCIDONO. POI $|\gamma_{12}| \sim \emptyset$ A UNA DISTANZA DEL MASSIMO PARI $\ell_t \Rightarrow \cos[\omega(\tilde{\tau}_b - \tilde{\tau}_a)] = -1 \Rightarrow$

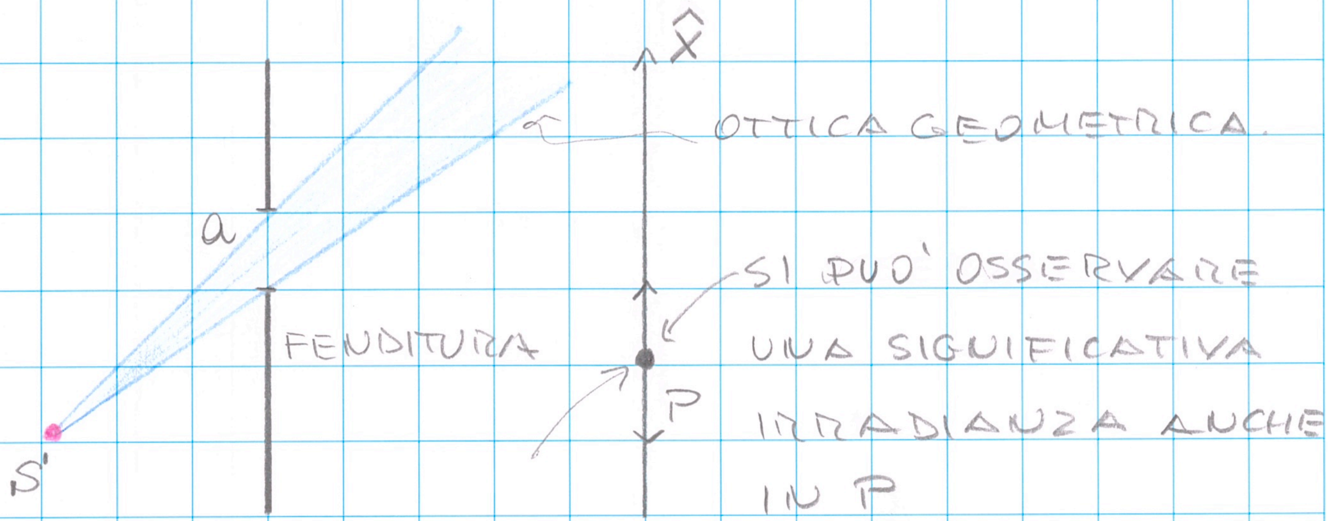
$\omega(\tilde{\tau}_a - \tilde{\tau}_b) = \frac{\omega s \ell_t}{2cr} = \pi$. CON $\omega = 2\pi c/\lambda \Rightarrow \ell_t = \frac{r\lambda}{s}$ CHE IN TERMINI DI SEPARAZIONE ANGOLARE TRA LE DUE SORGENTI (VISTA DA P_1) È $\vartheta_s \cong s/r \Rightarrow \ell_t = \frac{\lambda}{\vartheta_s}$

QUESTA È APPROSSIMATIVAMENTE LA REGIONE DI ALTA MUTUA COERENZA TRA P_1 E P_2 E DEFINITA COME LARGHEZZA DI COERENZA TRASVERSA (SPAZIALE)

- LEZIONE #22 DIFFRAZIONE SCALARE

LA TEORIA DELLA DIFFRAZIONE HA COME OBIETTIVO LA SPIEGAZIONE ANALITICA DELLA PROPAGAZIONE DI UN'ONDA E.M. DOPO AVER INTERAGITO CON UN CORPO OPACO O SEMI-OPACO CHE NE

IN PARTE IL PERCORSO. QUESTO CI PORTA A CONSIDERARE L'ORIGINE DELLA PENOMBRA E IL FATTO CHE TALUNE CIRCOSTANZE CIRCOSTANZE MOSTRANO CHE DOPO UN OSTACOLO O DOPO UN'APERTURA LA LUCE NON SI PROPAGA PER DIREZIONI RETTE $\Rightarrow$ ALCUNI FENOMENI OTTICI SEMBRANO NON SEGUIRE LE LEGGI DELL'OTTICA GEOMETRICA.



FACENDO SCORRERE P LUNGO $\hat{X}$ SI TROVANO ZONE ILLUMINATE E ZONE BUIE CHE UNA VOLTA FISSATA LA SORGENTE I LA GEOMETRIA DIPENDONO DA "a". HUYGENS, SULLA BASE DELLA OSSERVAZIONE DI FENOMENI DIFFRATTIVI FORMULO' UN PRINCIPIO - POI PERFEZIONATO DA FRESNEL - CHE SI PUO' ENUNCIARE NEL MODO SEGUENTE: "OGNI PUNTO CHE OSTACOLA LA PROPAGAZIONE DELLA LUCE, A UN DATO ISTANTE, SI COMPORTA COME LA SORGENTE DI ONDE DI LUCE SFERICHE SECONDARIE AVENTI LA STESSA λ DI QUELLE INCIDENTI. L'AMPIEZZA DEL CAMPO OTTICO IN OGNI PUNTO OLTRE L'OSTACOLO RISULTA DALLA SOVRAPPOSIZIONE DI TUTTE LE ONDE SECON-

DARIE GENERATE DAL PUNTO OSTACOLO (CONSERVANDO LE LORO AMPIEZZE E FASI RELATIVE). "QUESTO ENUNCIATO PUÒ ESSERE FORMULATO IN MODO ALTERNATIVO COME SEGUE: "OGNI PUNTO DI UN FRONTE D'ONDA (LUOGO DEI PUNTI A FASE COSTANTE) PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME SORGENTE DI ONDE SFERICHE SECONDARIE IL CUI INVILUPPO, A UN TEMPO SUCCESSIVO, COSTITUISCE A SUA VOLTA, UN FRONTE D'ONDA (PIANO O SFERICO) TANGENTE ALLO SVILUPPO DELLE ONDE SECONDARIE E RISULTATO DELLA INTERFERENZA TRA QUESTE."

L'IDEA DI ONDE INTERFERENTI FU AGGIUNTA DA FRESNEL PER CUI IL PRINCIPIO PRENDE IL NOME DI HUYGENS-FRESNEL, MA UNA CRITICA FONDANTE A QUESTO PRINCIPIO NASCE DA DUE OSSERVAZIONI:

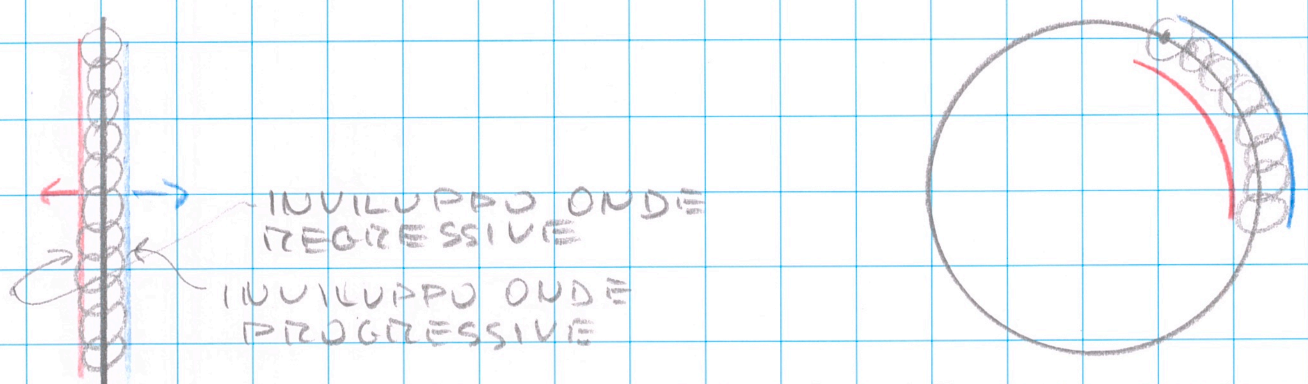
1- LA DIFFRAZIONE SI OSSERVA SOLO SE C'È UN OSTACOLO OPACO MA SI FONDA SU UNA FENOMENOLOGIA DELLA PROPAGAZIONE DELLA LUCE BASATA SU UN FENOMENO DI AUTO-INTERFERENZA NON OSSERVATO ALTRIMENTI.

2- SE OGNI PUNTO DEL FRONTE D'ONDA È SORGENTE DI ONDE SFERICHE LA LUCE DOVREBBE PROPAGARSI SIA IN AVANTI CHE INDIETRO.

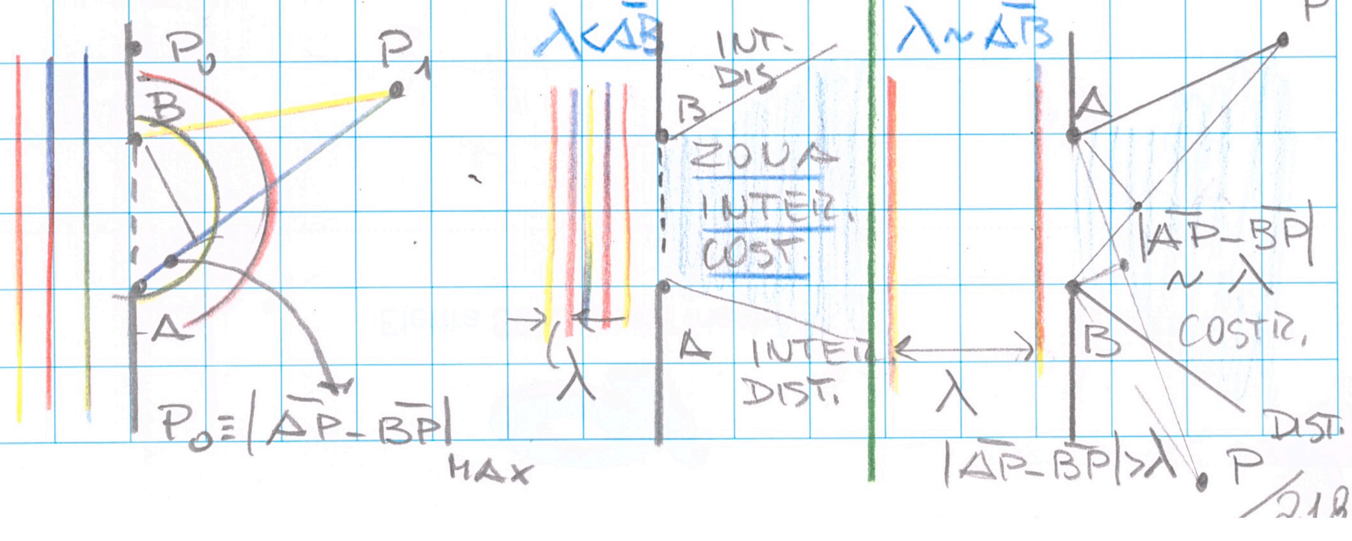
TUTTAVIA, IN SEGUITO LA FENOMENOLOGIA DELLA DIFFRAZIONE PROPOSTA DA FRESNEL-HUYGENS FU POSTA IN UNA FORMA MATEMATICA CONSISTENTE DA KIRCHHOFF E LA FORMULA CHE NE DERIVA È IL PUNTO DI PARTENZA PER IL CALCOLO DEI PROCESSI

DIFFRATTIVI NEI LIMITI DI UNA TEORIA DI CAMPO SCALARE.

IN QUESTA LUCE POSSIAMO CONSIDERARE IL FENOMENO DIFFRATTIVO COME UN'INTERFERENZA FRA ONDE E.M. LA CUI PROPAGAZIONE E' STATA PERTURBATA DA UN OSTACOLO (O DA UN QUALSIASI ALTRO FENOMENO TIPO LA VARIAZIONE LOCALE DELL'INDICE DI DIFFRAZIONE) CHE HA MODIFICATO IL FRONTE D'ONDA PRIMARIO E QUINDI LA CONTINUITA' DELLA PROPAGAZIONE. UNA TRATTAZIONE GEOMETRICA ESTESA DEL PRINCIPIO DI F-H NON FA PARTE DEL PROGRAMMA MA SI TROVA IN LETTERATURA PER ES IN "MODERN OPTICS_ R. GUENTHER. TUTTAVIA, QUI POSSIAMO DISCUTERE, IN TERMINI FENOMENOLOGICI, LA DIPENDENZA DEL CONO DI LUCE TRASMESSO DA UNA FENDITURA E IL RAPPORTO TRA λ E LE DIMENSIONI DELLA FENDITURA



FRONTE D'ONDA E INVILUPPO DELLE ONDE SECOND.



SI OSSERVA INTERFERENZA COSTRUTTIVA SE $|\overline{AP}-\overline{BP}|<\lambda$ MENTRE PER $|\overline{AP}-\overline{BP}|>\lambda$ SI HA INTERFEREZA DISTRUTTIVA. QUANDO P SI TROVA SUL PIANO DELLA FENDITURA $\Delta L_{MAX} = |\overline{AP}-\overline{BP}|$. QUINDI SE $\lambda \simeq \Delta L_{MAX}$ SI OSSERVA INTERFERENZA COSTRUTTIVA IN TUTTO LO SPAZIO OLTRE LA FENDITURA. DA QUESTE OSSERVAZIONI DEDUCIAMO CHE IL FENOMENO DIFFRATTIVO DIPENDE IN VIA APPOSSIMATIVA DAL RAPPORTO $\lambda/\Delta L$, OVVERO DAL RAPPORTO TRA LA LUNGHEZZA D'ONDA E LA FENDITURA. TUTTAVIA, UNA DESCRIZIONE PIÙ FORMALE RICHIEDE DI PARTIRE DALLE EQS. DI M. $\Rightarrow$ RICAVARE L'EQ. DELLE ONDE E.M. E QUINDI IMPORRE LE CONDIZIONI AL CONTORNO PER I CAMPI CHE INTERAGISCONO CON L'OSTACOLO. QUESTA PROCEDURA PORTA A UNA TEORIA VETTORIALE DELLA DIFFRAZIONE LA CUI SOLUZIONE È RICHIESTA SOLO IN CASI PARTICOLARI. QUINDI SVILUPPEREMO UNA TEORIA SCALARE CHE CI PORTERÀ A UNA RELAZIONE NOTA COME TEOREMA DI FRESNEL-KIRCHHOFF.

TUTTAVIA, PRIMA VEDIAMO SOTTO QUALI CONDIZIONI UNA TEORIA VETTORIALE DELLE ONDE SI PUÒ RICONDURRE A UNA TEORIA SCALARE.

L'EQ. DELLE ONDE NELLO SPAZIO LIBERO È DATA DA $\Box^2\tilde{E}=0$; $\Box^2\tilde{H}=0$, MENTRE IN UNO SPAZIO NON LIBERO DA MATERIA, SVILUPPANDO IL $\Box^2$ OTTENIAMO $\nabla^2\tilde{E}-\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\tilde{E}=0$; $\nabla^2\tilde{H}-\frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\tilde{H}=0$

CON $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$; $n = \left(\varepsilon / \varepsilon_0\right)^{1/2}$. QUESTE EQS. SI RIFERISCONO A UN MEZZO OMOGENEO E ISOTROPO NEL CASO DI UN'INTERAZIONE LINEARE TRA CAMPI E MEZZO. IN QUESTE CIRCOSTANZE TUTTE LE COMPONENTI $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ DI $\tilde{E}$ E $\tilde{H}$ SONO EQUIVALENTI E CIASCUNA DESCRIVE IN MODO COMPLETO $\tilde{E}$ E $\tilde{H}$ $\Rightarrow$ L'EQ. DELLE ONDE SI PUÒ RIDURRE A $\nabla^2 E_x - \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 E_x = \emptyset$ QUINDI E' POSSIBILE RAPPRESENTARE LE COMPONENTI DEI CAMPI TRAMITE UN'UNICA EQ. SCALARE

$$\nabla^2 u(P,t) - \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 u(P,t) = \emptyset$$

DOVE $u(P,t)$ RAPP. UNA DELLE COMPONENTI SCALARI. L'UTILIZZO E' GIUSTIFICATO SOLO NELLE CONDIZIONI ESPOSTE SOPRA E COMUNQUE INTRODUCE ERRORI E APPROSIMAZIONI CHE DISCUTEREMO DI VOLTA IN VOLTA. IN PARTICOLARE UNA TEORIA SCALARE E' APPROPRIATA SE $\Delta L \equiv h > \lambda$, DATO CHE IN QUESTO CASO GLI ANGOLI DI DIFFRAZIONE SONO PICCOLI E GLI EFFETTI DI ACCOPIAMENTO DI CAMPO SONO PICCOLI. IN PARTICOLARE, UNA TEORIA SCALARE DELLA DIFFRAZIONE E' SUFFICIENTEMENTE ACCURATA SE:

1. LE STRUTTURE DIFFRATTIVE SONO GRANDI O COMUNQUE COMMENSURABILI A λ.
2. GLI EFFETTI DI ACCOPIAMENTO DI CAMPO SI MINIMIZZANO CON LA DISTANZA DALL'APERTURA (OSTACOLO).

DI FATTO SI OSSERVA CHE GLI EFFETTI DIFFRATTIVI SONO MAX QUANDO $\lambda \sim h$

- FORMULA DI FRESNEL-KIRCHHOFF. IL PUNTO DI PARTENZA DI QUESTA TEORIA È IL TEOREMA DI GREEN, CHE SI PUÒ ENUNCIARE NEL MODO SEGUENTE: DATE DUE FUNZIONI SCALARI U E V CONTINUE E INTEGRABILI, VALE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\boxed{\int_{\Sigma'} \left(V \bar{\nabla}_n U - U \bar{\nabla}_n V\right) da = \int_{\tau} \left(V \nabla^2 U - U \nabla^2 V\right) d\tau}$$

DIM.

PONIAMO $\bar{F} = U \bar{\nabla} V$ E APPLICHIAMO GAUSS

$$\int_{\Sigma'} \bar{F} \cdot \hat{n}\, da = \int_{\tau(\Sigma')} \bar{\nabla} \cdot \bar{F}\, d\tau$$

(CON $\hat{n}$ VERSORE PUNTUALE $\perp$ A Σ')

APPLICHIAMO A $\bar{F}$ L'IDENTITÀ VETTORIALE

$$\bar{\nabla} \cdot (U \bar{\nabla} V) = U \nabla^2 V + (\bar{\nabla} U) \cdot (\bar{\nabla} V) \Rightarrow$$

(1) $$\int_{\Sigma'} (U \bar{\nabla}_n V)\, d\bar{a} = \int_{\tau} (U \nabla^2 V + \bar{\nabla} U \cdot \bar{\nabla} V)\, d\tau$$

ORA PONIAMO $\bar{G} = V \bar{\nabla} U$

(2) $$\int_{\Sigma'} (V \bar{\nabla}_n U)\, d\bar{a} = \int_{\tau} (V \nabla^2 U + \bar{\nabla} V \cdot \bar{\nabla} U)\, d\tau$$

DA CUI SOTTRAENDO (1) DA (2) $\Rightarrow$

$$\int_{\Sigma'} (U \bar{\nabla}_n V - V \bar{\nabla}_n U)\, d\bar{a} = \int_{\tau(\Sigma')} (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U)\, d\tau$$

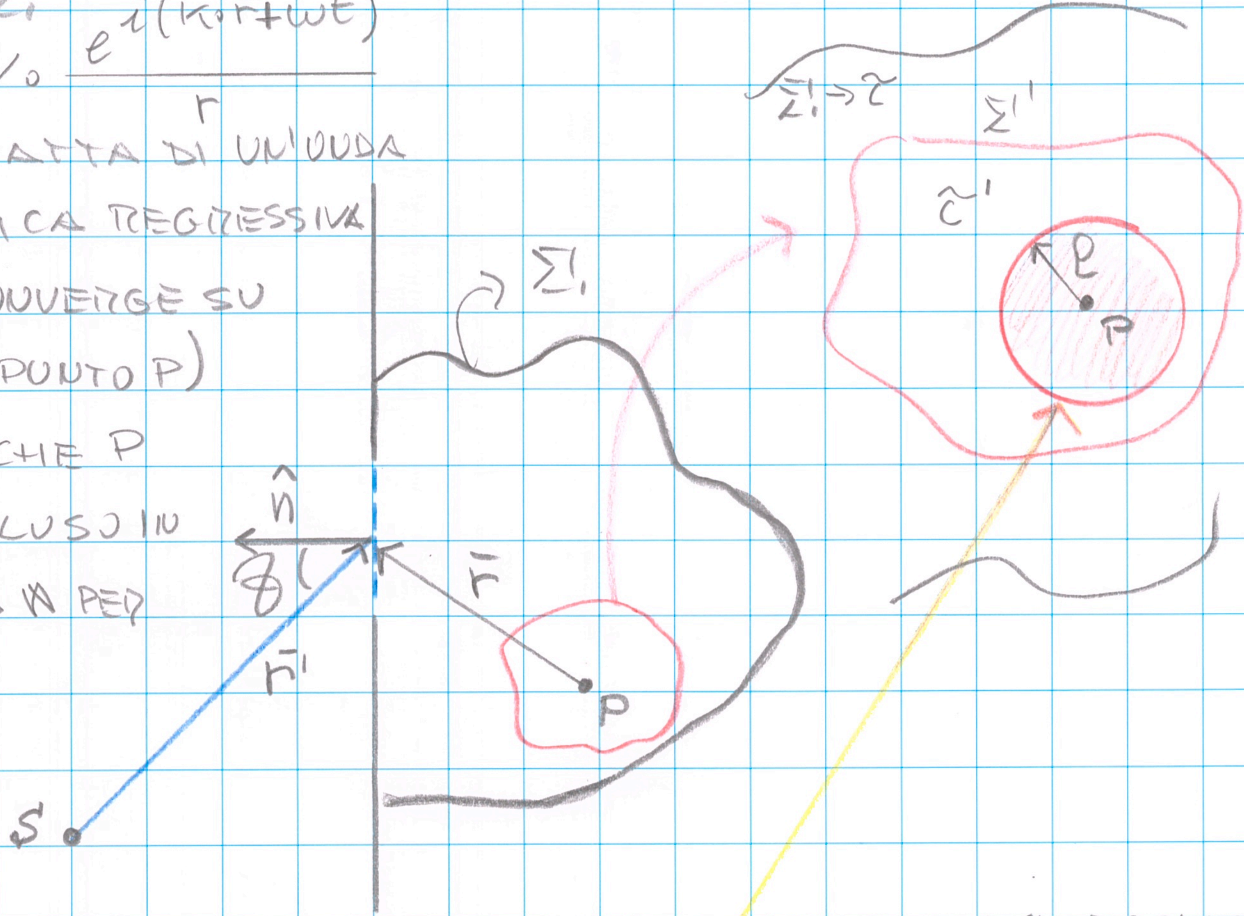
SE ORA APPLICHIAMO QUESTO TEOREMA A FUNZIONI U E V CHE SODDISFANO L'EQ. $\Box^2 U = 0$ E $\Box^2 V = 0$ CON U E V AVENTI LA STESSA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE E UNA DIPENDENZA ARMONICA DEL TIPO $e^{\pm i\omega t}$ ALLORA $\int_{\tau} (V \nabla^2 U + U \nabla^2 V)\, d\tau = \emptyset$

$\Rightarrow \int_{\Sigma_1} \left(V\bar{\nabla}_n U - U\bar{\nabla}_n V\right) d\bar{a} = 0$. ORA SUPPONIAMO CHE

$$V = V_0 \frac{e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}+\omega t)}}{r}$$

SI TRATTA DI UN'ONDA SFERICA REGRESSIVA CHE CONVERGE SU $r=0$ (PUNTO P)

DATO CHE P E' INCLUSO IN Σ_1', $V \to \infty$ PER $r \to 0$



SI TRATTA DI UN PUNTO SINGOLARE CHE VA ESCLUSO DALL'INTEGRALE. QUESTO SI OTTIENE CON UNA PROCEDURA STANDARD CHE CONSISTE NEL SOTTRARRE UN INTEGRALE SOPRA UNA SFERA DI RAGGIO ρ E CENTRATA IN P. SU QUESTA SFERA CON $\rho = r$ E $\bar{\nabla}_n = -\partial_r$ POSSIAMO SCRIVERE

$$\int_{\Sigma_1'} \left(\frac{e^{ikr}}{r}\bar{\nabla}_n U - U\bar{\nabla}_n \frac{e^{ikr}}{r}\right) d\bar{a} - \int_{\Sigma'} \left(\left(\frac{e^{ikr}}{r}\partial_r U\right) - U\partial_r \frac{e^{ikr}}{r}\right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega = \emptyset$$

ELEMENTO D'AREA

DOVE IL FATTORE COMUNE $V_0 e^{i\omega t}$ E' STATO SEMPLIFICATO. IL PRIMO INTEGRALE DA' UNA FUNZIONE D'ONDA CHE CONVERGE SU P, MENTRE IL SECONDO PER $\rho \to \emptyset \Rightarrow (\dots) \to U_P$ OVVERO

PRENDE IL VALORE DI U NEL PUNTO P (U(P)) $\Rightarrow$

$$\int_{\Sigma'_1} U_p \, d\Omega = U_p \, 4\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{U_p = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma'_1} \left(U \bar{\nabla}_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \bar{\nabla}_n U \right) \cdot d\bar{a}}$$

QUESTO E' L'INTEGRALE DI KIRCHHOFF, MENTRE U E' DETTA DISTURBANZA OTTICA.