PRENDE IL VALORE DI U NEL PUNTO P $(U(P))$ $\Rightarrow$

$$\int_{\Sigma'_1} U_P \, d\Omega = U_P \, 4\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{U_P = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma'_1}\left(U\bar{\nabla}_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r}\bar{\nabla}_n U\right)\cdot d\bar{a}}$$

QUESTO È L'INTEGRALE DI KIRCHHOFF, MENTRE U È DETTA DISTURBANZA OTTICA. PER DARE DEI VALORI NUMERICI ALLA DISTURBANZA OTTICA È NECESSARIO INTRODURRE DELLE APPROSSIMAZIONI:

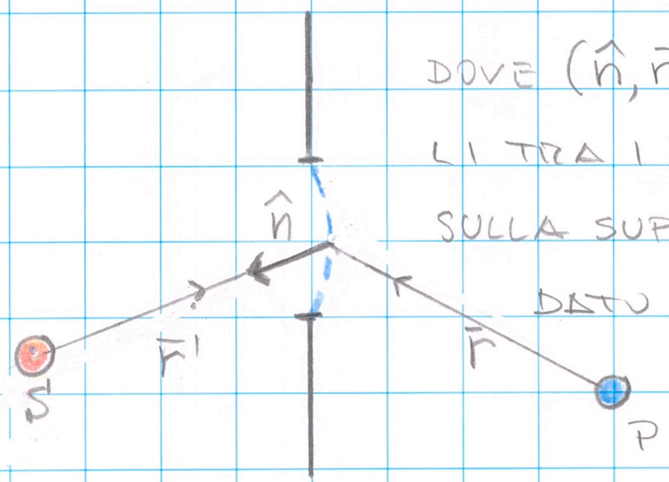
1. LA FUNZIONE D'ONDA U E IL $\bar{\nabla}_n U$ CONTRIBUISCONO IN MODO TRASCURABILE ALL'INTEGRALE DI KIRCHHOFF A ECCEZIONE DELLA APERTURA.
2. I VALORI DI U E $\bar{\nabla}_n U$ ALL'APERTURA SONO GLI STESSI CHE SI AVREBBERO QUALORA NON CI FOSSE LO SCHERMO.

NATURALMENTE QUESTE APPROSIMAZIONI NON SONO PRIVE DI CRITICITÀ, TUTTAVIA, I RISULTATI SPERIMENTALI OTTENUTI NELLE CONDIZIONI RICHIESTE DALLA TEORIA SCALARE SONO SPESSO IN BUON ACCORDO CON I VALORI CALCOLATI. DALLA FIGURA PRECEDENTE OSSERVIAMO CHE r' DENOTA LA DISTANZA TRA UN PUNTO SULLA APERTURA E LA SORGENTE S'. LA FUNZIONE D'ONDA SULLA APERTURA È DATA DA $\boxed{U = U_0 \frac{e^{i(kr'-\omega t)}}{r'}}$. QUESTA FUNZIONE RAPPRESENTA UN'ONDA MONOCROMATICA SFERICA CHE HA ORIGINE IN S'. QUINDI L'INTEGRALE DI KIRCHHOFF RELATIVO È

$$U_P = \frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_{\Sigma'_1}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\bar{\nabla}_n \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'}\bar{\nabla}_n \frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot d\bar{a}$$

DOVE L'INTEGRALE E' ESTESO SU TUTTA L'APERTURA, LE OPERAZIONI SULLA FUNZIONE INTEGRANDA SI SVOLGONO NEL SEGUENTE MODO

$$\bar{\nabla}_n \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\hat{n},\bar{r})\,\partial_r\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \cos(\hat{n},\bar{r}) \times \left(\frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2}\right)$$



DOVE $(\hat{n},\bar{r})$ E $(\hat{n},\bar{r}')$ DENOTANO GLI ANGOLI TRA I VETTORI $\bar{r}$ E $\bar{r}'$ E IL VERSORE $\hat{n}$ SULLA SUPERFICIE DELLA FENDITURA DATO CHE IL RESTO NON CONTRIBUISCE. (LA FIGURA PER RAGIONI DI SCALA NON E' REALISTICA). NELLE RELAZIONI PRECEDENTI I TERMINI $\propto$ A $1/r^2$ E $1/(r')^2$ SONO TRASCURABILI SE $\bar{r}$ E $\bar{r}' \gg \lambda$ E QUINDI SI OTTIENE

$$U_P = \frac{-ik\,U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_{\Sigma'} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'}\left[\cos(\hat{n},\bar{r}) - \cos(\hat{n},\bar{r}')\right] da$$

TERMINE DI SFASAMENTO — FATTORE DI OBLIQUITA'

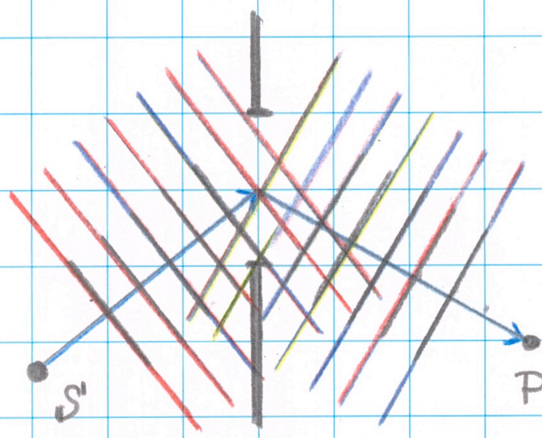
QUESTA RELAZIONE E' NOTA COME: INTEGRALE DI FRESNEL-KIRCHHOFF. ESSA PUO' ESSERE INTERPRETATA (ENTRO CERTI LIMITI) COME LA FORMULAZIONE MATEMATICA DEL PRINCIPIO DI FRESNEL-HUYGENS. QUESTO LO SI INTUISCE MEGLIO DALLA FIGURA RIPORTATA SOPRA. INFATTI $|\bar{r}'| = cost$ E $\cos(\hat{n},\bar{r}') = -1 \Rightarrow$ L'INTEGRALE DI F.K

$$U_P = -\frac{ik}{4\pi}\int_{\Sigma'} \frac{U_A e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left[\cos(\hat{n},\bar{r}) + 1\right] da$$

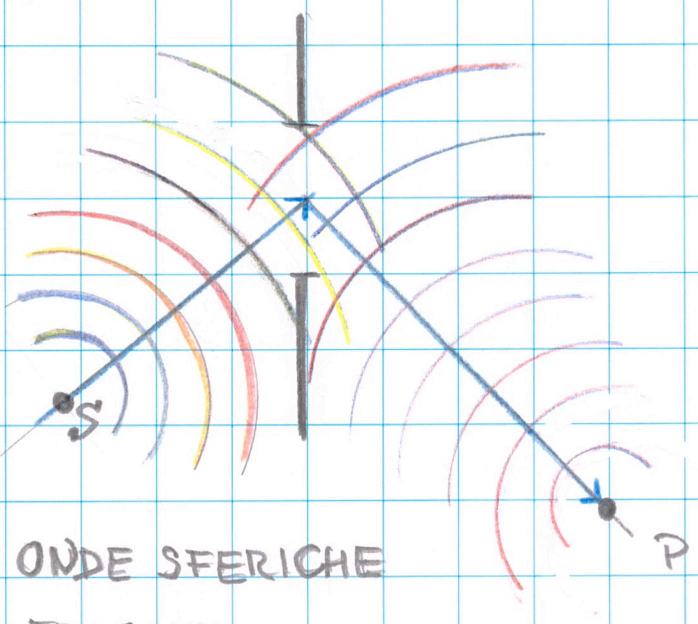
DOVE $U_A = \dfrac{U_0 e^{ikr'}}{r'}$ (FUNZIONE D'ONDA SULL'APERTURA)

- OSSERVAZIONE
  - IL DISTURBO OTTICO IN P È LA SOVRAPPOSIZIONE DI TUTTE LE ONDE GENERATE DAGLI ELEMENTI D'AREA da.
  - NELLE CONDIZIONI POSTE PRIMA NON CI SONO ONDE REGRESSIVE
  - IL TERMINE $-i \Rightarrow$ CHE LE ONDE DIFFRATTE SONO SFASATE DI $-\pi/2$ RISPETTO ALLE PRIMARIE.
- DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER E DI FRESNEL

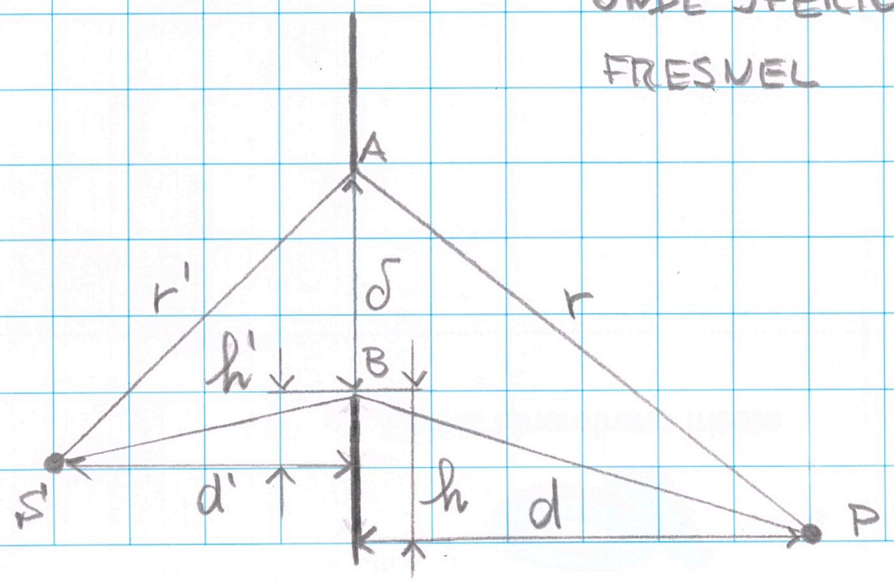
QUALITATIVAMENTE LA DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER SI VERIFICA QUANDO I FRONTI D'ONDA ALL'APERTURA SONO APPROSSIMABILI A ONDE PIANE. QUELLA DI FRESNEL SI VERIFICA CON ONDE SFERICHE.



ONDE PIANE FRAUNHOFER



ONDE SFERICHE FRESNEL



PER DERIVARE UN CRITERIO ANALITICO PER STABILIRE LE CONDIZIONI DI DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER RISPETTO FRESNEL POSSIAMO FARE RIFERIMENTO ALLA FIGURA DELLA PAGINA PRECEDENTE. PER QUESTO CALCOLIAMO LA DIFFERENZA DEI PERCORSI $\overline{SAP}$ E $\overline{SBP}$.

$$\Delta r = \sqrt{d^2 + (h+\delta)^2} - \sqrt{d^2 + h^2} \; ; \; \Delta r' = \sqrt{d'^2 + (h'+\delta)^2} - \sqrt{d'^2 + h'^2}$$

DEFINIAMO $\Delta = \Delta r' + \Delta r$ LA VARIAZIONE DI PERCORSO COMPLESSIVA $= \left(d'^2 + (h'+\delta)^2\right)^{1/2} + \left(d^2 + (h+\delta)^2\right)^{1/2} - \left(d'^2 + h'^2\right)^{1/2} - \left(d^2 + h^2\right)^{1/2}$

SUPPONENDO $\delta \ll d, d'$ PER ESPANSIONE BINOMIALE IN TERMINI di δ OTTENIAMO $\Delta \cong \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d}\right)\delta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right)\delta^2 + \dots$

DA CUI IL TERMINE QUADRATICO E' ESSENZIALMENTE UNA MISURA DELLA CURVATURA DEL FRONTE D'ONDA. L'ONDA SI PUO' CONSIDERARE PIANA SE QUESTO TERMINE E' TRASCURABILE RISPETTO ALLA LUNGHEZZA D'ONDA $\lambda \gg$. QUESTO E' IL CRITERIO PER DEFINIRE LA DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER.

- DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER PER APPLICARE L'EQ. DI F-K AL CALCOLO DELLA DIFFRAZIONE CONSIDERIAMO LE SEGUENTI SEMPLIFICAZIONI:

(•) L'ALLARGAMENTO ANGOLARE DELLA LUCE DIFFRATTA E' SUFFICIENTEMENTE PICCOLO E QUINDI IL FATTORE DI OBLIQUITÀ $[\cos(\hat{n}, \bar{r}) - \cos(\hat{n}, \bar{r}')]$ NON VARIA APPREZZABILMENTE SOPRA L'APERTURA E PUO' ESSERE CONSIDERATO COST. AI FINI DELL'INTEGRAZIONE.

(••) LA QUANTITÀ $e^{ikr'}/r'$ E' CIRCA COSTANTE AI FINI DELLA INTEGRAZIONE.

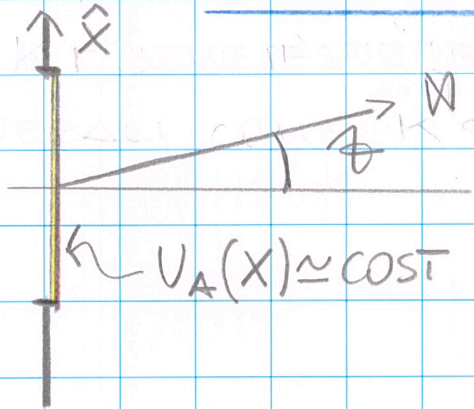
(•••) LA VARIAZIONE DEL FATTORE CHE RIMANE DA INTEGRARE e^{ikr}/r SULL'APERTURA E' DATA

PRINCIPALMENTE DALL'ESPONENTE E QUINDI IL TERMINE $1/r$ PUO' ESSERE SOSTITUITO DAL SUO VALORE MEDIO E CONSIDERATO COST AI FINI DELL'INTEGRAZIONE. DI CONSEGUENZA LA FORMULA DI FRESNEL-KIRCHHOFF SI RIDUCE A

$$\boxed{U_P \cong C \int_{\Sigma_1} e^{ikr}\, da}$$

DOVE C RAPPRESENTA I TERMINI COST.

• OSSERVAZIONE. L'INTERPRETAZIONE DI QUESTA EQ. INTEGRALE SI BASA SUL FATTO CHE, STANTI LE APPROSIMAZIONI FATTE, LA DISTRIBUZIONE DELLA LUCE DIFFRATTA E' OTTENUTA INTEGRANDO IL TERMINE DI FASE SULL'AREA DELLA APERTURA. LA COST. C CONTIENE IL TERMINE $U_A = U_0 \frac{e^{ikr'}}{r'}$ CHE RAPPRESENTA IL CAMPO SCALARE GENERATO DA S' SULLA APERTURA. IL TERMINE e^{ikr} RAPPRESENTA LA FASE SPAZIALE DEL CAMPO CHE PRODURRA' LA DIFFRAZIONE IN P. UNA FORMA PIU' ESPLICITA IN COORDINATE CARTESIANE E PER UNA DIFFRAZIONE 1D



$$\Rightarrow U_P \cong C \int_{\Sigma_1} e^{i\beta x}\, dx$$

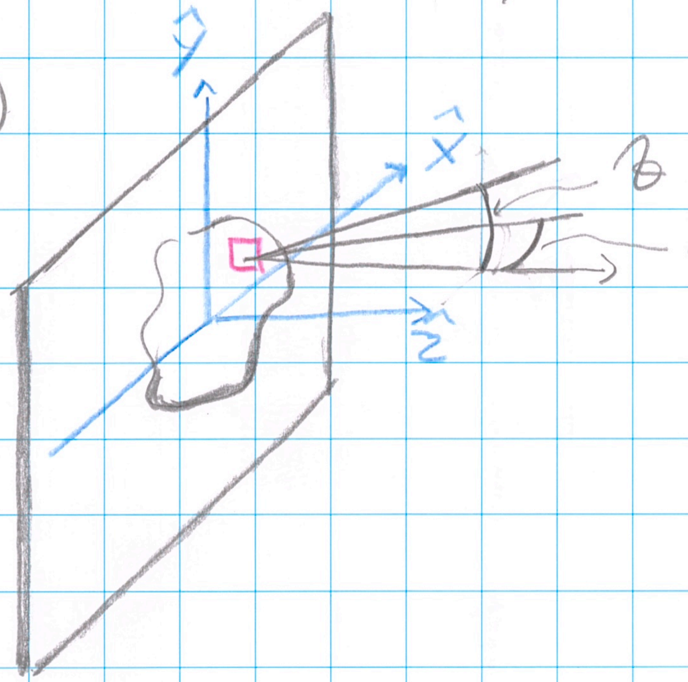
CON $\beta = K \sin\theta$

DA QUESTA RELAZIONE RISULTA CHIARO CHE LA DISTURBANZA OTTICA IN P, NELLA DIFFRAZIONE DI ONDE PIANE (FRAUNHOFER), E' LA TRASFORMATA DI FOURIER SPAZIALE DELLA FUNZIONE AMPIEZZA DI CAMPO U_A SULLA APERTURA. IN REALTA' QUESTA VA ESTESA A UN SISTEMA 2D PER RAPPRESENTARE

UN CASO PIÙ GENERALE

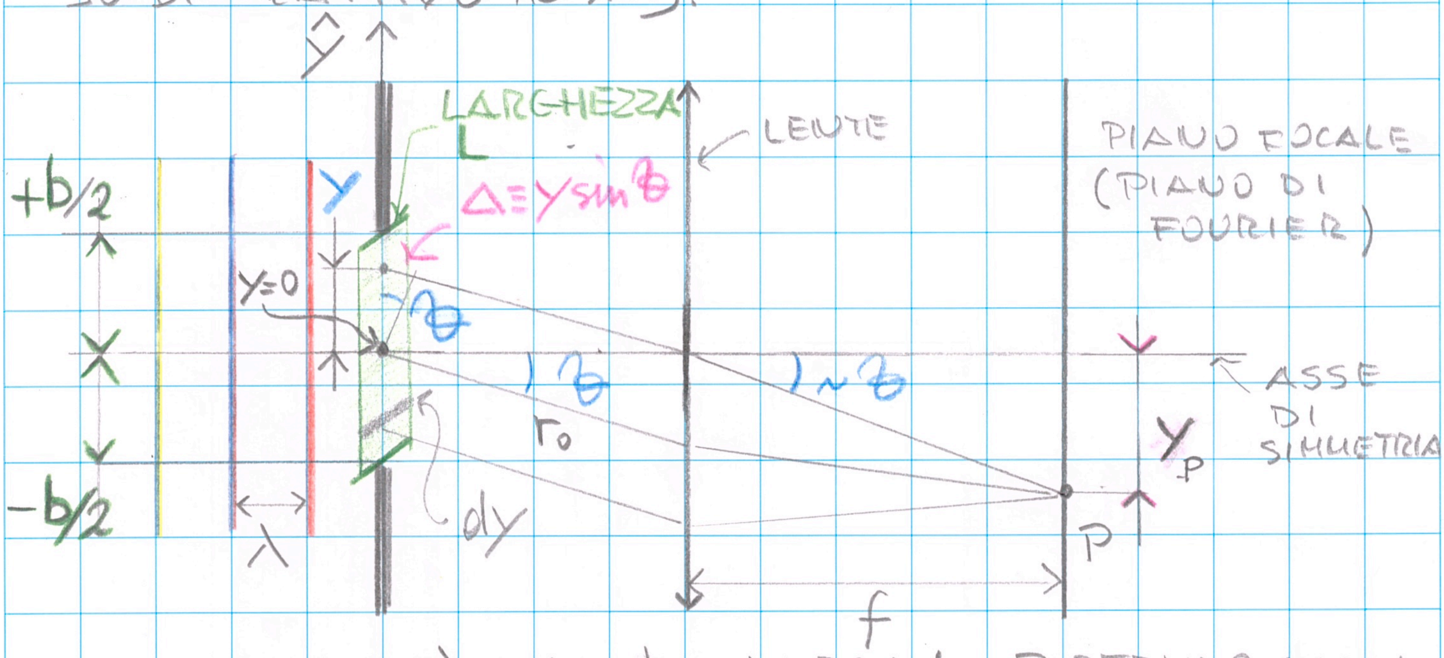
$$U_P = C' \int e^{i(\beta_x X + \beta_y Y)} dx\,dy$$ DOVE C' COMPRENDE

$U_A(X,Y)$



$\beta_x = K \sin\varphi$
$\beta_y = K \sin\theta$

- FENDITURA SINGOLA QUESTO E' IL CASO DI UN PROCESSO DIFFRATTIVO IN 1-D.



LA FENDITURA E' LUNGA b E LARGA L. PARTENDO DALLA FORMULA DI FRESNEL-KIRCHHOFF IL CALCOLO DELLA DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER E' DI FATTO UN CALCOLO INTEGRALE DELL'AREA DELLA APERTURA. L'ELEMENTO D'AREA $da = L\,dy$, MENTRE $r = r_0 + y \sin\theta$ LA FORMULA DI F-K ⇒

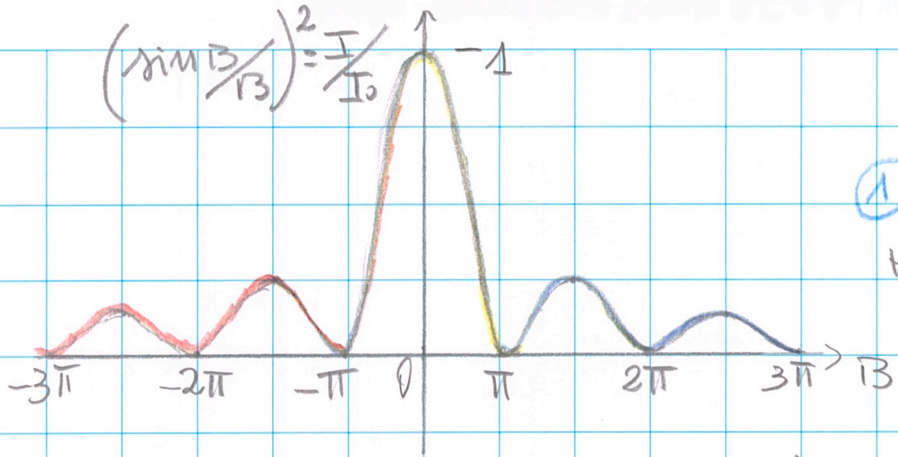
$$U_P = C e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik\sin\theta y} L\, dy$$ DOVE r_0 È IL VALORE DI r A $y=0$, E θ È L'ANGOLO MOSTRATO IN FIGURA. QUESTO INTEGRALE VALE

$$U_P = 2C e^{ikr_0} L \frac{\sin(1/2\, kb\sin\theta)}{k\sin\theta} = C e^{ikr_0} L \frac{b\sin(1/2\, kb\sin\theta)}{1/2\, bk\sin\theta} \rightarrow$$

$$\boxed{= C' \frac{\sin B}{B}}$$ CON $B = \frac{1}{2} kb\sin\theta$ E $C' = \underbrace{CbLe^{ikr_0}}_{\sim COST}$.

QUINDI $C' \frac{\sin B}{B}$ È L'AMPIEZZA TOTALE DELLA LUCE DIFFRATTA IN UNA DIREZIONE DEFINITA DA B. QUESTA LUCE È FOCALIZZATA DALLA LENTE SUL PIANO FOCALE DOVE L'IRRADIANZA È DATA DA $I = |U|^2 = I_0 \left(\frac{\sin B}{B}\right)^2$ DOVE $I_0 = |C'|^2$ CHE È L'IRRADIANZA PER $\theta = 0$. QUESTO RAPPRESENTA ANCHE IL VALORE MAX. LA RELAZIONE SOPRA LA POSSIAMO ANCHE SCRIVERE COME $I = I_0 \operatorname{sinc}^2(B)$. QUESTA RELAZIONE CI PERMETTE DI TRACCIARE L'ANDAMENTO DI I RISPETTO ALL'ASSE DI SIMMETRIA IN FUNZIONE DI y. LA FUNZIONE SINC HA LA PROPRIETÀ DI $\rightarrow 1$ QUANDO IL SUO ARGOMENTO $\rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{B\to 0} \operatorname{sinc} B = 1$, MENTRE PER $\sin B = 0$ LA $\operatorname{sinc} = 0$. $\Rightarrow B = \frac{1}{2} kb\sin\theta = m\pi$ CON $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

$m = 0$ NON È INCLUSO PER LA RAGIONE ESPOSTA SOPRA $\Rightarrow$ $U_P \to 0$ PER $m\lambda = b\sin\theta \Rightarrow m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ DALLA FIGURA NOTIAMO CHE LA DISTANZA DEL PUNTO P SULLO SCHERMO DALL'ASSE DI SIMMETRIA, DENOTATA CON $y_P \simeq f\sin\theta$ DOVE SI È USATA L'APPROSSIMAZIONE $\sin\theta \simeq \tan\theta$. PER QUANTO DETTO PRIMA IL MAX DI I SI HA $\theta = 0$ MENTRE I MINIMI SONO A $y_{P\,min} \simeq \frac{m\lambda f}{b}$



- **OSSERVAZIONE**

(1) LA FUNZIONE SINC(β) HA IL MAX PER $\beta = 0$, MENTRE GLI ALTRI MAX DECRESCONO ALL'AUMENTARE DI β. (2) $\sin\theta = \frac{m\lambda}{b}$ $\Rightarrow$ A UNA FISSATA λ LA FIGURA DI DIFFRAZIONE ($\sin\theta$) VARIA IN MODO INVERSO DI b E L'AREA DEL MAX CENTRALE È PROPORZIONALE ALL'AREA DELLA APERTURA. $\Rightarrow$ I MAX (A PARTE QUELLO CENTRALE) COME I MINIMI SONO DIVERSI PER λ DIVERSE (A b FISSATA). LE DISTANZE TRA I MAX (MIN) AUMENTANO MA LE INTENSITÀ DIMINUISCONO E VICEVERSA.

- **ESEMPIO** QUAL È IL RAPPORTO TRA LE IRRADIANZE DEL MAX CENTRALE E IL PRIMO DEI MASSIMI SECONDARI.

$$\frac{I(\beta=0)}{I(\beta=1.43\pi)} = \frac{\left(\sin^2\beta/\beta^2\right)_{\beta=0}}{\left(\sin^2\beta/\beta^2\right)_{\beta=1.43\pi}} = \frac{1}{\left(\sin^2\beta/\beta^2\right)_{\beta=1.43\pi}} = \frac{\beta^2}{\sin^2\beta} \Rightarrow$$

$$= \frac{20.18}{0.952} \cong 21.2$$