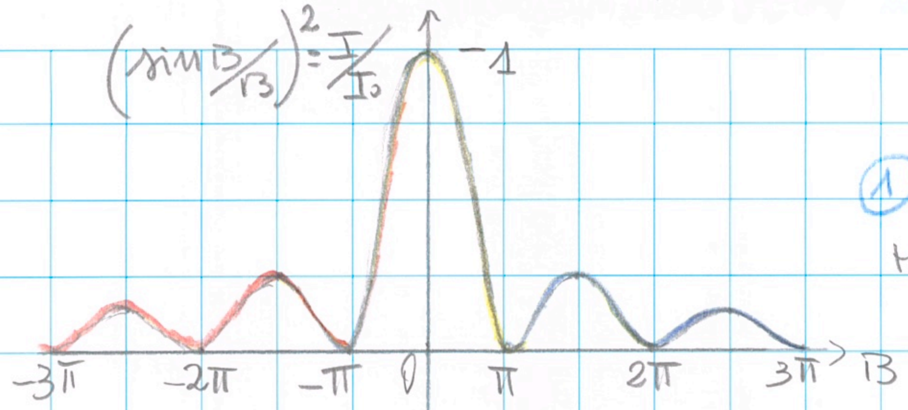


• OSSERVAZIONE

① LA FUNZIONE SINC(B) HA IL MAX PER B=0, MENTRE GLI ALTRI MAX DECRESCONO ALL'AUMENTARE DI B. ② $\sin\theta = \frac{m\lambda}{b}$ ⇒ A UNA FISSATA λ L'INTENSITÀ DEI MASSIMI DI IRRADIANZA È INVERSAMENTE PROPORZIONALE A b. L'AREA DEL MAX CENTRALE È PROPORZIONALE ALL'AREA DELLA APERTURA. ③ I MAX (A PARTE QUELLO CENTRALE) COME I MINIMI SONO DIVERSI PER λ DIVERSE (A b FISSATA). ④ DISTANZE TRA I MAX (I MIN) AUMENTANO, MA LE INTENSITÀ DIMINUISCONO E VICEVERSA QUANDO b DIMINUISCE.

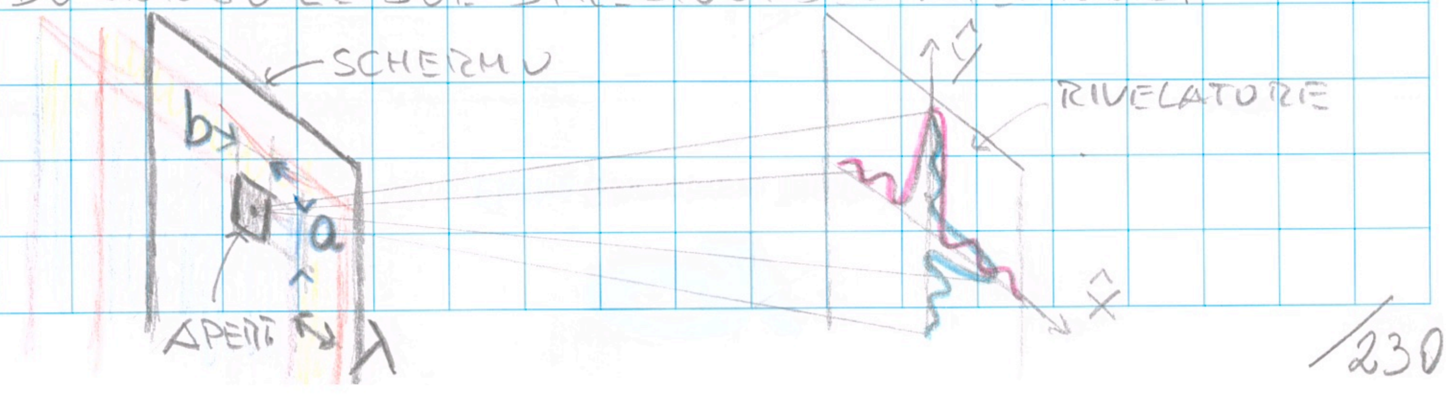
• ESEMPIO QUAL È IL RAPPORTO TRA LE IRRADIANZE DEL MAX CENTRALE E IL PRIMO DEI MASSIMI SECONDARI.

$$\frac{I(B=0)}{I(B=1.43\pi)} = \frac{\left(\sin^2 B / B^2\right)_{B=0}}{\left(\sin^2 B / B^2\right)_{B=1.43\pi}} = \frac{1}{\left(\sin^2 B / B^2\right)_{B=1.43\pi}} = \frac{B^2}{\sin^2 B} \Rightarrow$$

$$= \frac{20.18}{0.952} \simeq 21.2$$

• APERTURA RETTANGOLARE E CIRCOLARE

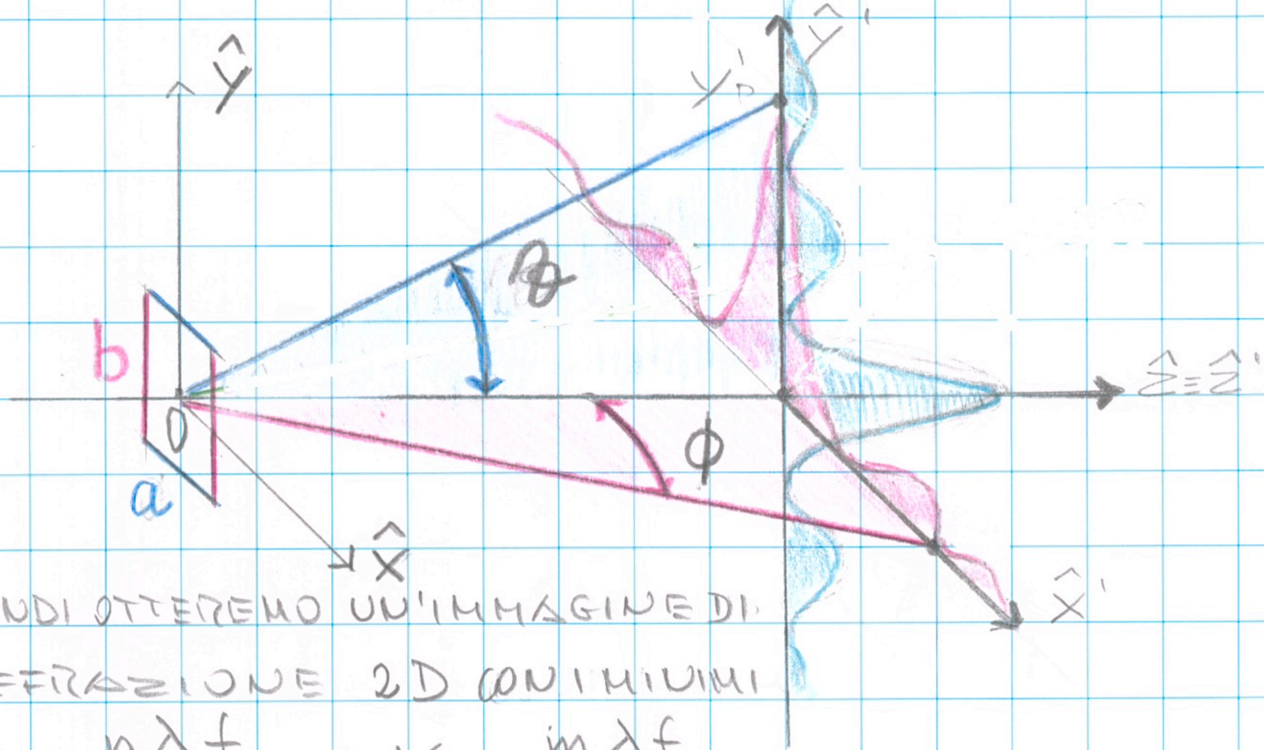
LA DIFFRAZIONE DA APERTURA RETTANGOLARE DERIVA DA QUELLA DELLA FENDITURA MONODIMENSIONALE INTEGRANDO LUNGO LE DUE DIREZIONI DELL'APERTURA.



• PROBLEMA L'IMMAGINE DELLA DIFFRAZIONE IN ROSA È DOVUTA AL LATO "a" O "b" DELLA FENDITURA? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA.

IN QUESTO CASO OTTEREMO DUE DISTRIBUZIONI DI INTENSITÀ, UNA DOVUTA ALLE DIMENSIONI "a" E L'ALTRA ALLE DIMENSIONI "b". ⇒

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2} k a \sin\phi \text{ e } \beta = \frac{1}{2} k b \sin\theta .$$

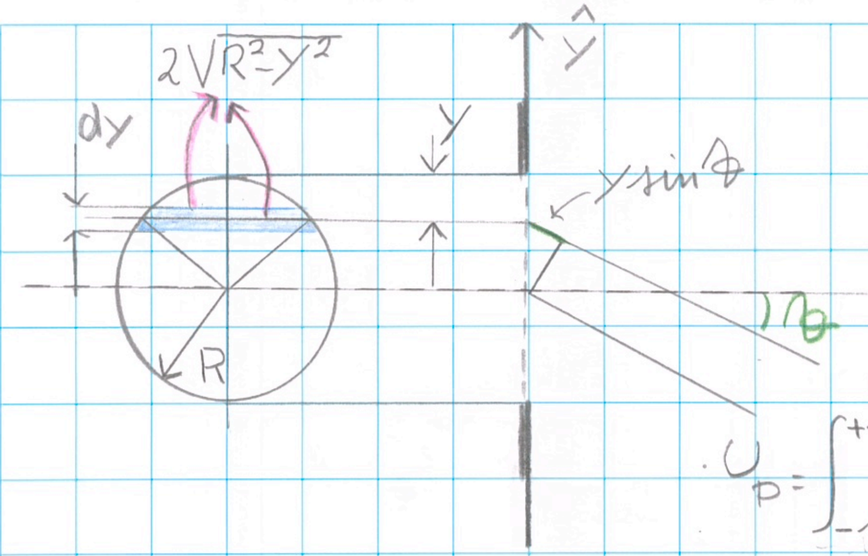


QUINDI OTTEREMO UN'IMMAGINE DI DIFFRAZIONE 2D CON I MINIMI

$$x_n = \frac{n\lambda f}{b} \; ; \; y_m = \frac{m\lambda f}{a}$$

• APERTURA CIRCOLARE IN QUESTO CASO SI DEVE INTEGRARE $U_P = C \int_{\Sigma'} e^{ikr} da$ SU UN ELEMENTO D'AREA DATO DA $2\sqrt{R^2 - y^2}\, dy$ ⇒

$$U_P = C e^{ikr_0} \int_{-R}^{+R} e^{iky\sin\theta}\, 2\sqrt{R^2 - y^2}\, dy$$



INTRODUCIAMO UN CAMBIAMENTO DI VARIABILI DEFINENDO $u = y/R$ E $\rho = KR \sin\theta$. ALLORA L'INTEGRALE DIVENTA

$$U_p = \int_{-1}^{+1} e^{i\rho u} \sqrt{1-u^2}\, du$$

QUESTO E' UN INTEGRALE STANDARD E IL SUO VALORE E' $\pi J_1(\rho)/\rho$, DOV J_1 E' LA FUNZIONE DI BESSEL DI ORDINE 1 DEL PRIMO TIPO. IL RAPPORTO $J_1(\rho)/\rho \to 1/2$ PER $\rho \to \emptyset$.

- OSSERVAZIONE LE FUNZIONI DI BESSEL SONO LE SOLUZIONI CANONICHE DELLA EQ. DIFFERENZIALE DI $y(x)$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-\alpha^2)y = \emptyset$$ CON α = COMPLESSO ARBIT.

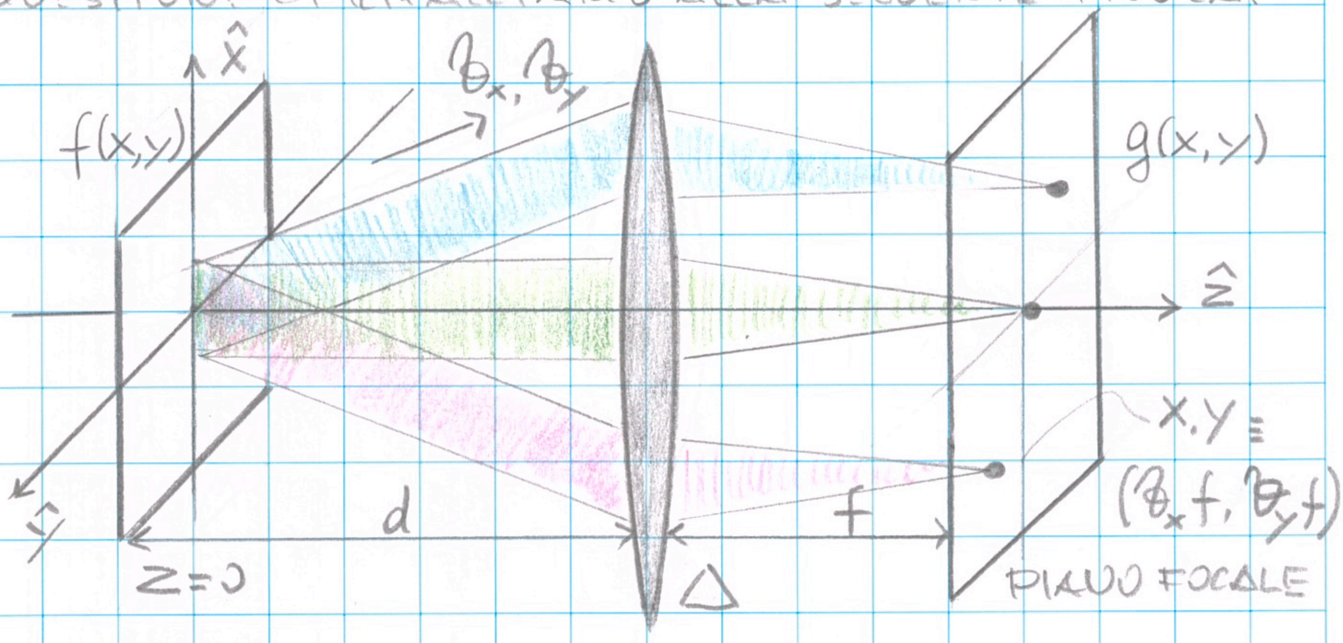
LA DISTRIBUZIONE DELLA IRRADIANZA E' DATA DA

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(\rho)}{\rho}\right]$$ DOVE $I_0 = (C\pi R^2)^2$ CHE E' L'IRRADIANZA PER $\theta = \emptyset$. LA FIGURA DI DIFFRAZIONE HA SIMMETRIA CIRCOLARE E CONSISTE IN UN DISCO CENTRALE LUMINOSO CIRCONDATO DA CORONE CIRCOLARI CONCENTRICHE LUMINOSE/BUIE ALTERNATE DI RAGGIO R CRESCENTE. IL DISCO CENTRALE E' NOTO COME DISCO DI AIRY. IL SUO RAGGIO E' DETERMINATO DAL VALORE DELLA FUNZIONE DI BESSEL DEL PRIMO ORDINE PER $\rho = 3.832$. IL RAGGIO ANGOLARE DEL PRIMO DISCO BUIO E' DATO DA

$$\sin\theta = \frac{3.832}{KR} = \frac{1.22\lambda}{D} \approx \theta \quad \text{CON } D = 2R$$

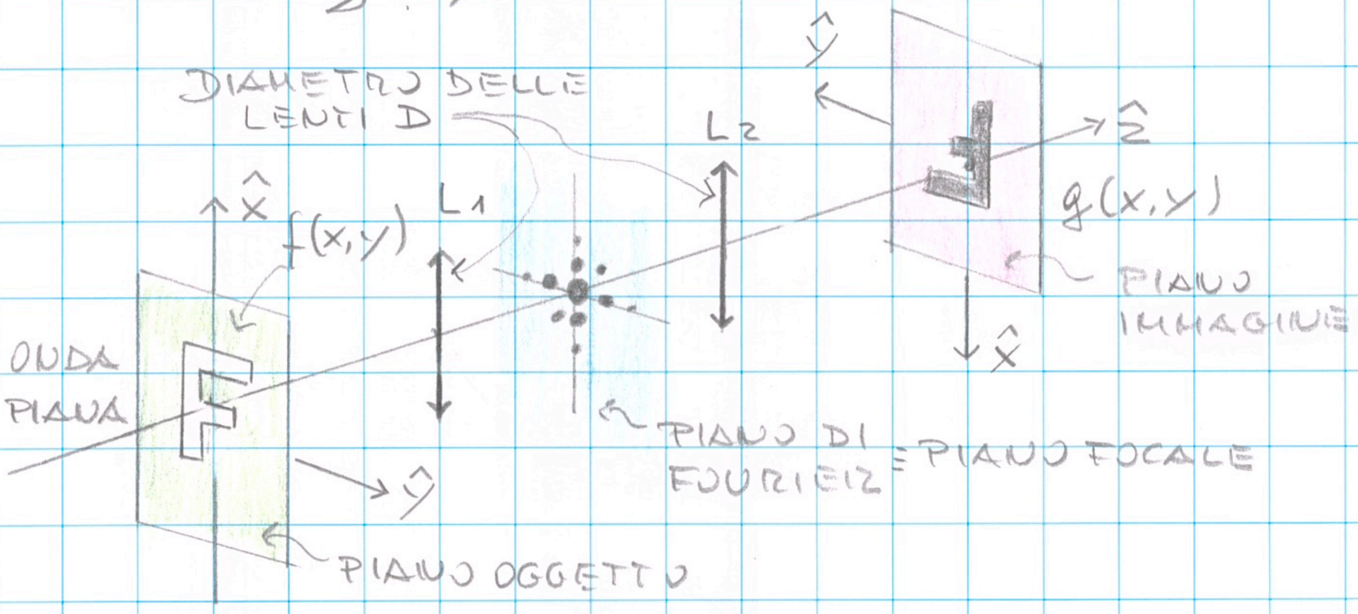
SI INTENDE CHE QUESTA RELAZIONE E' VALIDA PER PICCOLI $\Delta\theta$. ESSA DERIVA DALLA DEFINIZIONE DI $\rho = k r \sin\theta$. ESSA DETERMINA ANCHE IL LIMITE DELLA RISOLUZIONE ANGOLARE DOVUTO A UN PROCESSO DIFFRATTIVO.

- RISOLUZIONE OTTICA L'IMMAGINE DI UN DISTANTE PUNTO SORGENTE CHE SI FORMA SU UN PIANO FOCALE DI UN SISTEMA OTTICO E' DI FATTO UNA FIGURA DI DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER PER LA QUALE L'APERTURA E' DETERMINATA DAL DIAMETRO DELLA LENTE. ⇒ L'IMMAGINE E' LA SOVRAPPOSIZIONE DI MOLTI DISCHI DI AIRY. PER CAPIRE MEGLIO LA QUESTIONE CI RIFACCIAMO ALLA SEGUENTE FIGURA.



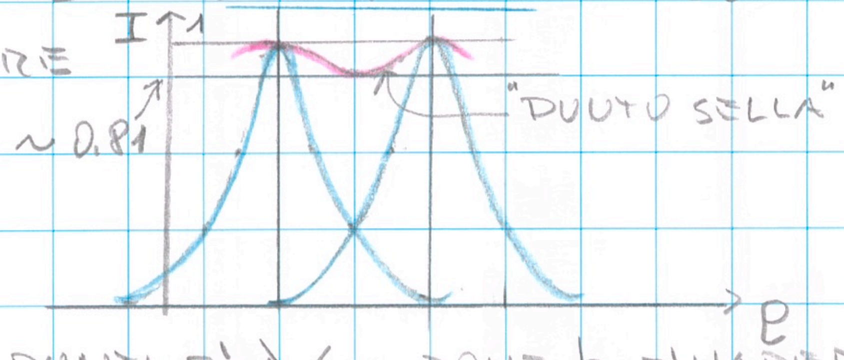
ESSA RAPPRESENTA IN MODO SCHEMATICO COME UNA LENTE (SOTTILE) METTE A FUOCO UN'ONDA PIANA TRAMITE UN PROCESSO DIFFRATTIVO ASSOCIATO CON LE ARMONICHE DI FOURIER DI UNA FUNZIONE $f(x,y)$, CHE RAPPRESENTA L'OGGETTO SUL PIANO $z=0$, NEI PUNTI SUL PIANO FOCALE. L'AMPIEZZA DELLE ONDE PIANE CON DIREZIONE θ_x, θ_y E' PROPORZIONALE ALLA TRASFORMATA DI FOURIER

$\mathcal{F}(f(x,y))$ ED È FOCALIZZATA NEI PUNTI $(x,y) = (\nu_x f, \nu_y f)$ DEL PIANO $g(x,y)$.



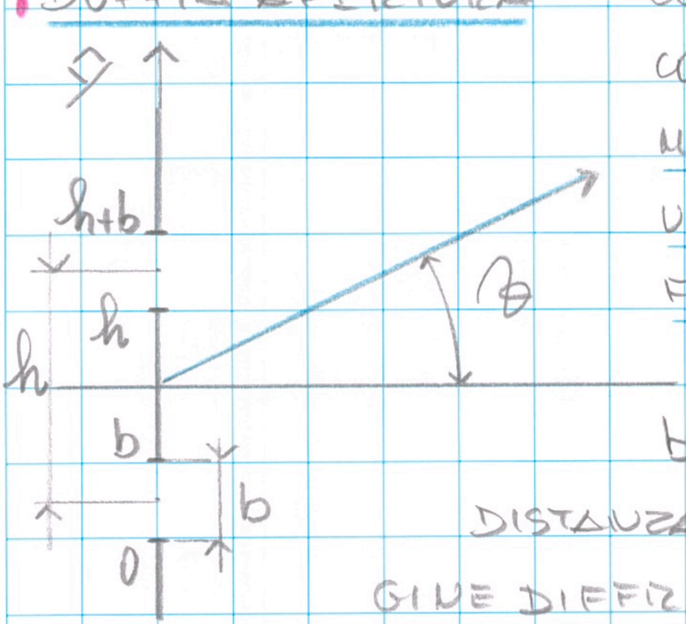
DA QUESTI ESEMPI RISUTA CHIARO CHE UN IMMAGINE DI UN PUNTO SORGENTE CHE SI FORMA SUL PIANO FOCALE DI UN SISTEMA OTTICO È DI FATTO UNA FIGURA DI DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER, RAPPRESENTABILE TRAMITE UNA TRASFORMATA DI FOURIER, PER LA QUALE L'APERTURA È DETERMINATA DAL DIAMETRO DELLA LENTE ⇒ L'IMMAGINE È IL RISULTATO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DI MOLTI DISCHI DI AIRY. LA RISOLUZIONE OTTICA (OVVERO LA POSSIBILITÀ DI DISTINGURE DUE PUNTI È DETERMINATA DALLA DIMENSIONE DEI DISCHI DI AIRY INDIVIDUALI. QUINDI SE "D" È IL DIAMETRO DELLA LENTE L'APERTURA ANGOLARE DI UN DISCO DI AIRY È $\sin\theta \approx 1.22\lambda/D$. QUESTA È ANCHE LA SEPARAZIONE ANGOLARE MINIMA ($\sin\theta \approx \theta$) PER DISTINGUERE (RISOLVERE) DUE PUNTI SORGENTE, POICHÉ A QUESTA SEPARAZIONE ANGOLARE IL MAX CENTRALE DI UN DISCO COINCIDE CON IL MIN DELL'ALTRO. QUESTO È NATURALMENTE UN "CRITERIO", OVVERO UNA

PER DEFINIRE LA RISOLUZIONE OTTICA. TALE CRITERIO E' DETTO DI RAYLEIGH. PER UN'APERTURA RETTANGOLARE,



SECONDO QUESTO CRITERIO, LA MINIMA SEPARAZIONE ANGOLARE PER DISTINGUERE DUE PUNTI E' λ/b, DOVE b E' L'APERTURA. IN QUESTO CASO L'INTENSITA' AL PUNTO SELLA E' $8/\pi^2 \cong 0.81$.

- DOPPIA APERTURA



CONSIDERIAMO ORA UN SISTEMA COSTITUITO DA DUE APERTURE MONODIMENSIONALI (DI FATTO UN SISTEMA SIMILE ALL'INTERFEROMETRO DI YOUNG. LE APERTURE SONO DI AMPIEZZA b E SONO SEPARATE DA UNA DISTANZA h. IL CALCOLO DELLA IMMAGINE DIFFRATTA SEGUE LO STESSO PROCEDIMENTO USATO PER IL CALCOLO DELLA DIFFRAZIONE 1D. L'INTEGRALE CHE DESCRIVE LA DIFFRAZIONE E' PERCIO' DATO DA

$$\int_{\Sigma} e^{iky\sin\theta}\,dy = \int_0^b e^{iky\sin\theta}\,dy + \int_h^{h+b} e^{iky\sin\theta}\,dy =$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta}\left(e^{ikb\sin\theta} - 1 + e^{ik(h+b)\sin\theta} - e^{ikh\sin\theta}\right) =$$

$$= \left(\frac{e^{ikb\sin\theta}-1}{ik\sin\theta}\right)\left(1+e^{ikh\sin\theta}\right) = 2b\,e^{i\beta}\,e^{i\gamma}\,\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\gamma$$

DOVE $\beta = \frac{1}{2} kb \sin\theta$ E $\gamma = \frac{1}{2} kh \sin\theta$. L'IRRADIANZA CORRISPONDENTE E'

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\gamma$$

INTERFERENZA

DIFFRAZIONE

IL TERMINE $(\sin\beta/\beta)^2$ MODULA L'IRRADIANZA I_0 COME NEL CASO DELLA FENDITURA SINGOLA E COSTITUISCE L'INVILUPPO DEI MASSIMI DELL'IRRADIANZA. IL TERMINE $\cos^2\gamma$ RAPPRESENTA LE FRANGE DI INTERFERENZA. RESTA DA DEFINIRE COSA INTENDIAMO QUI PER I_0. NEL CASO DELLA FENDITURA SINGOLA I_0 E' LA DENSITÀ DEL FLUSSO DI ENERGIA NELLA DIREZIONE $\theta = 0°$. $I = \langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$. QUINDI PER N FENDITURE SI HA $\langle E_{0\,TOT} \rangle = N \langle E_{0i} \rangle \Rightarrow$ $I(\theta)$ PER $\theta = \emptyset$ i.e. $I(0) = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_{0\,TOT}^2 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 N^2 E_{0i}^2$ CHE PER UN'ONDA PIANA E FENDITURE DI UGUALE APERTURA DIVENTA $E_{0i} = E_0 \Rightarrow I(0) = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 N^2 E_0^2 \Rightarrow$ $I(0) \propto N^2 E_0^2 = I_{A0}$. QUINDI $I(0)$ E' L'IRRADIANZA OLTRE LE FENDIDURE. (VEDI OPTICS - HECHT. PAG. 462)

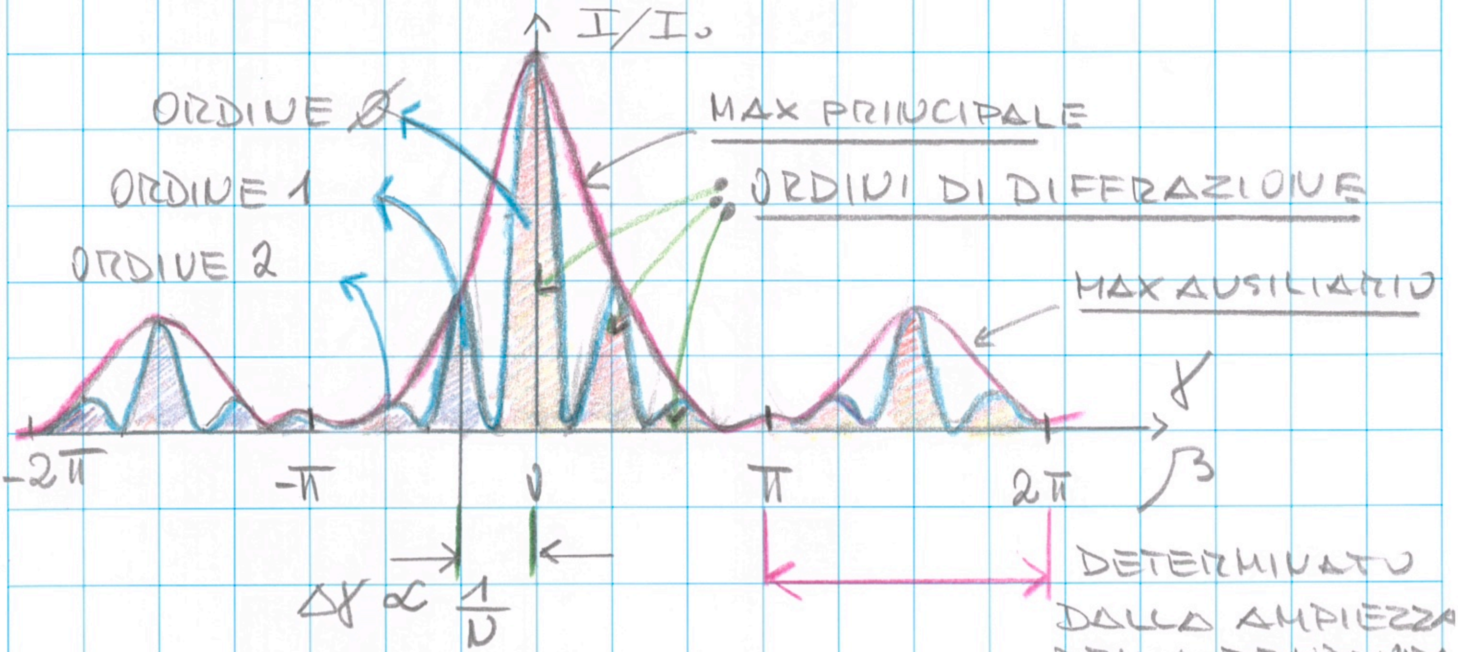
- OSSERVAZIONE. NEL TESTO DEL FOWLES LA I_0 VA IDENTIFICATA CON $I(0)$. NEL CASO DI UNA FENDITURA $I(0) = N^2 I_0 \Rightarrow I(0) = I_0$ MA PER DUE O PIÙ FENDITURE $I_0 = \frac{I(0)}{N^2}$

I MASSIMI DI I SONO DATI DA $\cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ MENTRE IL TERMINE $(\sin\beta/\beta)^2$ RAPPRESENTA L'INVILUPPO DEI MASSIMI. LA FISICA E' CHIARA IL FENOMENO DELL'INTERFERENZA E' MODULATO DALLA DIFFRAZIONE, LA SEPARAZIONE ANGOLARE

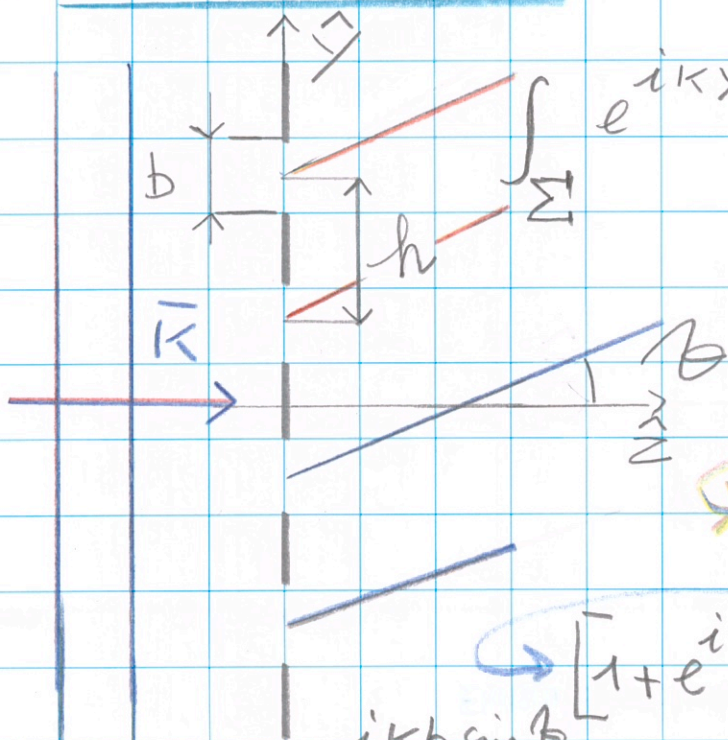
TRA LE FRANGIE È DATA DA $\Delta\gamma = \pi$ CHE APPROSIMATIVAMENTE IN TERMINI DI ϑ RISULTA $\Delta\vartheta \cong \frac{2\pi}{kh} = \frac{h}{\lambda}$. OVVIAMENTE UGUALE A QUELLO OTTENUTO

IN PRECEDENZA PER L'INTERFEROMETRO DI YOUNG

DATO CHE LE POSIZIONI ANGOLARI DEI MAX E MIN. SONO DOVUTE ALL'INTERFERENZA



- FENDITURE MULTIPLE



$$\int_{\Sigma} e^{iky\sin\vartheta}\, dy = \int_0^b + \int_h^{h+b} + \int_{2h}^{2h+b} + \dots + \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iky\sin\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$\frac{e^{ikb\sin\vartheta}-1}{ik\sin\vartheta} \times \left[1 + e^{ikh\sin\vartheta} + \dots + e^{ik(N-1)h\sin\vartheta}\right] =$$

$$= \frac{e^{ikb\sin\vartheta}-1}{ik\sin\vartheta} \times \frac{1-e^{ikNh\sin\vartheta}}{1-e^{ikh\sin\vartheta}} =$$

$$I(\vartheta) = b e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \quad \text{CON } \beta = \frac{1}{2} k b \sin\vartheta$$

DIFFRAZIONE — INTERFERENZA

$\gamma = \frac{1}{2} k h \sin\vartheta$. QUESTA RELAZIONE LA POSSIAMO RISCRIVERE COME $I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2$. NATURALMENTE RAGRUPPIAMO TUTTE LE COST. IN I_0.

TUTTAVIA, COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA $I_0 = \frac{I(\emptyset)}{N^2}$ CHE SAREBBE L'IRRADIANZA DOVUTA AL CAMPO ATTRAVERSO UNA FENDITURA (SUPPONENDO TUTTE LE FENDITURE UGUALI). INFATTI PER $N=1$ $I_0 = I(\emptyset)$. ALLO STESSO RISULTATO SI ARRIVA SE CONSIDERIAMO CHE CONSIDERIAMO CHE $\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2$ DESCRIVE L'INTERFERENZA DOVUTA ALLE FENDITURE. QUANDO $\gamma = 0$ O MULTIPLI DI π L'ESPRESSIONE SI RIDUCE A UNA FORMA INDETERMINATA.

IN EFFETTI POSSIAMO DIMOSTRARE CHE PER $\gamma = 0$ E $\gamma = \pm m\pi$ CON $m = 0, 1, 2, \dots$ SI HANNO DEI MASSIMI, IMPIEGANDO IL TEOREMA DE L'HOPITAL PER OGNI $m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3 \dots$ $\lim_{\gamma \to m\pi} \frac{\sin N\gamma}{\gamma} = \lim_{\gamma \to m\pi} \frac{N \cos N\alpha}{\cos\alpha} = \pm N$

$\Rightarrow$ IRRADIANZA DEI PICCHI SOTTO L'INVILUPPO DEL MASSIMO PRINCIPALE (DOVUTO A $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$) È PROPORZIONALE A N^2.

DA CUI DIVIDENDO PER N^2 SI OTTIENE LA RELAZIONE RIPORTATA DAL FOWLES (pag. 123), DOVE IN QUEL CASO $I_0 = I(\emptyset)$ OVVERO È LA DENSITÀ DI FLUSSO COMPLESSIVA CHE PASSA DALLE FENDITURE. SOLO COSÌ SI CONSERVA L'ENERGIA E.M.

• POTERE RISOLUTIVO: LA SEPARAZIONE TRA DUE MASSIMI SI OTTIENE PONENDO $N\gamma = \pi \Rightarrow d\gamma = \frac{\pi}{N} = \frac{1}{2} k h \cos\vartheta \, d\vartheta$

(ESSENDO $\gamma = \frac{1}{2} k h \sin\vartheta$) $\Rightarrow d\gamma = 1 = \frac{N}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} h \cos\vartheta \, d\vartheta$

$$\Rightarrow d\vartheta = \frac{\lambda}{N h \cos\vartheta}$$

$\Rightarrow$ SE N E' MOLTO GRANDE $\Rightarrow$

$d\vartheta$ PICCOLO LA FIGURA DI DIFFRAZIONE E' COSTITUITA DA PICCHI DI INTERFERENZA MOLTO STRETTI CHE CORRISPONDONO AGLI ORDINI $n = 0, \pm 1 \pm 2 \pm \dots$