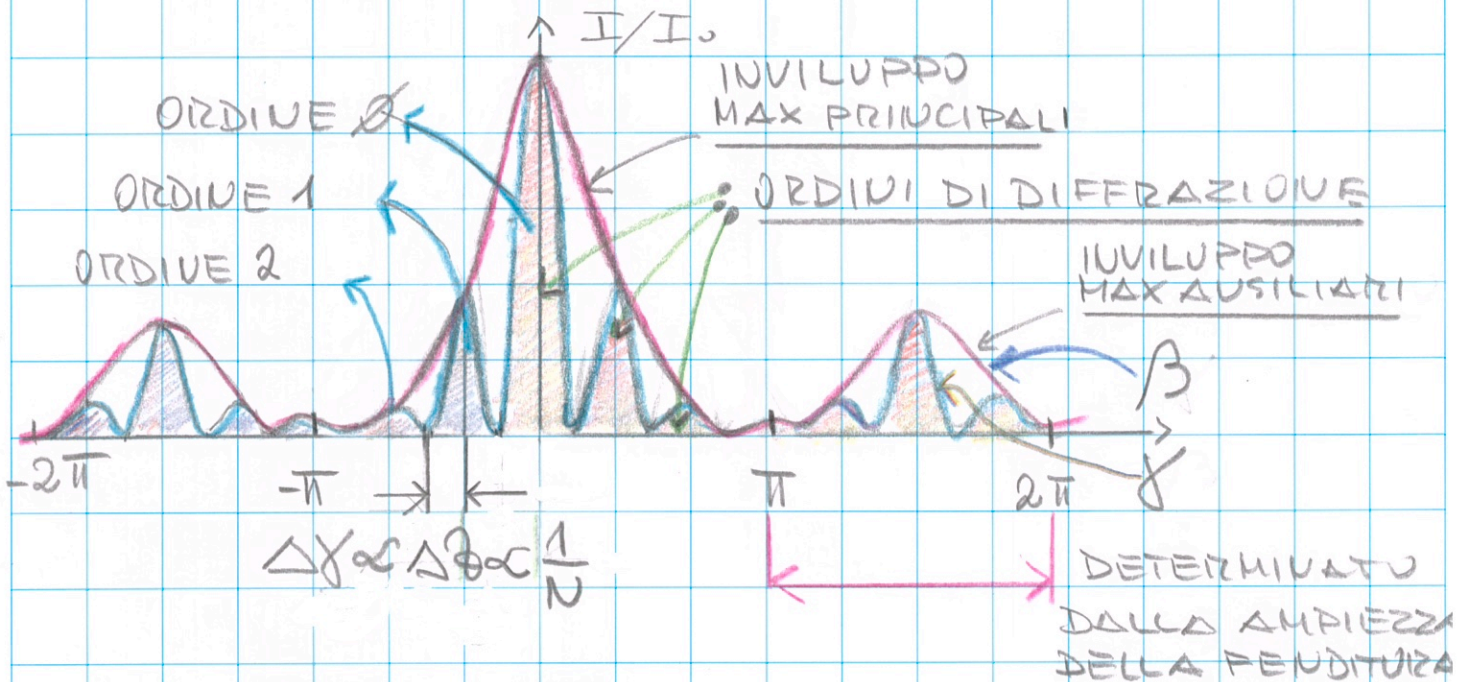


TUTTA LE FRANGIE E' DATA DA $\Delta\gamma = \pi$ CHE APPROSSIMATIVAMENTE IN TERMINI DI θ RISULTA $\Delta\theta \approx \frac{2\pi}{kh} = \frac{h}{\lambda}$, OVVIAMENTE UGUALE A QUELLO OTTENUTO IN PRECEDENZA PER L'INTERFEROMETRO DI YOUNG DATO CHE LE POSIZIONI ANGOLARI DEI MAX E MIN SONO DOVUTE ALL'INTERFERENZA.



FENDITURE MULTIPLE

The diagram shows a series of slits with width b and spacing h . A wave vector k is shown incident at an angle θ . The path difference between rays from adjacent slits is $h \sin \theta$. The total path difference from the first to the last slit is $(N-1)h \sin \theta$.

$$\int_0^b e^{i\kappa y \sin \theta} dy = \int_0^b + \int_h^{h+b} + \int_{2h}^{2h+b} + \dots$$

$$+ \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{i\kappa y \sin \theta} dy =$$

$$= \frac{e^{i\kappa b \sin \theta} - 1}{i\kappa \sin \theta} \times \frac{1 - e^{i\kappa N h \sin \theta}}{1 - e^{i\kappa h \sin \theta}} =$$

$$I(\theta) = b e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 \quad \text{con } \beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta$$

DIFFRAZIONE

INTERFERENZA

$\gamma = \frac{1}{2} k d \sin \theta$. QUESTA RELAZIONE LA POSSIAMO RISCRI-
VERE COME $I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2$. NATURALMENTE
RAGGRUPPIAMO TUTTE LE COST. IN I_0 .

TUTTAVIA, COME ABBIAMO VISTO IN PRECEDENZA

$I_0 = \frac{I(\theta)}{N^2}$ CHE SAREBBE L'IRRADIANZA DOVUTA AL
CAMPO ATTRAVERSO UNA FENDITURA (SUPPONENDO
TUTTE LE FENDITURE UGUALI). INFATTI PER $N=1$

$I_0 = I(\theta)$, ALLO STESSO RISULTATO SI ARRIVA SE

CONSIDERIAMO CHE CONSIDERIAMO CHE $\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2$
DESCRIVE L'INTERFERENZA DOVUTA ALLE

FENDITURE. QUANDO $\gamma = 0$ O MULTIPLI DI π L'ESPRES-
SIONE SI RIDUCE A UNA FORMA INDETERMINATA,

IN EFFETTI POSSIAMO DIMOSTRARE CHE PER $\gamma = 0$

E $\gamma = \pm m\pi$ CON $m = 0, 1, 2, \dots$ SI HANNO DEI MASSIMI.

IMPIEGANDO IL TEOREMA DE L'HOPITAL PER OGNI

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \lim_{\gamma \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\gamma}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow m\pi} \frac{N \cos N\gamma}{\cos \gamma} = \pm N$$

⇒ IRRADIANZA DEI PICCHI SOTTO L'INVILUPPO DEL
MASSIMO PRINCIPALE (DOVUTO A $\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$) È
PROPORZIONALE A N^2 .

DA CUI DIVIDENDO PER N^2 SI OTTIENE LA RELAZIO-
NE RIPORTATA DAL FOYLES (FIG. 123), DOVE

IN QUEL CASO $I_0 = I(\theta)$ OVVERO È LA DENSITA'
DI FLUSSO COMPLESSIVA CHE PASSA DALLE FENDITU-
RE. SOLO COSÌ SI CONSERVA L'ENERGIA E.M.

● POTERE RISOLUTIVO: LA DIFFERENZA ANGOLARE $d\theta$

TRA IL PICCO E IL MINIMO DI UN MASSIMO DI INTERFERENZA PRINCIPALE È OTTENUTO PONEENDO $N\delta = \pi \Rightarrow$ (ESSEN-

DO $\delta = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} h \cos\theta$) $d\delta = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} h \cos\theta d\theta = \frac{\pi}{N} \Rightarrow$

$d\theta = \frac{\lambda}{2 h \cos\theta} \Rightarrow$ SE N È MOLTO GRANDE $\Rightarrow d\theta$ È MOLTO PICCOLO E LA DIFFRAZIONE CONSISTE

IN UNA SERIE DI FRANGE MOLTO STRETTE I CUI PICCHI SONO DATI DALLA RELAZIONE $m\lambda = h \sin\theta$ CON

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ DA QUESTA RELAZIONE OTTIENIAMO

$m d\lambda = h \cos\theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{m d\lambda}{h \cos\theta} \Rightarrow$

$\Delta\theta = \int_{\theta_{\lambda_1}}^{\theta_{\lambda_2}} d\theta = \frac{m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda}{h \cos\theta} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{m \Delta\lambda}{h \cos\theta}$ QUESTA

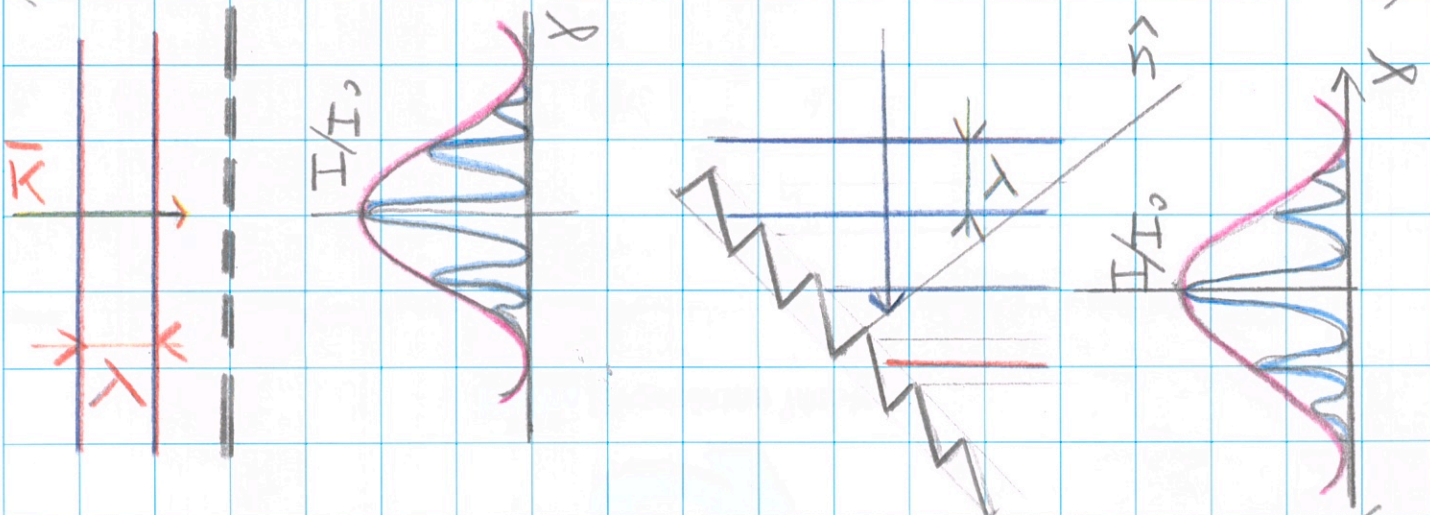
RAPPRESENTA LA SEPARAZIONE ANGOLARE NELLO SPETTRO DI DIFFRAZIONE TRA DUE MASSIMI PRINCIPALI DELLO STESSO ORDINE (STESSO m)

DI DUE ONDE E.M. λ_1 E λ_2 . SE PRO-BONA-FIDE ASSUMIAMO CHE UN SISTEMA A N FEDITUDE

(QUINDI UN SISTEMA DIFFRATTIVO IN TRASMISSIONE)

È EQUIVALENTE A UN RETICOLO DI DIFFRAZIONE

(QUINDI UN SISTEMA DIFFRATTIVO IN RIFLESSIONE)



ALLORA POSSIAMO DEFINIRE IL POTERE RISOLUTIVO DI UN RETICOLO (EQUIVALENTE A UN SISTEMA A N FENDITURE) CON N ELEMENTI DISPERSIVI COMBINANDO

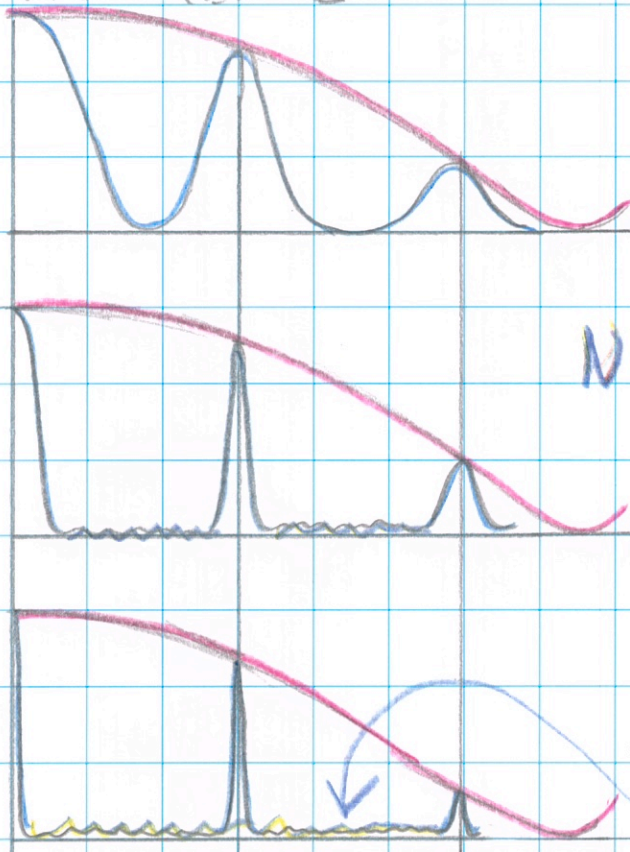
$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{N h \cos\theta} = \frac{m\Delta\lambda}{h \cos\theta} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \text{ È LA DEFINIZIONE}$$

DI POTERE RISOLUTIVO $\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \Rightarrow$ IL POTERE RISOLUTIVO AUMENTA LINEARMENTE CON M (ORDINE DEL PICCO DI DIFFRAZIONE) E CON N (NUMERO DEGLI ELEMENTI DIFFRATTIVI), IN APPARENZA SEMBREREBBE PER OPERARE CON POTERI RISOLUTIVI ELEVATI CONVERREBBE ANDARE A ALTI VALORI DI M, TUTTAVIA, AD ALTI VALORI DI M L'INTENSITA' DIFFRATTA DIMINUISCE SEGUENDO L'INVILUPPO $(\sin\theta/\theta)^2$ E QUINDI IL RAPPORTO SEGNALE RUMORE (S/N) DEL RIVELATORE, QUINDI TIPICAMENTE SI OPERA UTILIZZANDO IL MAX PRINCIPALE CON $m=1$.

• OSSERVAZIONE POSSIAMO ORARI ASSUMERE PER IL CASO DELLA DIFFRAZIONE CON N ELEMENTI DIFFRATTIVI SEGUENTI PUNTI: 1 I MASSIMI PRINCIPALI SI RESTRINGONO ALL'AUMENTARE DI N, 2 LA POSIZIONE DEL PICCO DEI MASSIMI PRINCIPALI È DATA DA $m\lambda = h \sin\theta$ DOVE M DEFINISCE L'ORDINE DEI MASSIMI 3 IL POTERE RISOLUTIVO $\lambda/\Delta\lambda$ AUMENTA LINEARMENTE CON M E N.

ORA CI POSSIAMO CHIEDERE COME APPARE LA FIGURA DI DIFFRAZIONE PER N GRANDI DATO

CHE LA POSIZIONE DEI MASSIMI PRINCIPALI NON CAMBIA MA I PICCHI DIVENTANO SEMPRE PIÙ STRETTI IN PARTICOLARE SIAMO INTERESSATI A CAPIRE CHE FORMA PRENDE L'IRRADIANZA TRA UN MAX DI ORDINE m E UNO DI ORDINE $m+1$, QUALITATIVAMENTE



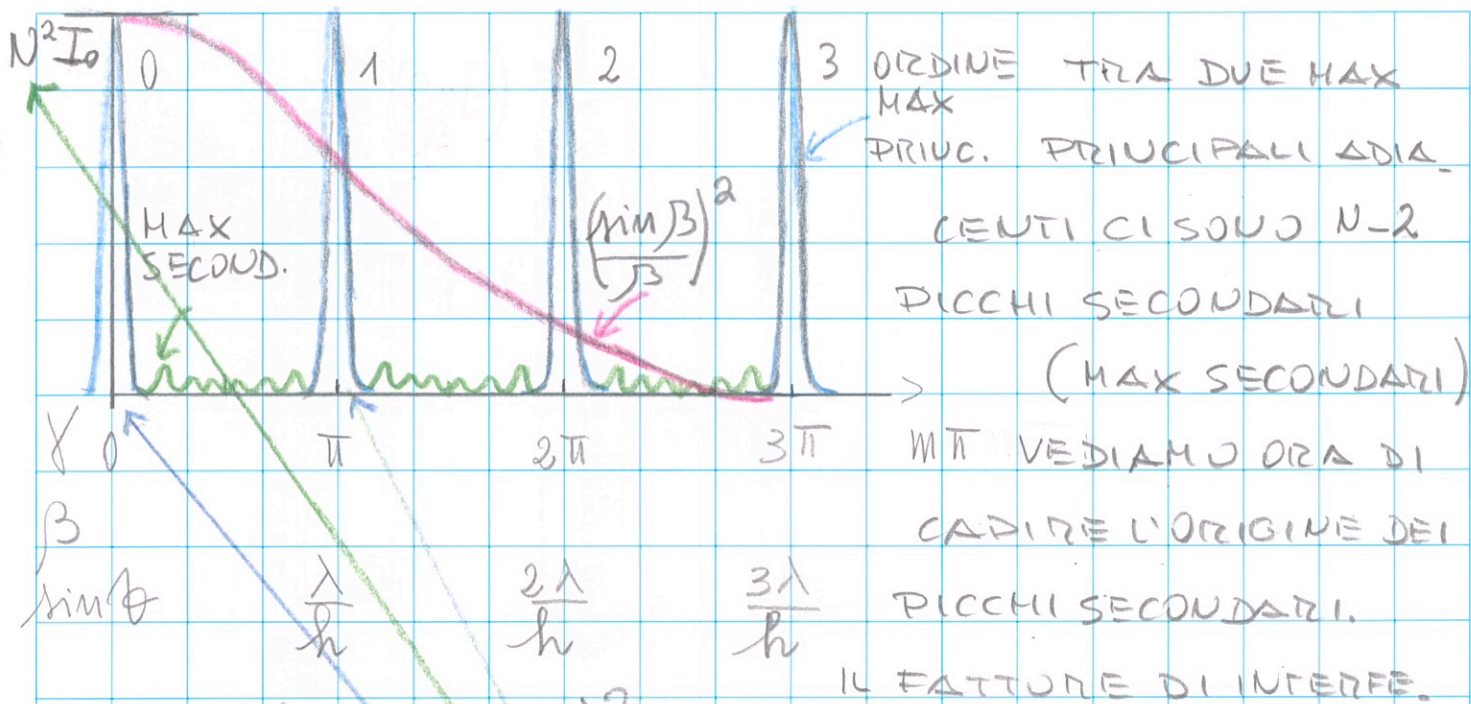
• OSSERVAZIONE IL TERMINE
DI INVILUPPO NON DIPENDE
DA N . I MAX PRINCIPALI
 NON CAMBIANO POSIZIO-
 NE \Rightarrow DATO CHE L'INVILUP-
 PO NON DIPENDE DA N
 E I MAX PRINCIPALI NON
 CAMBIANO POSIZIONE
 IL NUMERO DEI MAX
 PRINCIPALI SOTTO
 L'INVILUPPO E' COST.
 TUTTAVIA, SE I MASSIMI

SI RESTRINGONO, L'IRRADIANZA I_{max} DEL PICCO
 NON CAMBIA E IL NUMERO DEI MAX PRINCIPA-
 LI SOTTO L'INVILUPPO E' COST. DOVE VA A FINI-
 RE L'ENERGIA E.M. QUANDO AUMENTIAMO N ?

LA RISPOSTA E' CHE VA NEI MASSIMI SECONDARI,

COME ABBIAMO VISTO L'IRRADIANZA AD UN MASSIMO
 PRINCIPALE E' $\propto N^2$ E QUESTI SONO CENTRATI A
 VALORI DI $\phi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ PRENDIAMO IL

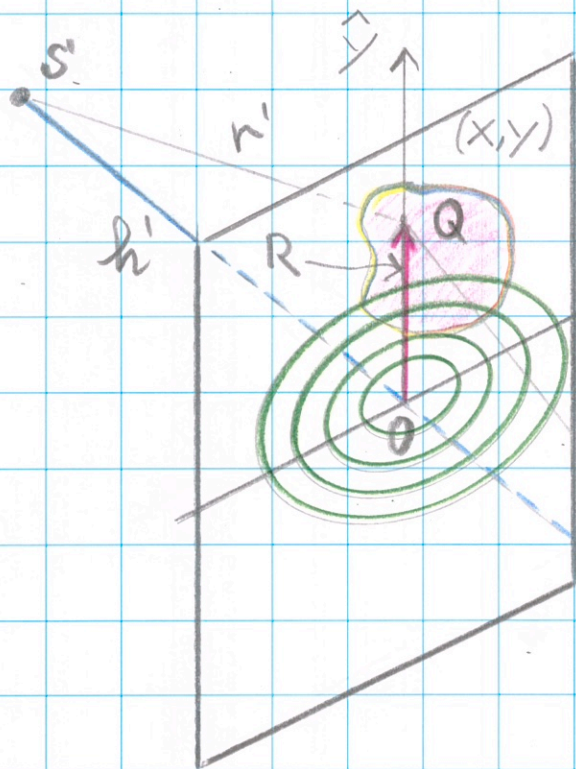
SEGUENTE • ESEMPIO: $N=8$



TENDENZA $\left(\frac{\sin N\phi}{\sin \phi}\right)^2 \rightarrow \infty$ QUANDO $\sin N\phi \rightarrow 0$ MA NON
 IL DENOMINATORE $\sin \phi$. IL NUMERATORE $\rightarrow \infty \Rightarrow \phi = \frac{1}{N} \pi$,
 CON $\phi = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ PER $N=8$ $\sin N\phi \rightarrow 0$ CON ϕ TRA ∞
 $\Delta N=8$ SECONDO LA SEQUENZA $\phi = 0, \pi/8, 2\pi/8, 3\pi/8,$
 $i\pi/2, 5\pi/8, 6\pi/8, 7\pi/8, 8\pi/8$. SI NOTI CHE $\phi=0$ PER $\phi=0$
 E $\phi=\pi$ PER $\phi=N=8$. QUESTI VALORI CORRISPONDONO
 AI MAX PRINCIPALI DI ORDINE 0 E 1. (RICORDIAMO

QUI CHE $\lim_{\phi \rightarrow \pm \pi} \left(\frac{\sin N\phi}{\sin \phi}\right)^2 = \pm N^2$, MENTRE PER I
 SETTE TERMINI INTERMEDI DI $\sin \phi$ NON VA A $\infty \Rightarrow$
 CHE TRA $\phi=0$ E $\phi=\pi$ CI SONO 7 MINIMI ($I \rightarrow 0$)
 $(N-1)$ E DI CONSEGUENZA $N-2=6$ MASSIMI NEL
 CASO DI $N=8$. PER N ARBITRARIO AVREMO $N-1$
 MINIMI (IN TEORIA $I=0$) E $N-2$ MASSIMI SECONDA-
 RI TRA I DUE MASSIMI PRINCIPALI. QUESTO ARGOMENTO
 PUO' ESSERE ESTESO A ϕ TRA N E $2N$ (TRA L'ORDINE
 1 E 2) ETC. ESSA QUIUDI PUO' ESSERE RAPPRESENTATA
 DA $\phi = \frac{\phi \pi}{N}$, $\phi = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. I MAX PRINCIPALI
 SONO $\phi = 0, \pm N, \pm 2N \dots$ E I MAX SECONDARI PER GLI ALTRI ϕ

• DIFFRAZIONE DI FRESNEL IN ACCORDO CON I CRITERI STABILITI IN PRECEDENZA LE CONDIZIONI PER LA DIFFRAZIONE DI FRESNEL SONO DETERMINATE DALLA DISTANZA TRA LA SORGENTE - ELEMENTO DIFFRATTIVO - SCHERMO IN MODO TALE CHE LE ONDE E.M. NON POSSONO PIÙ ESSERE APPROSSIMATE A ONDE PIANE, MA SFERICHE. LA TRATTAZIONE MATEMATICA DELLA DIFFRAZIONE DI FRESNEL È PIÙ COMPLESSA DI QUELLA DI FRAUNHOFER, MA È PIÙ SEMPLICE DA OSSERVARE.



PER COSTRUIRE UN MODELLO MATEMATICO CHE RAPPRESENTI LA DIFFRAZIONE IN ONDE SFERICHE È NECESSARIO PRIMA DEFINIRE LE ZONE DI FRESNEL.

A QUESTO SCOPO CI RIFACCIAMO ALLA FIGURA QUI A FIANCO

DOVE S' È IL PUNTO SORGENTE E P IL PUNTO DI OSSERVAZIONE, LA DISTANZA $\overline{PQS} = r + r'$ SI PUÒ ESPRIMERE IN TERMINI DI R COME SEGUE $r + r' = \left(h^2 + R^2 \right)^{1/2} + \left(h'^2 + R^2 \right)^{1/2}$ CHE TRAMITE UNO SVILUPPO BINOMIALE POSSIAMO APPROSSIMARE A $\cong h + h' + \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) + \dots$ DOVE h E h' SONO LE DISTANZE OP E OS , RISPETTIVAMENTE. ORA IMMAGINIAMO DI SOVRAPPORRE AL

PIANO CHE CONTIENE L'ELEMENTO DIFFRATTIVO DEI CERCHI CONCENTRICI TALI PER CUI $(r+r')$, CHE DEFINISCE R , SIA TALE CHE PER DUE CERCHI CONCENTRICI ADIACENTI SIA $R_1 - R_2 = (r+r')_1 - (r+r')_2 = \lambda/2$, DOVE λ E' LA LUNGHEZZA D'ONDA. QUESTE REGIONI SONO NOTE COME ZONE DI FRESNEL. • OSSERVAZIONE DA QUI RISULTA CHIARO CHE IL MODELLO CHE STIAMO COSTRUIENDO E' RIFERITO AL CASO DI ONDE MONOCROMATICHE.

DALLA RELAZIONE PRECEDENTE SI OTTIENE CHE $R_1 = \sqrt{\lambda L}$, $R_2 = \sqrt{2\lambda L}$, $R_3 = \sqrt{3\lambda L} \dots R_n = \sqrt{n\lambda L}$, CON $L = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\right)^{-1}$.

• ESEMPIO CALCOLIAMO R_1 . DALLA RELAZIONE

$R = R_{n+1} - R_n$ OTTEVIAMO CHE PER $n=0 \Rightarrow R_1 =$ RAGGIO DELLA PRIMA ZONA DI FRESNEL, $R = \lambda/2 = (h+h') + \frac{1}{2} R_1^2 \frac{1}{L} - (h+h') + \frac{1}{2} R_0^2 \frac{1}{L}$. $R_0 = 0 \Rightarrow \lambda/2 = \frac{1}{2} R_1^2 \frac{1}{L} \Rightarrow$

$R_1 = \sqrt{\lambda L}$. SE R_n E R_{n+1} SONO IL RAGGIO INTERNO ED ESTERNO DELLA ZONA $(n+1)$ ALLORA L'AREA E' $\pi R_{n+1}^2 - \pi R_n^2 = \pi R_1^2$. INFATTI $(\pi R_{n+1}^2 + \pi R_n^2) = \pi \lambda L (n+1) + \pi \lambda L n = \pi \lambda L (2n+1)$
 $= \pi \lambda L (n+1 - n) = \pi \lambda L = \pi R_1^2 \Rightarrow$ L'AREA DELLE ZONE

DI FRESNEL E' INDIPENDENTE DAL NUMERO DELLA ZONA MA E' LA STESSA PER TUTTE LE ZONE DI F. LA DISTURBANZA

OTTICA IN P SI VALUTA IN TERMINI DI CONTRIBUTI DELLE VARIE ZONE DI FRESNEL, $U_1, U_2 \dots U_n$. NOTIAMO CHE PASSANDO DA UNA ZONA ALLA SUCCESSIVA

$\Delta r_{n+1, n} = (r_{n+1} + r'_{n+1}) - (r_n + r'_n) = \lambda/2 \Rightarrow$ CHE LA FASE MEDIA DELL' ONDA CAMBIA DI π PASSANDO DA UNA ZONA ALLA SUCCESSIVA. COME CONSEGUENZA LA SOMMA DEI CONTRIBUTI ALLA AMPIEZZA $|U_p|$ PUO' ESSERE

ESPRESSA COME $|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots$. CONSIDERIAMO
 ORA IL CASO DI UN'APERTURA CIRCOLARE CENTRATA IN O.
 SE QUESTA APERTURA CONTIENE N ZONE DI FRESNEL, AVEN-
 DO QUESTE LA STESSA AREA ESSE CONTRIBUIRANNO IN
 MODO ANALOGO ALLA DISTRIBUZIONE IN P. \Rightarrow LA $\sum_n^N U_n$
 $\approx \phi$ SE N E' PARI, MENTRE SARA' CIRCA $|U_1|$ SE N E'
 DISPARI. SE ORA CONSIDERIAMO LA FORMULA DI FRESNEL-
 KIRCHHOFF E IN PARTICOLARE IL TERMINE DI OBLIQUITA'
 E IL FATTORE DI DISTANZA RADIALE, IL VALORE $|U_n|$
 DECRESCHE LENTAMENTE AL CRESCERE DI n . DI CONSEGUEN-
 ZA PER $N \rightarrow \infty$ LA DISTURBANZA OTTICA TOTALE IN P E'
 QUELLA CHE RISULTEREBBE SENZA APERTURA \Rightarrow
 $\frac{1}{2} |U_1|$. PER DIMOSTRARE ALMENO APPROSSIMATIVA-
 MENTE QUESTA AFFERMAZIONE POSSIAMO OSSERVA-
 RE CHE $|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots \Rightarrow$
 $= \frac{1}{2} |U_1| + \left| \frac{1}{2} |U_1| - |U_2| + \frac{1}{2} |U_3| \right| + \left| \frac{1}{2} |U_3| - |U_4| + \frac{1}{2} |U_5| \right| + \dots$
 AL CRESCERE DI n $|U_n|$ VARIANO LENTAMENTE ALLU-
 RA TUTTI I TERMINI $\left| \frac{1}{2} |U_n| - |U_{n+1}| + \frac{1}{2} |U_{n+2}| \right| \rightarrow \phi$
 CON $n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow |U_p| \approx \frac{1}{2} |U_1|$