ESPRESSA COME $|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots$ CONSIDERIAMO ORA IL CASO DI UN'APERTURA CIRCOLARE CENTRATA IN O. SE QUESTA APERTURA CONTIENE n ZONE DI FRESNEL, AVENDO QUESTE LA STESSA AREA ESSE CONTRIBUIRANNO IN MODO ANALOGO ALLA DISTRIBUZIONE IN P. $\Rightarrow$ LA $\sum_n^{i} U_n \simeq \emptyset$ SE n E' PARI, MENTRE SARÁ CIRCA $|U_1|$ SE n E' DISPARI. SE ORA CONSIDERIAMO LA FORMULA DI FRESNEL-KIRCHHOFF E IN PARTICOLARE IL TERMINE DI OBLIQUITA' E IL FATTORE DI DISTANZA RADIALE, IL VALORE $|U_n|$ DECRESCE LENTAMENTE AL CRESCERE DI n. DI CONSEGUENZA PER $n \to \infty$ LA DISTURBANZA OTTICA TOTALE IN P E' QUELLA CHE RISULTEREBBE SENZA APERTURA $\Rightarrow$ $1/2\,|U_1|$. PER DIMOSTRARE ALMENO APPROSSIMATIVAMENTE QUESTA AFFERMAZIONE POSSIAMO OSSERVARE CHE $|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots \Rightarrow$

$$= \frac{1}{2}U_1 + \left|\frac{1}{2}U_1 - U_2 + \frac{1}{2}U_3\right| + \left|\frac{1}{2}U_3 - U_4 + \frac{1}{2}U_5\right| + \dots$$

AL CRESCERE DI n $|U_i|$ VARIANO LENTAMENTE ALLORA TUTTI I TERMINI $\left|\frac{1}{2}U_n - U_{n+1} + \frac{1}{2}U_{n+2}\right| \to \emptyset$ CON $n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow |U_p| \simeq \frac{1}{2}|U_1|$. PER DIMOSTRARE, ALMENO APPROSSIMATIVAMENTE, QUESTO RISULTATO POSSIAMO USARE LA SEGUENTE RELAZIONE

$$|U_p| = \frac{1}{2}U_1 + \left|\frac{1}{2}U_1 - U_2 + \frac{1}{2}U_3\right| + \left|\frac{1}{2}U_3 - U_4 + \frac{1}{2}U_5\right| + \frac{1}{2}\left|\dots - \right| + \dots$$

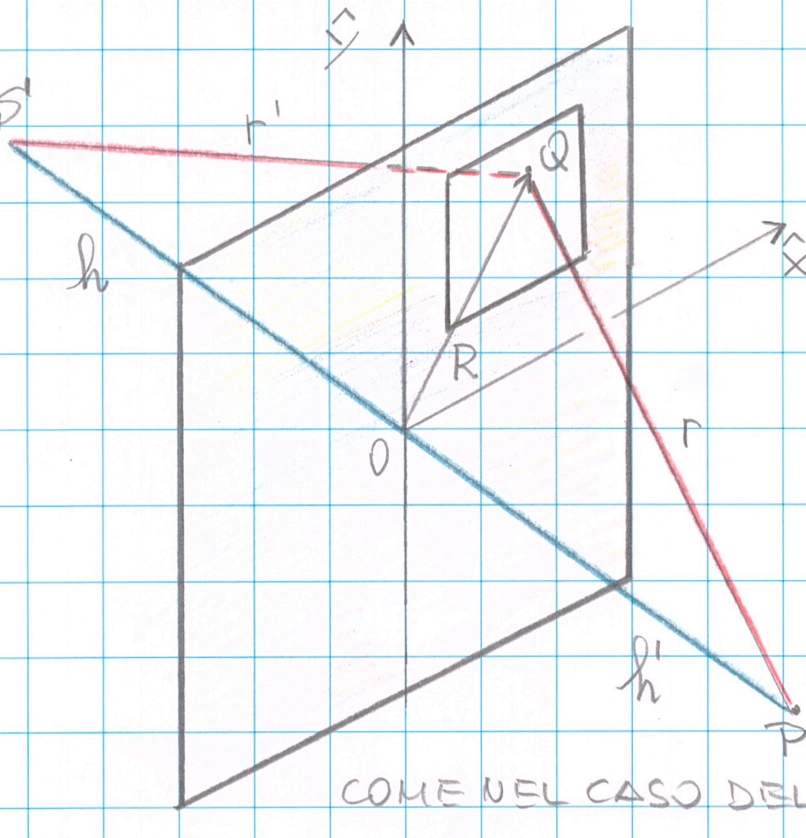
AL CRESCERE DI n I TERMINI $|U_j|$ VARIANO LENTAMENTE ALLORA TUTTI I TERMINI IN $|\dots| \to \emptyset$ E QUINDI RESTA SOLO $\frac{1}{2}|U_1|$.

- **ZONE PLATES**. SE COSTRUIAMO UN'APERTURA CON ZONE DI FRESNEL ALTERNATE E OSCURIAMO LE ZONE PARI $\Rightarrow$ LA DISTURBANZA OTTICA IN P RISULTA

$$|U_p| = |U_1| + |U_3| + |U_5| + \dots$$

QUESTO TIPO DI APERTURA E' DETTO ZONE PLATE E SI COMPORTA IN MODO MOLTO SIMILE A UNA LENTE POICHE' L'IRRADIANZA IN P E' MOLTO PIÙ GRANDE CHE SE NON CI FOSSE LA Z.P. LA DISTANZA FOCALE E' $L = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\right)^{-1}$ OPPURE $L = R_1^2/\lambda$.

- **APERTURA RETTANGOLARE**



PER CALCOLARE LA DIFFRAZIONE DI UNA APERTURA RETTANGOLARE SI PARTE DALLA FORMULA DI FRESNEL-KIRCHHOFF. NEL CASO DI RAPPRESENTAZIONE IN COORDINATE CARTESIANE SI HA

$$R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$r + r' = h + h' + \frac{1}{2L}(x^2 + y^2)$$

COME NEL CASO DELLA DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER CONSIDERIAMO IL FATTORE DI OBLIQUITÀ $\cos(\hat{n}, \bar{r}) - \cos(\hat{n}, \bar{r}') \simeq \text{cost.}$, COSÌ COME $1/rr'$ VARIA LENTAMENTE RISPETTO ALL'ESPONENZIALE $e^{ik(r+r')}$

$$U_p = C \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik(x^2+y^2)/2L} \, dx\, dy$$

$\Rightarrow U_P = C\int_{x_1}^{x_2} e^{ikx^2/2L}\,dx \int_{y_1}^{y_2} e^{iky^2/2L}\,dy$, DOVE C INCLUDE TUTTI GLI ALTRI TERMINI. ORA INTRODUCIAMO LE VARIABILI ADIMENSIONALI $u = x\sqrt{\frac{k}{\pi L}}$ E $v = y\sqrt{\frac{k}{\pi L}}$ O LE EQUIVALENTI $u = x\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ E $v = x\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ $\Rightarrow$

$U_P = U_1\int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2}\,du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2}\,dv$ DOVE $U_1 = \frac{C\pi L}{k}$.

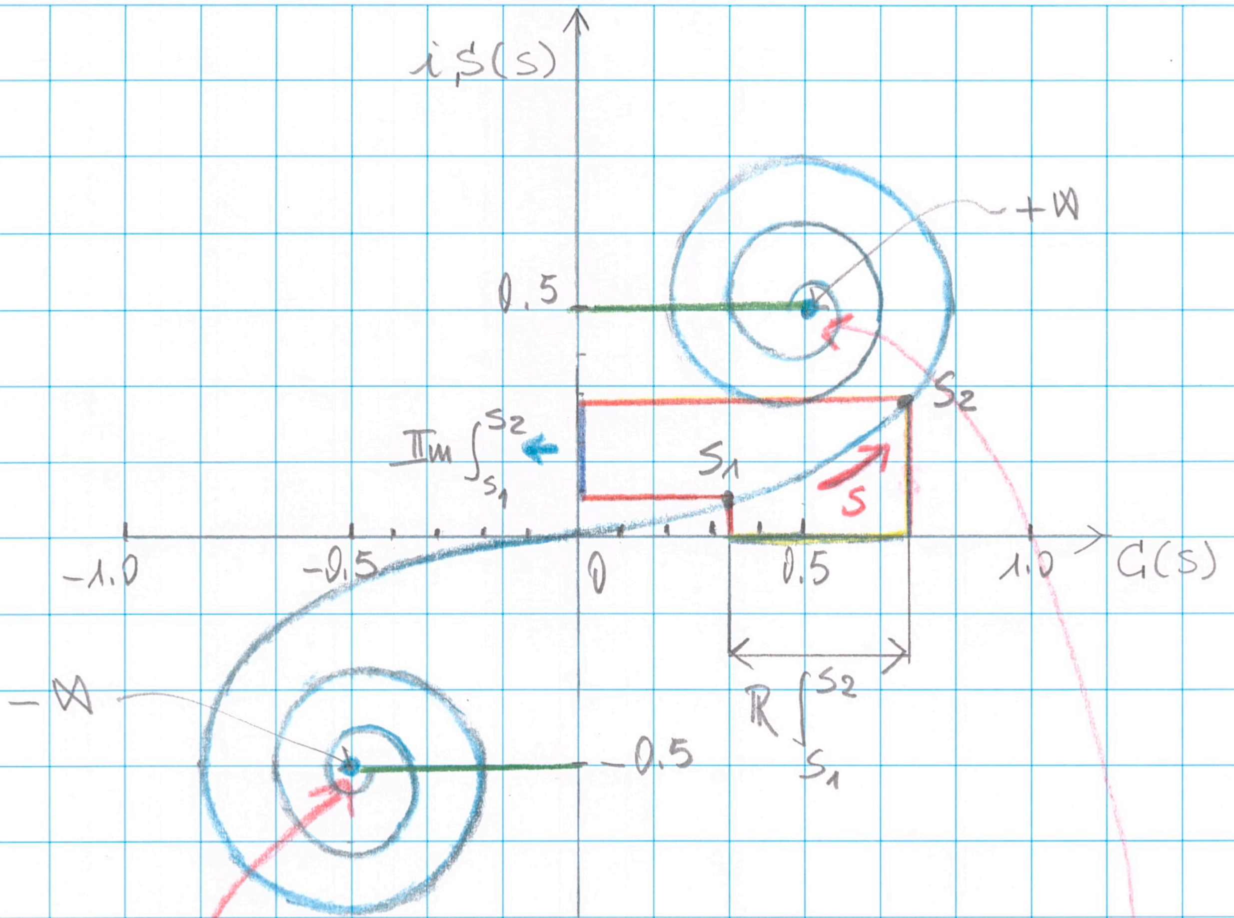
QUESTI INTEGRALI SONO RAPPRESENTABILI NELLA FORMA GENERALE $\Rightarrow \int_0^s e^{i\pi w^2/2}\,dw = C(s) + iS(s)$; DOVE

LA PARTE REALE E LA PARTE IMMAGINARIA SONO RISPETTIVAMENTE $\mathbb{R} \to C(s) = \int_0^s \cos(\pi w^2/2)\,dw$

$\mathrm{Im} \to S(s) = \int_0^s \sin(\pi w^2/2)\,dw$. QUESTI SONO NOTI COME INTEGRALI DI FRESNEL E I LORO VALORI SONO TABULATI

$\Rightarrow$ C(s) E S(s) SONO TABULATI, OPPURE SONO RAPPRESENTATI GRAFICAMENTE DA UNA CURVA NOTA COME SPIRALE DI CORNU. DALLE EQS. PRECEDENTI SI DEDUCE CHE $(dC)^2 + (dS)^2 = (ds)^2$, DOVE ds RAPPRESENTA UN ELEMENTO D'ARCO. L'ARCO COMPLESSIVO SULLA SPIRALE DI CORNU E' DATO DALLA DIFFERENZA TRA I DUE LIMITI $S_2 - S_1$. QUESTA DIFFERENZA E' PROPORZIONALE ALLA DIMENSIONE DELLA APERTURA $S_2 - S_1 = u_2 - u_1 = (x_2 - x_1)\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ $(\hat{x})$,

$S_2 - S_1 = v_2 - v_1 = (y_2 - y_1)\sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$ $(\hat{y})$



IL CASO LIMITE E' DATO DA UN'APERTURA INFINITA

$u_1 = v_1 = -\infty$ E $u_2 = v_2 = +\infty$. DATO CHE $C(\infty) = S'(\infty) = 0.5 = \frac{1}{2}$ E $C'(-\infty) = S'(-\infty) = -0.5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow U_1 \times (1+i)^2$ OVVERO U_1 VOLTE LA LUNGHEZZA DELLA LINEA TRA $-\infty$ E $+\infty$

- ESEMPIO $U_P = U_1 \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2} dv \Rightarrow$

$$= U_1 \left[\left(C_1(s) + i S'_1(s) \right) \left(C_2(s) + i S'_2(s) \right) \right] = U_1 \left[(1+i)(1+i) \right] = U_1 (1+i)^2$$

SE PONIAMO $U_1 (1+i)^2 = U_0$ SI PUO' ESPRIMERE L'INTEGRALE DI F-K PER LA DIFF. DI FRAUNHOFER NELLA FORMA GENERALIZZATA

$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)^2} \left[C(u) + i S'(u) \right]_{u_1}^{u_2} \times \left[C(v) + i S'(v) \right]_{v_1}^{v_2}$$

- DIFFRAZIONE DI FRESNEL DA FENDITURA E DA UNO SPIGOLO ACUTO (STRAIGHTEDGE)

QUESTO CASO È TRATTATO COME QUELLO LIMITE DI UN'APERTURA RETTANGOLARE CON $u_1 = -\infty$ E $u_2 = +\infty \Rightarrow$

$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)^2}\left[C(u) + i\,S(u)\right]_{u_1}^{u_2}\left[C(v) + i\,S(v)\right]_{v_1}^{v_2} =$$

$$\frac{U_0}{(1+i)^2}\left[\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right]\left[C(v) + i\,S(v)\right]_{v_1}^{v_2}$$ DA CUI

$$\frac{U_0}{(1+i)^{\cancel{2}}}\left[\cancel{(1+i)}\right]\cdot\left[C(v) + i\,S(v)\right]_{v_1}^{v_2} \Rightarrow$$

v_1 E v_2 DEFINISCONO L'APERTURA DELLA FENDITURA $\Rightarrow$ $$U_P = \frac{U_0}{(1+i)}\left[C(v) + i\,S(v)\right]_{v_1}^{v_2}$$

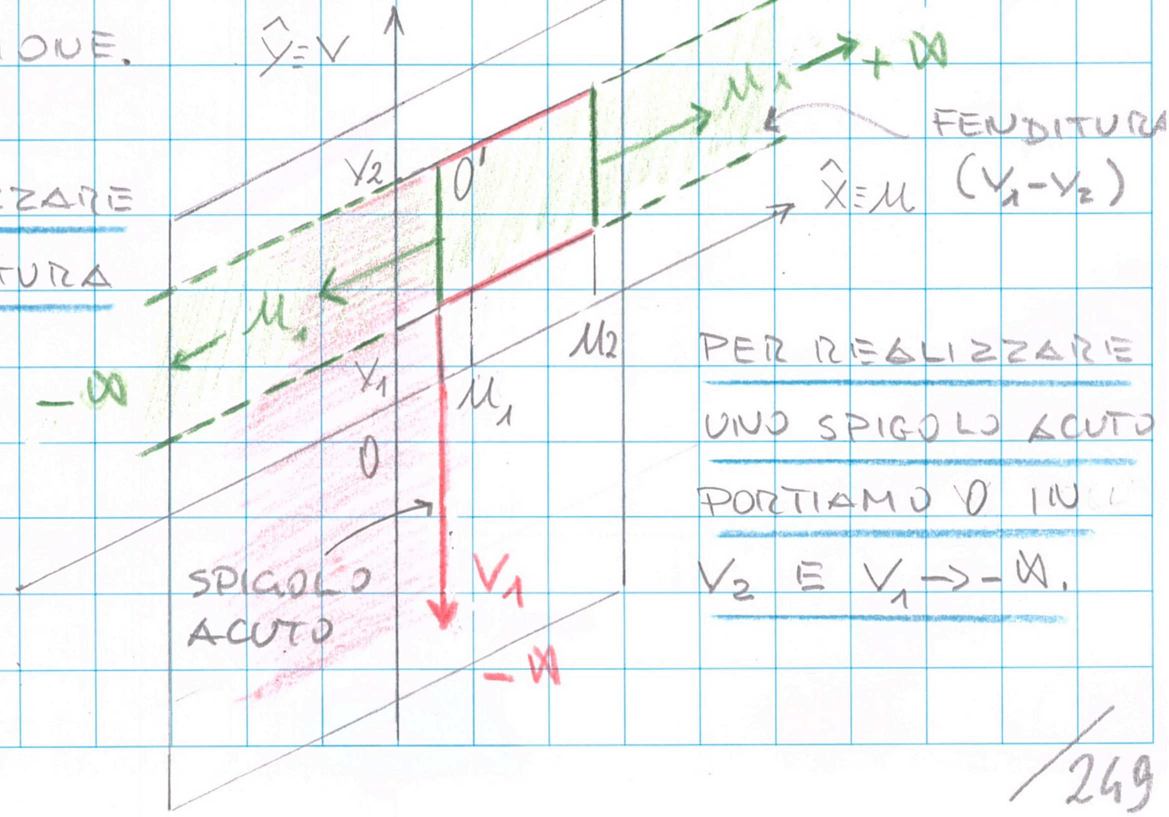
IL CASO DI UNO SPIGOLO ACUTO SI OTTIENE PONENDO

$v_1 = -\infty \Rightarrow$ $$U_P = \frac{1}{2}\frac{U_0}{(1+i)^2}\left[C(v) + i\,S(v)\right]_{-\infty}^{v_2} \Rightarrow$$

$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)}\left[C(v_2) + i\,S(v_2) + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right]$$ CHE È

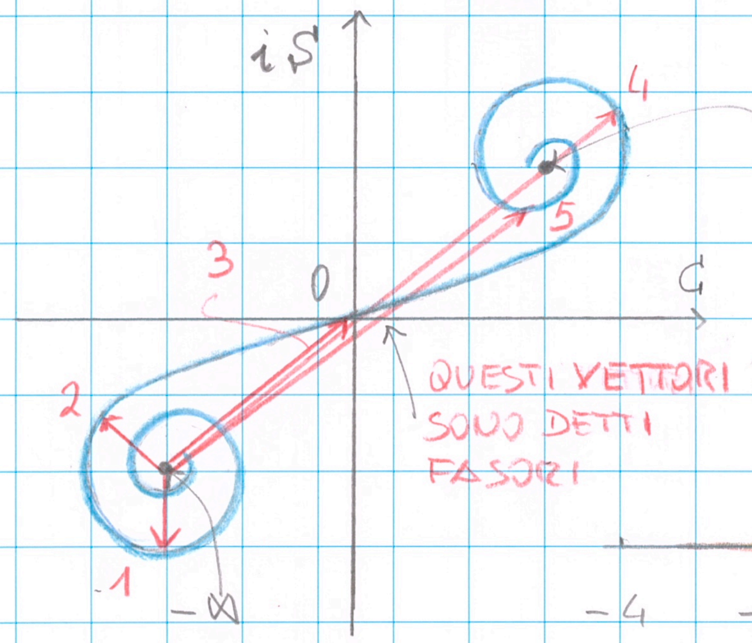
UNA FUNZIONE DELLA VARIABILE v_2. QUESTA VARIABILE SPECIFICA LA POSIZIONE DELLO SPIGOLO CHE GENERA LA DIFFRAZIONE.

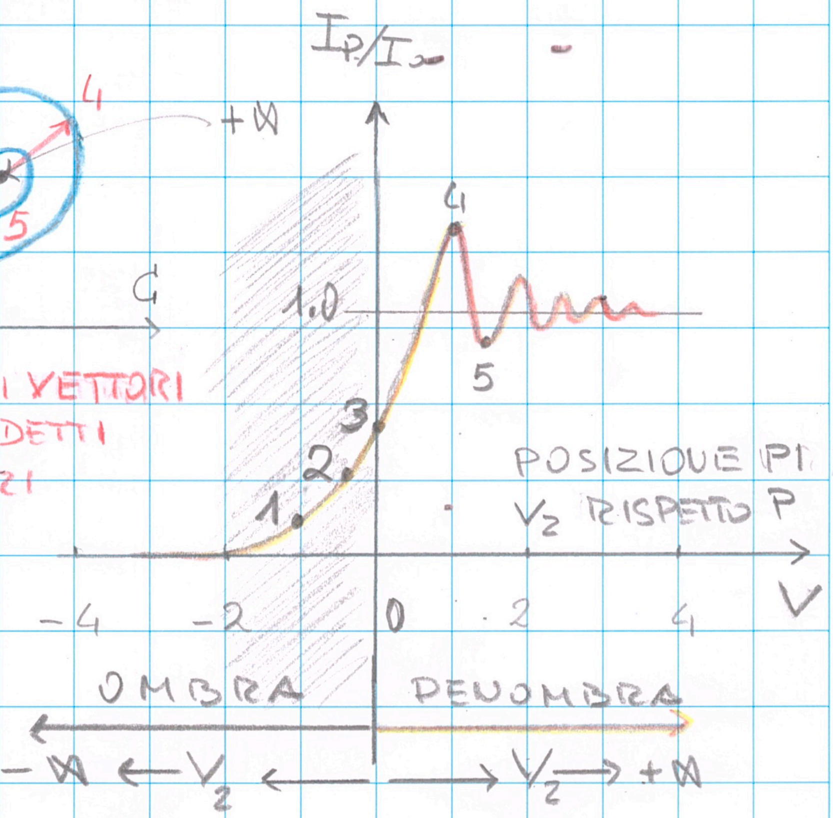
PER REALIZZARE UNA FENDITURA PORTIAMO $u_1 \to -\infty$ E $u_2 \to +\infty$



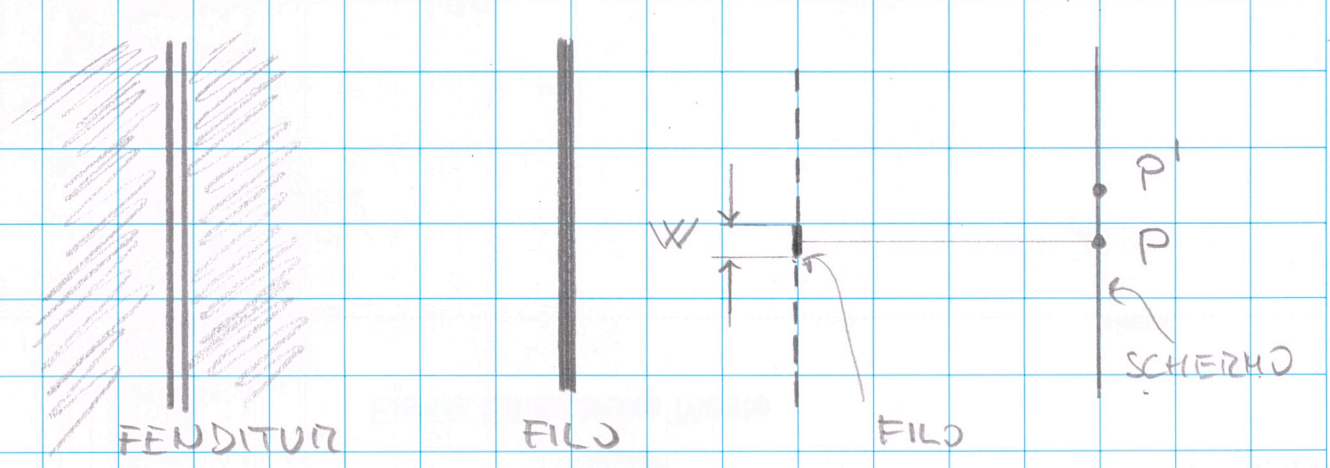
PER REALIZZARE UNO SPIGOLO ACUTO PORTIAMO O' IN v_2 E $v_1 \to -\infty$.

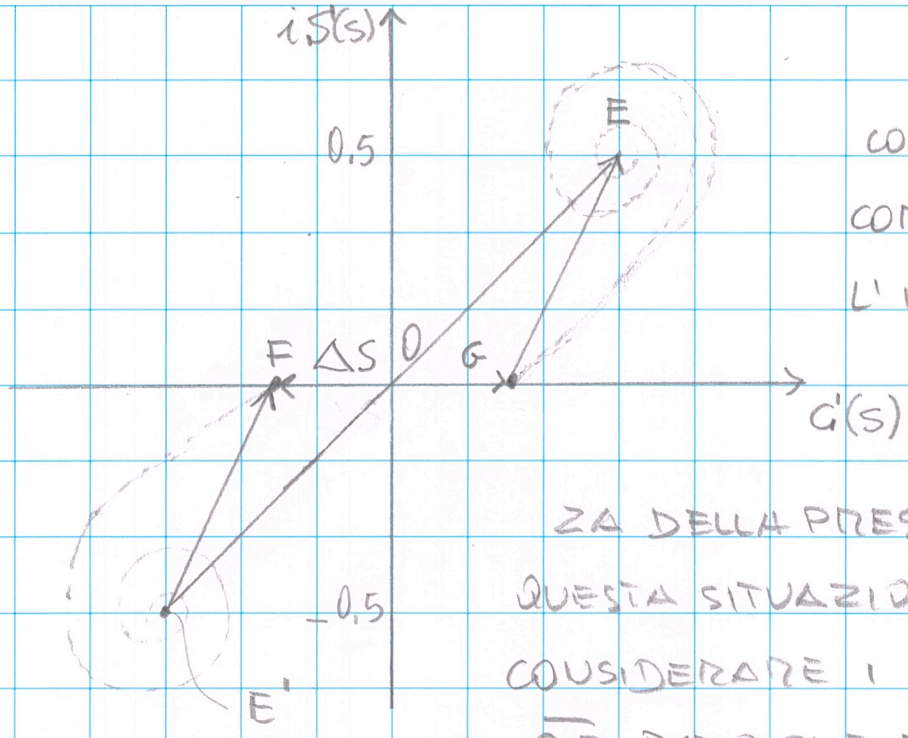
SE PONIAMO L'ORIGINE DEL S.d.R IN $V_2 \Rightarrow V_2 = 0$ (P SI TROVA ESATTAMENTE ALLO SPIGOLO DELL'OMBRA GEOMETRICA), ALLORA SI OTTIENE $U_p = \left[U_0/(1+i)\right]\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}U_0$. QUINDI L'AMPIEZZA DELLA DISTURBANZA OTTICA ALLO SPIGOLO E' $I \propto \left|\frac{1}{2}U_0\right|^2 = \frac{1}{4}U_0^2$. IN QUESTO CASO IL GRAFICO DI $U_p = \frac{U_0}{1+i}\left[C(V_2) + iS(V_2) + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right]$ RISULTA





DIFFRAZIONE DI UN FILO. SUPPONIAMO ORA DI SOSTITUIRE LA FENDITURA CON UN FILO (OVVERO CON IL SUO COMPLEMENTARE





ORA IL CALCOLO CON LA SPIRALE DI CORNU PER OTTENERE L'IRRADIANZA IN P ESCLUDE ΔS COME CONSEGUENZA DELLA PRESENZA DEL FILO. QUESTA SITUAZIONE CI PORTA A CONSIDERARE I DUE VETTORI $\overline{E'F}$ E $\overline{GE}$ DATO CHE ENTRAMBI CONTRIBUISCONO ALLA IRRADIANZA IN P. INFATTI L'IRRADIANZA IN P È PROPORZIONALE AL QUADRATO DELLA SOMMA DEI VETTORI (FASORI) $\overline{E'F}+\overline{GE}$. A QUESTO RISULTATO SI GIUNGE SOTTRAENDO GRAFICAMENTE AL FASORE $\overline{E'E}$ QUELLO RELATIVO ALLA ZONA DI SPAZIO SCHERMATA $\overline{FG}$ $\Rightarrow$ $\overline{E'F}+\overline{GE}=\overline{E'E}-\overline{FG}$ $\Rightarrow$ $I_P=I_0\,|\overline{E'F}+\overline{GE}|^2$ VALORE MEDIO. QUANDO SI MISURA L'IRRADIANZA PER DIVERSI PUNTI P' L'INTERVALLO DI SPIRALE ΔS OMESSO SI SPOSTA LUNGO LA SPIRALE COME IL ΔS SI SPOSTAVA NEL CASO DI UNA FENDITURA MA LA DIFFERENZA TRA I FASORI È LA STESSA.

- PRINCIPIO DI BABINET COME ABBIAMO VISTO LA FENDITURA E IL FILO SONO DISTURBI OTTICI COMPLEMENTARI AI FINI DELLA DIFFRAZIONE. QUESTO RISULTATO HA UN VALORE PIÙ GENERALE. SE A E B SONO DUE PERTURBAZIONI OTTICHE COMPLEMENTARI LA SOMMA DELLE IRRADIANZE PRODOTTE DA QUESTE

SULLO SCHERMO DEVE ESSERE UGUALE ALLA IRRADIANZA SULLO SCHERMO PRODOTTA DALL'ONDA E.M. NON PERTURBATA.

$E_A + E_B = E_u$. QUESTO RISULTATO E' CERTAMENTE VERO NEL CASO DELLA FENDITURA E DEL FILO ANALIZZANDO LA SPIRALE DI CORNU NEI DUE CASI. RIARRANGIANDO $\overline{E'F} + \overline{GE} = \overline{E'E} - \overline{FG} \Rightarrow \overline{E'F} + \overline{GE} + \overline{FG} = \overline{EE'}$ POSSIAMO RISCRIVERE LA SOVRAPPOSIZIONE DEI CAMPI. INFATTI $\overline{E'F} + \overline{GE}$ E' PROPORZIONALE ALLA AMPIEZZA DI E_A DOVUTO AL FILO NEL PUNTO P, $\overline{FG}$ E' PROPORZIONALE A E_B DOVUTO ALLA FENDITURA, MENTRE $\overline{E'E}$ E' L'IRRADIANZA IN P DATO CHE E' PROPORZIONALE AL CAMPO IN P IN ASSENZA DI FENDITURE, i.e. E_U. PONENDO $E_U = 0 \Rightarrow E_A = -E_B \Rightarrow I_A = I_B$.

- OSSERVAZIONE LA DIFFRAZIONE DI FRESNEL NON PUO' DARE $E_u = 0$ SENZA UN'APERTURA. QUELLA DI FRAUNHOFER SI COME SI HA CHIARAMENTE NEL CASO DI UN PUNTO SORGENTE E UNA LENTE.
- OSSERVAZIONE, DOPO QUESTO EXCURSUS SULLA INTERFERENZA E LA DIFFRAZIONE DI ONDE E.M. NOTIAMO CHE ABBIAMO COSTRUITO DUE TEORIE CHE SONO INDIPENDENTI DALLA E.D. (A PARTE LA NATURA E.D. DELLE ONDE E.M.) E QUIDI POSSONO ESSERE ESTESE A OGNI SISTEMA RAPPRESENTABILE CON UN'ONDA ARMONICA, SIA ESSO UN' e^-, p^+, n, O QUALSIASI STATO QUANTISTICO RAPPRESENTABILE CON UNA FUNZIONE D'ONDA Ψ.