LEZIONE #23 CAMPI E POTENZIALI. LA QUESTIONE CHE CI PONIAMO È COME LE SORGENTI DEI CAMPI E.M. $(\rho, \bar{J})$ GENERANO GLI STESSI. IN ALTRE PAROLE CERCHIAMO UNA SOLUZIONE GENERALE DELLE EQS. DI MAXWELL.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad ; \quad \bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t \bar{B}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = \emptyset \qquad \bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \bar{E}.$$

NEL CASO STATICO I CAMPI SONO DATI DALLE LEGGI DI COULOMB E BIOT-SAVART, MA PER IL CASO DINAMICO DOBBIAMO CERCARE DELLE SOLUZIONI ADEGUATE. PER L'E.M. STATICO VALE $\bar{\nabla}\times\bar{E} = \emptyset \Rightarrow \bar{E}$ È UN CAMPO CONSERVATIVO E QUESTO CI PERMETTE DI SCRIVERE $\bar{E} = -\bar{\nabla} V$. QUESTO NON È PIÙ IL CASO IN E.D. PER QUANTO RIGUARDA $\bar{B}$ POSSIAMO SEMPRE SCRIVERE $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = \emptyset \Rightarrow \bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$. È INTERESSANTE NOTARE A QUESTO PUNTO CHE UTILIZZANDO LA LEGGE DI FARADAY $\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\partial_t(\bar{\nabla}\times\bar{A})$ POSSIAMO RISCRIVERE QUESTA RELAZIONE E OTTENERE UN CAMPO (MISTO) CONSERVATIVO. SFRUTTANDO LE PROPRIETÀ DI COMMUTAZIONE DEGLI OPERATORI $\bar{\nabla}\times$ E $\partial_t \Rightarrow \bar{\nabla}\times(\bar{E} + \partial_t \bar{A}) = \emptyset \Rightarrow \bar{E} + \partial_t \bar{A}$ È UN CAMPO MISTO IRROTAZIONALE E CONSERVATIVO $\Rightarrow$ È SEMPRE POSSIBILE TROVARE UN POTENZIALE V TALE PER CUI $(\bar{E} + \partial_t \bar{A}) = -\bar{\nabla} V \Rightarrow \bar{E} = -(\bar{\nabla} V + \partial_t \bar{A})$

QUESTA RELAZIONE ESPRIME $\bar{E}$ IN FUNZIONE DEI POTENZIALI V E $\bar{A}$ E QUINDI È LA RAPPRESENTAZIONE PIÙ GENERALE DEL CAMPO ELETTRICO, DOVE PER $\bar{A}$ CHE NON DIPENDONO DAL TEMPO RICADIAMO

NEL CASO PARTICOLARE $\bar{E}=-\bar{\nabla}V$ DELLA ELETTRO-MAGNETO STATICA. QUESTA OSSERVAZIONE CI PERMETTE DI SCRIVERE LA LEGGE DI GAUSS $\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$ IN TERMINI DI POTENZIALI $\bar{\nabla}\cdot(-\bar{\nabla}V-\partial_t\bar{A})=\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \nabla^2V+\partial_t\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=-\rho/\varepsilon$.

QUESTA RELAZIONE GENERALIZZA L'EQ. DI POISSON, MENTRE LA LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL DIVENTA

$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})=\mu\bar{J}-\varepsilon\mu\bar{\nabla}\partial_tV-\varepsilon\mu\partial_t^2\bar{A}$. USANDO L'IDENTITA VETTORIALE $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})=\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A}$, OTTENIAMO

$$\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A}=\mu\bar{J}-\varepsilon\mu\nabla(\partial_tV)-\varepsilon\mu\partial_t^2\bar{A} \Rightarrow$$

$$(\nabla^2\bar{A}-\varepsilon\mu\partial_t^2\bar{A})-\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}+\varepsilon\mu\partial_tV)=-\mu\bar{J}$$

QUESTA RELAZIONE RAPPRESENTA LA LEGGE DI A-M IN TERMINI DI POTENZIALI

- TRASFORMAZIONI DI GAUGE IN E.D. UNA TEORIA DI GAUGE IDENTIFICA IN FISICA UN DETERMINATO TIPO DI TEORIA. DI PER SÈ LA PAROLA GAUGE INDICA "MISURA". LE TEORIE MODERNE DESCRIVONO LE FORZE FISICHE TRAMITE I CAMPI (CAMPO E.M., CAMPO GRAVITAZIONALE) E CAMPI A LORO VOLTA RAPPRESENTANO LE FORZE TRA PARTICELLE ELEMENTARI. UNA CARATTERISTICA GENERALE DI QUESTI CAMPI E' CHE NON POSSONO ESSERE IMPLICITAMENTE MISURATI. QUESTO SIGNIFICA CHE DIVERSE CONFIGURAZIONI DI CAMPI CHE NON SONO DIRETTAMENTE, MA IMPLICITAMETE, OSSERVATE SONO DEDOTTE DA GRANDEZZE FISICHE DIRETTAMENTE OSSERVABILI. L'INTERAZIONE TRA DUE CARICHE ELETTRICHE PRODUCE SULLE CARICHE STESSE UNA FORZA CHE E' MISURABILE E DALLA QUALE POSSIAMO DEDURRE I CAMPI. ABBIAMO VISTO ANCHE COME DALLA MISURA DELLA IN-

RADIANZA DI UN'ONDA E.M. SIA POSSIBILE DEDURRE I CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$. UNA TRASFORMAZIONE DA UNA CONFIGURAZIONE DI CAMPO A UN'ALTRA E' DETTA TRASFORMAZIONE DI GAUGE. LA MANCANZA DI VARIAZIONI DELLE QUANTITA' MISURABILI, NONOSTANTE IL CAMPO SI SIA TRASFORMATO, E' UNA PROPRIETA' CHIAMATA INVARIANZA DI GAUGE. PER ESEMPIO SE SI MISURA IL COLORE DI UN CERTO NUMERO DI OGGETTI UGUALI E SCOPRIAMO CHE CAMBIANDO IL COLORE IL NUMERO DEGLI OGGETTI RESTA INVARIATO DIREMO CHE IL COLORE E' GAUGE INVARIANTE. D'ALTRA PARTE OGNI TIPO DI INVARIANZA SOTTO UNA TRASFORMAZIONE DI CAMPO E' CONSIDERATA UNA SIMMETRIA $\Rightarrow$ UNA INVARIANZA DI GAUGE E' ANCHE DETTA SIMMETRIA DI GAUGE. IN GENERALE OGNI TEORIA FISICA CHE E' GAUGE INVARIANTE E' CONSIDERATA UNA TEORIA DI GAUGE. PER ESEMPIO, NEI FENOMENI E.M. SOLO LE FORZE SONO OSSERVABILI DIRETTE (NB: LA NORMALIZZAZIONE SULLA CARICA E SULLA CORRENTE CI DA IL CAMPO $\bar{E}$ E $\bar{B}$ RISPETTIVAMENTE), INVECE NON LO SONO I POTENZIALI V E $\bar{A}$. SOTTO UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE, DOVE UNO SCALARE E' LINEARMENTE COMBINATO AI POTENZIALI, SI POSSONO OTTENERE NUOVI POTENZIALI CHE LASCIANO INVARIATE LE FORZE (CAMPI). SE QUESTI NUOVI POTENZIALI SEMPLIFICANO IL PROBLEMA OVVIAMENTE I GAUGE USATI SONO UTILI. STORICAMENTE IL PRIMO GAUGE

FU QUELLO INTRODOTTO DA MAXWELL NELLA E.D. CLASSICA. UN CAMPO ELETTRICO STATICO PUO' ESSERE DESCRITTO IN TERMINI DI UN POTENZIALE ELETTRICO CHE E' DEFINITO IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO. DI SOLITO E PER RAGIONI PRATICHE SI PRENDE COME POTENZIALE Ø QUELLO DELLA TERRA, MA IN EFFETTI SOLO LE DIFFERENZE DI POTENZIALE SONO MISURABILI. QUESTA E' ANCHE LA RAGIONE PER CUI UN VOLTMETRO DEVE AVERE DUE SONDE E PUO' SOLO MISURARE UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE. SE IL POTENZIALE V E' UNA SOLUZIONE DELLE EQS. DI MAXWELL ($\bar{E} = -\nabla V$) ANCHE UN POTENZIALE $V' = V + C$, CON $C =$ COST, E' SOLUZIONE DELLE EQS. DI MAXWELL (QUESTO SIGNIFICA MISURARE LA d.d.p. RISPETTO A STANDARD DI RIFERIMENTO DIVERSI) E NON CI SONO ESPERIMENTI CHE POSSONO DISTINGUERE V DA V'. IN ALTRE PAROLE LE LEGGI DELLA FISICA CHE GOVERNANO L'ELETTRICITA' E IL MAGNETISMO, i.e. LE EQS. DI MAXWELL) SONO INVARIANTI SOTTO TRASFORMAZIONI DI GAUGE $\Rightarrow$ EQS. DI MAXWELL HANNO UNA SIMMETRIA DI GAUGE. GENERALIZZANDO LA ELETTROSTATICA ALL' E.M. DOBBIAMO CONSIDERARE UN SECONDO POTENZIALE $\bar{A}$ (POTENZIALE VETTORE MAGNETICO). ESSO PURE PUO' ESSERE OGGETTO DI UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE. QUESTE TRASFORMAZIONI POSSONO ESSERE LOCALI IL CHE IMPLICA CHE INVECE DI SOMMARE (ALGEBRICAMENTE) UNA

COSTANTE SI DEVE SOMMARE UNA FUNZIONE SCALARE CHE HA VALORI DIFFERENTI PER DIFFERENTI PUNTI DELLO SPAZIO E DEL TEMPO. ORA ANDREMO A RICAVARE ANALITICAMENTE QUESTA FUNZIONE SCALARE DELLO SPAZIO E DEL TEMPO CHE OPPORTUNAMENTE SOMMATA AI POTENZIALI V E $\bar{A}$ GENERERÀ DEI POTENZIALI V' E $\bar{A}'$ CHE LASCIANO INALTERATI I CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$. MA PRIMA DI FARE QUESTO E' UTILE ACCENNARE AL FATTO CHE LA TEORIA DI GAUGE DELL'E.D., NEGLI ANNI DI SVILUPPO DEL MECCANICA QUANTISTICA E SUCESSIVAMENTE DELLA TEORIA DELLA QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO (QUANTUM FIELD THEORY), SI E' ULTERIORMENTE SVILUPPATA. IN PARTICOLARE, LA FISICA DEL SECOLO SCORSO HA MESSO IN LUCE CON CHIAREZZA CHE TUTTE LE FORZE FONDAMENTALI EMERGONO DAI VINCOLI IMPOSTI DA SIMMETRIE DI GAUGE LOCALI, NEL QUAL CASO LE TRASFORMAZIONI VARIANO DA PUNTO A PUNTO DELLO SPAZIO-TEMPO. IL PUNTO CULMINANTE DI QUESTO SVILUPPO TEORICO E' IL MODELLO STANDARD, OVVERO UNA TEORIA DI CAMPO QUANTISTICO IN GRADO DI PREDIRE LE INTERAZIONI FONDAMENTALI, ECCETTO QUELLA GRAVITAZIONALE.

ORA PASSIAMO ALLA DERIVAZIONE ANALITICA DEI GAUGE DELLA E.D.

IL VANTAGGIO INTRINSECO DOVUTO ALLA INTRODUZIONE DEI POTENZIALI V E $\bar{A}$ E QUELLO DI AVER RIDOTTO UN PROBLEMA A SEI EQS.

(TRE PER LE COOR. DI $\bar{E}$ E TRE PER QUELLE DI $\bar{B}$) A QUATTRO EQUAZIONI: UNA PER V E TRE PER LE COORDINATE DI $\bar{A}$. SUPPONIAMO DI AVERE UN INSIEME DI POTENZIALI (V, $\bar{A}$ E V' E $\bar{A}'$) A CUI CORRISPONDONO GLI STESSI CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$. IL NOSTRO SCOPO È TROVARE QUALE RELAZIONE CI DEVE ESSERE TRA V E V' E $\bar{A}$ E $\bar{A}'$ AFFINCHÉ QUESTO SIA VERO. QUINDI PARTIAMO SCRIVENDO $\bar{A}' = \bar{A} + \bar{\alpha}$ E $V' = V + \beta$ (CON $\bar{\alpha}$ CAMPO VETTORIALE E β FUNZIONE SCALARE). AFFINCHÉ $\bar{A}'$ DIA LO STESSO CAMPO DI $\bar{A}$ $\Rightarrow$

$$\bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}' = \bar{\nabla} \times (\bar{A} + \bar{\alpha}) \Rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{\alpha} = \phi \Rightarrow \bar{\alpha}$$

DEVE ESSERE IRROTAZIONALE (CONSERVATIVO) $\Rightarrow$ $\bar{\alpha} = \bar{\nabla}\lambda$. I DUE POTENZIALI DEVONO ANCHE DARE $\bar{E}$.

$$\bar{E} = -\nabla V - \partial_t \bar{A} = -\nabla V' - \partial_t \bar{A}' = -\nabla(V+\beta) - \partial_t(\bar{A} + \bar{\alpha})$$
$$= -\nabla V - \nabla\beta - \partial_t \bar{A} - \partial_t \bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\nabla}\beta + \partial_t \bar{\alpha} = \phi$$ CON
$$\bar{\alpha} = \nabla\lambda \Rightarrow \bar{\nabla}\beta + \bar{\nabla}\partial_t \lambda = \bar{\nabla}(\beta + \partial_t \lambda) = \phi.$$ IL

TERMINE $\beta + \partial_t \lambda$ È QUINDI INDIPENDENTE DALLA POSIZIONE, MA POTREBBE DIPENDERE DAL TEMPO $\Rightarrow$ $\beta = -\partial_t \lambda + k(t)$. ALLORA POSSIAMO INCORPORARE $k(t)$ IN λ DEFINENDO UNA NUOVA $\lambda + \int_0^t k(t')dt'$. QUESTO NON MODIFICA IL $\bar{\nabla}\lambda$ DATO CHE $\bar{\nabla}$ È UN OPERATORE SPAZIALE $\Rightarrow$

$$A' = \bar{A} + \bar{\nabla}\lambda, \quad V' = V - \partial_t \lambda.$$

QUESTA OPERAZIONE LASCIA $\bar{E}$ E $\bar{B}$ INVARIATI E QUINDI È UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE E POSSONO ESSERE USATE PER SEMPLIFICARE LA RELAZIONE TRA CAMPI E POTENZIALI.

GAUGE DI COULOMB E LORENZ. A VOLTE, ANCHE NEI LIBRI DI TESTO, IL SECONDO GAUGE È DETTO DI LORENTZ, MA DI FATTO GLI È STATO DATO QUESTO NOME IN ONORE DEL FISICO L. LORENZ). A PARTE QUESTO LA SOSTANZA È LA SEGUENTE. IN MAGNETOSTATICA È STATO USATO IL GAUGE $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=0$ AL FINE DI IDENTIFICARE UNIVOCAMENTE $\bar{B}$, ALTRIMENTI NON UNIVOCAMENTE DEFINITO DA $\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}$. CON QUESTO L'EQUAZIONE L'EQ.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=-\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}V+\partial_t\bar{A})=-\nabla^2V-\partial_t\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=\rho/\varepsilon$$

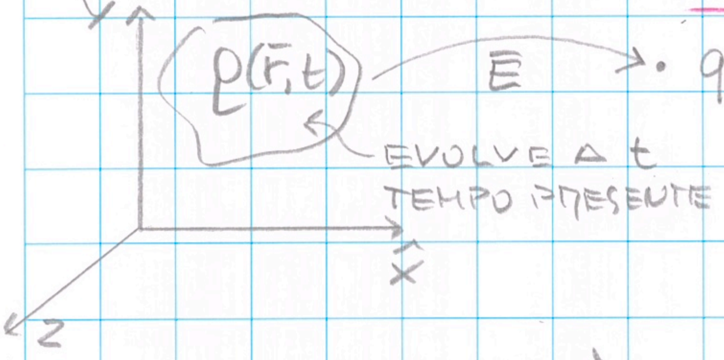
(ε_0 NELLO SPAZIO LIBERO) DIVENTA $\nabla^2V=-\rho/\varepsilon$

LA SOLUZIONE DI QUESTA EQ. SI OTTIENE PONENDO $V(\infty)=0$ E OTTENIAMO

$$V(\bar{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r',t')}{\imath}d\tau'$$

QUESTA È UNA EQ. DERIVATA DA UN GAUGE SU $\bar{A}$ CHE IMPONE $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=\emptyset$. A PRIMA VISTA QUESTO CI PORTA A CONSIDERARE LA VALIDITÀ DI QUESTO GAUGE ANCHE PER CONFIGURAZIONI DINAMICHE. TUTTAVIA, NOTIAMO IMMEDIATAMENTE UNA CONTRADDIZIONE SE FACESSIMO QUESTO. INFATTI IL POTENZIALE $V(\bar{r},t)$ SE SI VARIA LA CONFIGURAZIONE DI CARICHE CHE L'HA GENERATO VARIA ISTANTANEAMENTE. QUESTO SIGNIFICA CHE UNA CARICA POSTA A GRANDE DISTANZA (FOSSE ANCHE ALL'∞) È ISTANTANEAMENTE SOGGETTA A UNA FORZA DOVUTA ALLA VARIAZIONE DI $V(\bar{r},t)$? LA RISPOSTA È NO! LA CARICA È MOSSA DALLA AZIONE DEL CAMPO $\bar{E}$ E QUESTO DIPENDE ANCHE DA $\bar{A}$

$\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \partial_t \bar{A}$ E $\bar{A}$ NON VARIA ISTANTANEAMENTE.
IL PUNTO È CHE $V(\bar{r},t)$ NON È MISURABILE MA È SOLO UNA FUNZIONE CHE RIFLETTE COME EVOLVE $\rho(\bar{r},t)$ E SOLO QUANDO IL SUO $\bar{\nabla}$ È COMBINATO CON $\partial_t \bar{A}$ CI DÀ $\bar{E}$ CHE È L'AZIONE CHE MUOVE LE CARICHE DISTANTI. DA UN PUNTO DI VISTA FENOMENOLOGICO UNA MODIFICA DI $\rho(\bar{r},t)$ GENERA UN CAMPO E.M. (ONDE E.M.) CHE TRASPORTANO A UNA VELOCITÀ c (SPAZIO LIBERO) LA MODIFICA DELLA CONFIGURAZIONE DI CARICHE E CORRENTI IN TUTTO LO SPAZIO CIRCOSTANTE E QUINDI UNA CARICA CONTENUTA IN ESSO È SOGGETTA A UNA FORZA $\bar{F} = q\bar{E}(r,t)$ DOPO UN TEMPO PARI ALLA DISTANZA CARICA $q \to \rho(\bar{r},t)$ DIVISO c $t_r = t - \frac{r}{c}$. (DISPUTA NEWTON-LEIBNIZ SULLE AZIONI A DISTANZA).



È SOGGETTA A UN CAMPO GENERATO IN PRECEDENZA $\Delta t_r = t - \frac{r}{c}$

DA QUI LA NECESSITÀ DI RICERCARE UN'ALTRO GAUGE PER L'ELETTRODINAMICA. QUESTO LO POSSIAMO DEDURRE DALLA EQ. DI AMPÈRE-MAXWELL ESPRESSA IN TERMINI DI CAMPO $(\nabla^2\bar{A} - \varepsilon_0\mu_0 \partial_t^2 \bar{A}) - \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \varepsilon_0\mu_0 \partial_t V) = -\mu_0 \bar{J}$
E PONENDO $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = -\varepsilon_0\mu_0 \partial_t V \Rightarrow$
$\nabla^2\bar{A} - \varepsilon_0\mu_0 \partial_t^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$, MENTRE LA RELAZIONE

$\nabla^2 V + \partial_t(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) = -\rho/\varepsilon_0$ DIVENTA CON $\bar{\nabla}\cdot\bar{A} = -\varepsilon_0\mu_0\partial_t V$

$\nabla^2 V - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2 V = -\rho/\varepsilon_0$. A QUESTO PUNTO NOTIAMO CHE IL GAUGE DI LORENZ CI PORTA A UTILIZZARE LO STESSO OPERATORE $\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2 \equiv \square^2$ D'ALAMBERTIANO SIA PER $\bar{A}$ CHE PER V

$$\boxed{\square^2 V = -\rho/\varepsilon_0 \;;\; \square^2 \bar{A} = -\mu_0\bar{J}}$$

POTREMMO ANCHE CONSIDERARE $\square^2$ COME LA NATURALE ESTENSIONE DEL ∇^2 ALLO SPAZIO-TEMPO E QUINDI COME UNA VERSIONE NELLO SPAZIO-TEMPO DELLA EQ. DI POISSON, COSÌ COME $\square^2 V = \emptyset$ E $\square^2\bar{A} = \emptyset$ COME LA VERSIONE QUADRI-DIMENSIONALE DELLA EQ. DI LAPLACE. IN UN CERTO SENSO ANTICIPANDO L'IDEA DELLO SPAZIO-TEMPO DELLA RELATIVITÀ SPECIALE.

OSSERVAZIONE. LE RELAZIONI $\square^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ E $\square^2\bar{A} = -\mu_0\bar{J}$ SONO EQS. DELLE ONDE INOMOGENEE CHE COMPRENDONO I TERMINI SORGENTE.

TUTTAVIA, COME SAPPIAMO LE EQS. DI MAXWELL DA SOLE NON DEFINISCONO L'E.D., MA AD ESSE VA AGGIUNTA LA FORZA DI LORENTZ. COME PRIMA ABBIAMO RISCRITTO LA LEGGE DI GAUSS (1° EQ) E QUELLA DI AMPÈRE-MAXWELL (4° EQ) IN TERMINI DI POTENZIALI COSÌ ORA VOGLIAMO RISCRIVERE LA FORZA DI LORENTZ IN TERMINI DI POTENZIALI.

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = q\left[\bar{E} + (\bar{v}\times\bar{B})\right] = q\left[-(\bar{\nabla}V + \partial_t\bar{A}) + \bar{v}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})\right].$$

DOVE $\bar{p} = m\bar{v}$ E DOVE UTILIZZANDO LA RELAZIONE VETTORIALE $\bar{v}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A}) = \bar{\nabla}(\bar{v}\cdot\bar{A}) - (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{A}$

OTTENIAMO $\frac{d\bar{p}}{dt} = -q\left[\partial_t \bar{A} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{A} + \bar{\nabla}(V - \bar{v}\cdot\bar{A})\right]$ DOVE

$(\partial_t \bar{A} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{A})$ E' DETTA DERIVATA CONVETTIVA DI $\bar{A}$

E E' EQUIVALENTE A $d\bar{A}/dt$. ESSA RAPPRESENTA LA RAPIDITÀ CON CUI $\bar{A}$ CAMBIA IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE E DEL MOMENTO DELLA PARTICELLA. SUPPONIAMO CHE AL TEMPO t LA PARTICELLA CARICA SI TROVI IN $\bar{r}$ DOVE IL POTENZIALE VETTORE VALE $\bar{A}(\bar{r}, t)$.

AL TEMPO $t + dt$ LA POSIZIONE E' DATA DA $\bar{r} + \bar{v}dt$

E $\bar{A}(\bar{r} + \bar{v}dt, t + dt) \Rightarrow$

$d\bar{A} = (\partial_x \bar{A})(v_x dt) + (\partial_y \bar{A})(v_y dt) + (\partial_z \bar{A})(v_z dt) \Rightarrow$

$\frac{d\bar{A}}{dt} = \partial_t \bar{A} + (\bar{v}\cdot\bar{\nabla})\bar{A}$. PER LA PARTICELLA IN MOTO

IL POTENZIALE $\bar{A}$ CAMBIA PER DUE RAGIONI

1 - $\bar{A}$ VARIA NEL TEMPO

2 - $\bar{A}$ VARIA PERCHE' LA PARTICELLA CAMBIA POSIZIONE.

UTILIZZANDO LA DERIVATA CONVETTIVA POSSIAMO SCRIVERE LA RELAZIONE $\frac{d}{dt}(\bar{p} + q\bar{A}) = -\bar{\nabla}\left[q(V - \bar{v}\cdot\bar{A})\right]$

QUESTA RELAZIONE RICORDA QUELLA DELLA MECCANICA $\frac{dP}{dt} = -\bar{\nabla}U$ CON U ENERGIA POTENZIALE. IN E.D. L'EQUIVALENTE DEL MOMENTO CANONICO $\bar{p}$ MECCANICO E' ALLORA $\bar{p}_{CAN} = \bar{p} + q\bar{A}$, MENTRE L'EQUIVALENTE DELLA EN. POT. MECCANICA E'

$U_{E.D.} = q(V - \bar{v}\cdot\bar{A}) \Rightarrow$ DIPENDE DA $\bar{v}\cdot\bar{A}$. ALLO STESSO MODO POSSIAMO OTTENERE LA RELAZIONE

PER L'ENERGIA CINETICA $\frac{d}{dt}(T+qV) = \partial_t[q(V-\bar{v}\cdot\bar{A})]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+qV) = \partial_t U_{ED} \Rightarrow \bar{A}$ RAPPRESENTA IL MOMENTO POTENZIALE PER UNITÀ DI CARICA E V RAPPRESENTA L'ENERGIA POTENZIALE PER UNITÀ DI CARICA (MA QUESTO ERA GIÀ NOTO!)