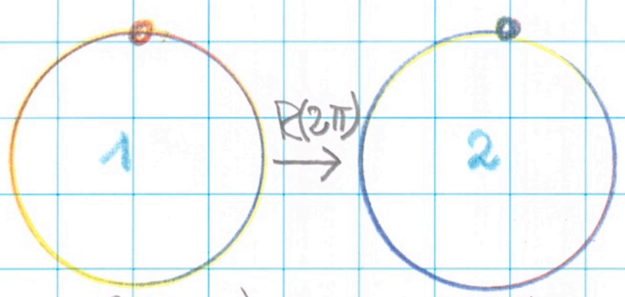
TOTAL SIMMETRICA RISPETTO A $R(\theta)$



IL PUNTO INTRODOTTO "ROMPE" LA SIMMETRIA. ORA SOLO $R(2\pi)$ O $R(2n\pi)$ RENDE (1) INDISTINGUIBILE DA (2)

$R(2n\pi)$ E' PERCIO' UNA TRASFORMAZIONE CHE RAPPRESENTA UNA SIMMETRIA DEL SISTEMA

IN MODO ANALOGO UNA TRASFORMAZIONE APPLICATA AI CAMPI E.M. $\bar{E} \xrightarrow{G} \bar{E}'$ E $\bar{B} \xrightarrow{G} \bar{B}'$ CHE RENDE $\bar{E}'$ E $\bar{B}'$ INDISTINGUIBILI DA $\bar{E}$ E $\bar{B}$ RAPPRESENTA UNA SIMMETRIA DELLE EQS. CHE DEFINISCONO $\bar{E}$ E $\bar{B}$ (DUNQUE DELLE EQS. DI MAXWELL).

- CONTEST. PRODURRE CON UNO SCHEMA LA SINTESI DESCRITTA NELLE PAG. 268-270-

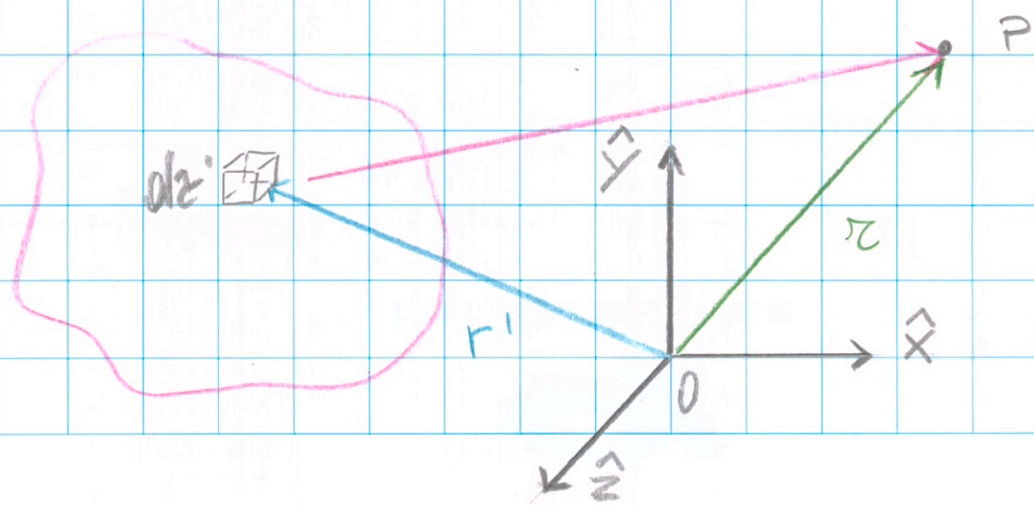
- LEZIONE #24 POTENZIALI RITARDATI PER UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICHE.

PER IL CASO STATICO ABBIAMO

$$\nabla^2 V = \rho/\varepsilon_0 \; ; \; \nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$$

LE CUI SOLUZIONI SONO

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(r')}{\mathscr{r}}\, d\tau' \; ; \; \bar{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\bar{J}(r')}{\mathscr{r}}\, d\tau'$$



PER CARICHE NON STATICHE I CAMPI GENERATI NELL'ELEMENTO DI VOLUME $d\tau'$ SARANNO AVVERTITI IN P DOPO UN CERTO TEMPO, DATO CHE IL SEGNALE MEDIATORE DELLE INTERAZIONI E.M. VIAGGIA A VELOCITÀ FINITA, QUINDI CON UN CERTO "RITARDO" RISPETTO ALLA GENERAZIONE DEL SEGNALE. BASTI PENSARE CHE LA LUCE DEL SOLE CHE OSSERVIAMO ORA SULLA TERRA È STATA GENERATA CIRCA 8.30' FA. IL CONTO È PRESTO FATTO, SE t È IL TEMPO PRESENTE SI SOTTRAE IL TEMPO IMPIEGATO DALLE ONDE E.M. PER COPRIRE LA DISTANZA SOLE-TERRA A $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s E SI OTTIENE IL TEMPO AL QUALE L'ONDA È STATA GENERATA RISPETTO AL NOSTRO. $t_{SOLE} = t_{TERRA} - d_{S-T}/c$. QUESTO NELL'IPOTESI CHE TEMPO E SPAZIO SIANO ASSOLUTI (GALILEO-NEWTON). ORA FACENDO RIFERIMENTO ALLA FIGURA NELLA PAG. PRECEDENTE $\bar{r}$ = DISTANZA TRA P E O PRESO COME ORIGINE DEL S.d.R $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\bar{r}'$ = DISTANZA TRA $d\tau'$ E O E $\mathscr{r}$ = DISTANZA TRA $d\tau'$ E P. QUESTA SARÀ LA NOTAZIONE PER LE COORDINATE SPAZIALI CHE USEREMO DA ORA IN POI. CON QUESTA NOTAZIONE IL TEMPO, CHE CHIAMEREMO RITARDATO (NEL SENSO CHE IL SEGNALE E.M. È STATO OSSERVATO DOPO QUESTO TEMPO) È DATO DA

$$\boxed{t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}}$$

TEMPO AL QUALE IL SEGNALE È STATO GENERATO

TEMPO ATTUALE

TEMPO IMPIEGATO DAL SEGNALE

QUINDI LE RELAZIONI DEI POTENZIALI V E $\bar{A}$ DIVENTANO:

$$V(\bar{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\frac{\rho(\bar{r}',t_r)}{\textit{z}}\,d\tau';\quad \bar{A}(\bar{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\bar{J}(\bar{r}',t_r)}{\textit{z}}\,d\tau'$$

POSIZIONE E TEMPO ATTUALI IN P — DISTANZA $d\tau'$ - P — POSIZIONE E TEMPO AI QUALI IL SEGNALE E' STATO GENERAT

DOVE $\rho(\bar{r}',t_r)$ E' LA DENSITÀ DI CARICA IN r' A t_r. PER QUESTO SONO DETTI POTENZIALI RITARDATI, id est OSSERVATI IN RITARDO RISPETTO AL TEMPO DI GENERAZIONE. TUTTAVIA, PER DIMOSTRARE CHE $V(\bar{r},t)$ E $\bar{A}(\bar{r},t)$ SONO CORRETTI E' NECESSARIO DIMOSTRARE CHE SODDISFANO LE EQ. INOMOGENEE DELLE ONDE (OVVERO LE EQS. DI MAXWELL) $\Box^2 V=\rho(\bar{r}',t_r)/\varepsilon_0$ E $\Box^2\bar{A}=-\mu_0\bar{J}(\bar{r}',t_r)$ DATO CHE STIAMO CONSIDERANDO DEI POTENZIALI "TRASMESSI" TRAMITE ONDE E.M.. INFATTI, QUESTO ARGOMENTO EURISTICO NON SI APPLICA AI CAMPI. INFATTI, COME DIMOSTREREMO $\bar{E}(\bar{r},t)\neq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\frac{\rho(\bar{r}',t_r)}{\textit{z}^2}\,d\hat{\textit{z}}$ E $B(\bar{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\bar{J}(\bar{r}',t_r)}{\textit{z}^2}\,d\tau'$.

IL PUNTO CRUCIALE NEL CALCOLO DEL $\Box^2$ RISULTA ESSERE IL ∇^2 DATO CHE LE FUNZIONI INTEGRANDE DEI POTENZIALI DIPENDONO DA $\bar{r}$ SIA AL NUMERATORE $(t_r=t-\textit{z}/c)$ E AL DENOMINATORE $(\textit{z})$, ESSENDO $\textit{z}=|\bar{r}-\bar{r}'|$. PER CALCOLARE ∇^2 PRIMA CALCOLIAMO $\bar{\nabla}$.

$$\bar{\nabla}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\left[(\bar{\nabla}\rho)\frac{1}{\textit{z}}+\rho\bar{\nabla}\left(\frac{1}{\textit{z}}\right)\right]d\tau'.$$

CALCOLIAMO PRIMA (*) $\bar{\nabla}\rho=\dot{\rho}\,\bar{\nabla}t_r=-\frac{1}{c}\dot{\rho}\,\bar{\nabla}\textit{z}$ (SI RICORDI CHE $\textit{z}=(t_r-t)/c$ E $\dot{\rho}=d\rho/dt$). ORA PASSIAMO AL CALCOLO DI $\bar{\nabla}\textit{z}$ ⇒ $\bar{\nabla}\textit{z}=\hat{\textit{z}}$ E $\bar{\nabla}(1/\textit{z})=-\hat{\textit{z}}/\textit{z}^2$

(*) SI NOTI CHE $\partial/\partial t_r=\partial/\partial t$ DATO CHE $t_r=t-\textit{z}/c$ E $\textit{z}$ NON DIPENDE DA t

(VEDI D.G. PROB. 1.13 LA CUI SOLUZIONE E' INVIATA A PARTE) $\Rightarrow$ $\bar{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\left[-\frac{\dot{\rho}\,\hat{\mathfrak{r}}}{c\,\mathfrak{r}} - \rho\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^2}\right]d\tau'$. IL ∇^2 SI OTTIENE DALLA $\bar{\nabla}\cdot$ DEL $\bar{\nabla}$ $\Rightarrow$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left\{-\frac{1}{c}\left[\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}\cdot(\bar{\nabla}\dot{\rho}) + \dot{\rho}\,\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}\right)\right] - \left[\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^2}\cdot(\bar{\nabla}\rho) + \rho\,\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^2}\right)\right]\right\}d\tau'$$

MA $\bar{\nabla}\dot{\rho} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\bar{\nabla}\mathfrak{r} = -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\,\hat{\mathfrak{r}}$ E $\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}\right) = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}$ $\left(\bar{\nabla}\cdot\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(\mathfrak{r}^2\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\partial_r\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\right)$, MENTRE $\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^2}\right) = 4\pi\delta^3(\bar{\mathfrak{r}})$ (*)

$$\Rightarrow \nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{\mathfrak{r}} - 4\pi\delta^3(\mathfrak{r})\right]d\tau' = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 V - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\bar{r},t)$$

QUESTO CONFERMA CHE IL POTENZIALE RITARDATO

$$V(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\frac{\rho(\bar{r}',t_r)}{r'}d\tau' \quad \text{SODDISFA} \quad \square^2 V = \rho/\varepsilon_0$$

ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA PER $\bar{A}(\bar{r},t)$.

EQUAZIONI DI JEFIMENKO. DAI POTENZIALI RITARDATI E' POSSIBILE RICAVARE I CAMPI $\bar{E} = -\bar{\nabla}V - \partial_t\bar{A}$ E $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$. ANCHE IN QUESTO CASO LA DIPENDENZA DI $\bar{r}$ DALLE FUNZIONI INTEGRANDE VALE PER $\mathfrak{r} = |\bar{r} - r'|$ E $t_r = t - \mathfrak{r}/c$. ABBIAMO GIA' CALCOLATO

$$\bar{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} - \rho\frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^2}\right]d\tau' \quad \text{MENTRE}$$

$$\partial_t\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{\bar{J}}}{\mathfrak{r}}d\tau' \Rightarrow \text{CON } c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$$

$$E(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\frac{\rho(r',t_r)}{\mathfrak{r}^2}\hat{\mathfrak{r}} + \frac{\dot{\rho}(r',t_r)}{c\,\mathfrak{r}}\hat{\mathfrak{r}} - \frac{\dot{\bar{J}}(r',t_r)}{c^2\mathfrak{r}}\right]d\tau'$$

QUESTA DA CUI SI DERIVA LA LEGGE DI COULOMB DIP. DAL TEMPO

(*) VEDI D.G CAP. 1.5.3

PER CALCOLARE $\bar{B}$ È NECESSARIO CALCOLARE $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} =$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{1}{\mathscr{r}} \left(\bar{\nabla} \times \bar{J} \right) - \bar{J} \times \nabla \left(\frac{1}{\mathscr{r}} \right) \right] d\tau'$$

DOVE $(\bar{\nabla} \times \bar{J})_x = \partial_z J_y - \partial_y J_z$

E $\partial_z J_y = \dot{J}_z \partial_y t_r = \frac{1}{c} \dot{J}_z \partial_y \mathscr{r} \Rightarrow$

$$(\bar{\nabla} \times \bar{J})_x = -\frac{1}{c} \left(\dot{J}_z \partial_y \mathscr{r} - \dot{J}_y \partial_z \mathscr{r} \right) = \frac{1}{c} \left[\dot{\bar{J}} \times (\bar{\nabla} \mathscr{r}) \right]_x$$

MA

$\bar{\nabla} \mathscr{r} = \hat{\mathscr{r}} \Rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{J} = \frac{1}{c} \dot{\bar{J}} \times \hat{\mathscr{r}}$, MENTRE $\bar{\nabla}(1/\mathscr{r}) = -\hat{\mathscr{r}}/\mathscr{r}^2$

$$\Rightarrow \bar{B}(\bar{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\bar{J}(r', t_r)}{\mathscr{r}^2} + \frac{\dot{\bar{J}}(r', t_r)}{c\mathscr{r}} \right] \times \hat{\mathscr{r}} \, d\tau'$$

POTENZIALI DI LIENARD-WIECHERT