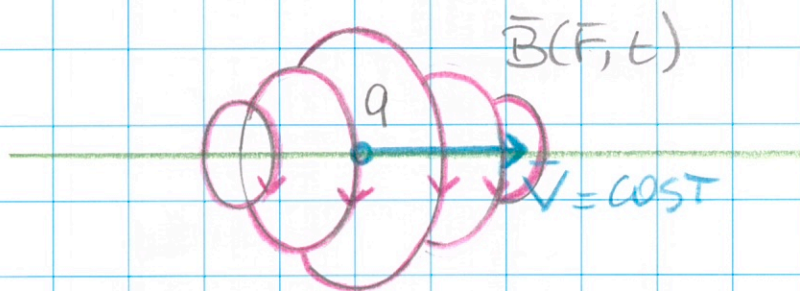


$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{r^3} + \frac{1}{c} \left(\frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow$$

" $(\vec{r} \parallel \vec{E})$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \vec{\beta} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} \left(\frac{\vec{\beta} \times \vec{r}}{r^2} \right)$$

QUIUDI LE LINEE DI $\vec{B}(\vec{r}, t)$ CIRCOLANO ATTORNO ALLA DIREZIONE DI $\vec{v} = \text{cost}$ DELLA q



COME ABBIAMO GIÀ ACCENNATO PER V <<< c

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{LEGGE DI COULOMB})$$

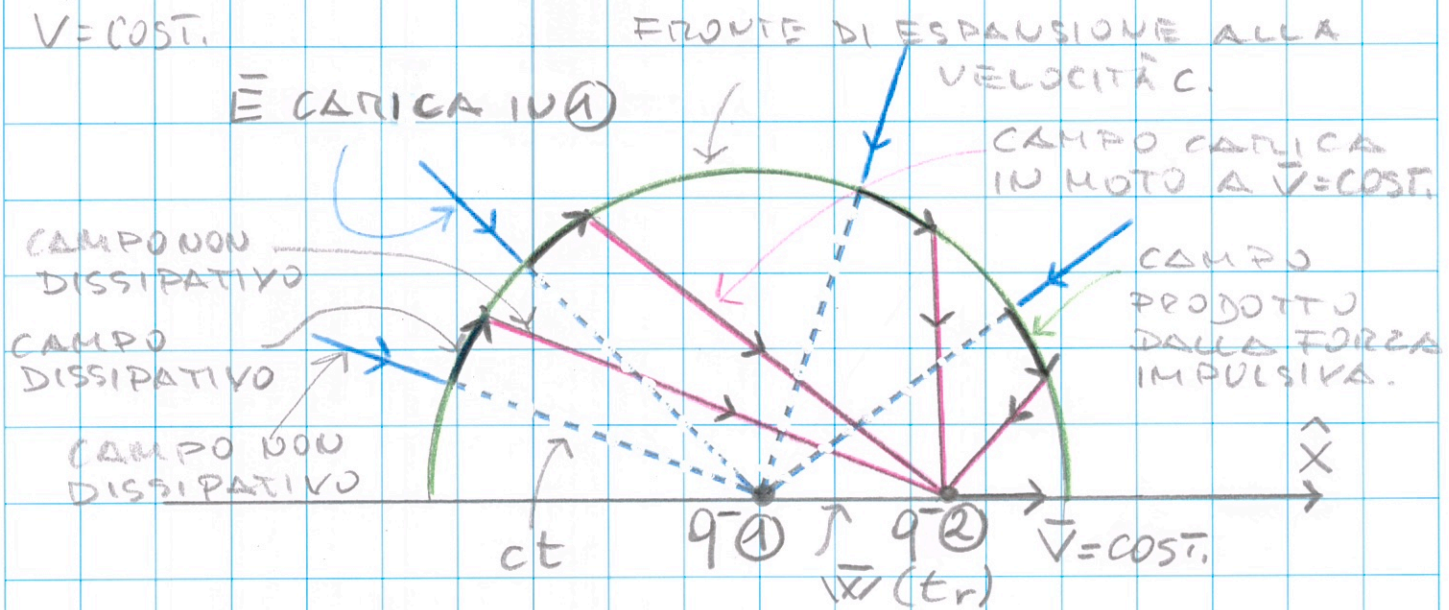
ESSENZIALMENTE

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{q}{r^2} (\vec{v} \times \hat{r}) \quad (\text{LEGGE DI BIOT-SAVART})$$

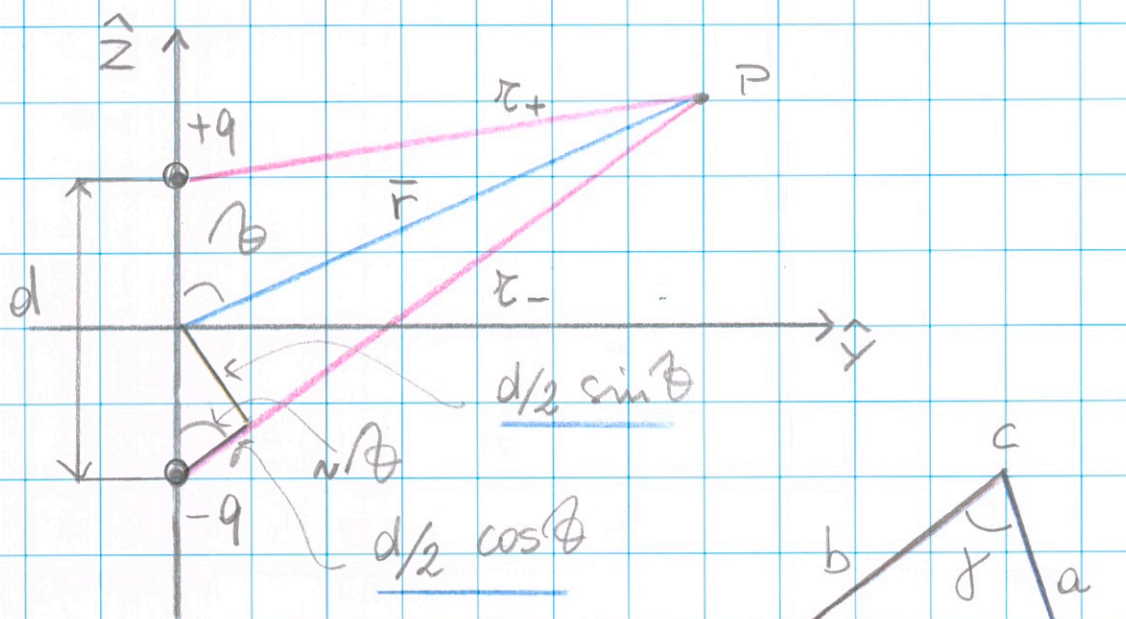
ESSENZIALMENTE

● LEZIONE #25 ABBIAMO STABILITO CHE LA RADIAZIONE E.M. È ORIGINATA DA CARICHE SOTTOPOSTE ALLA AZIONE DI UNA FORZA (\Rightarrow ACCELERATA) GENERANDO UN CAMPO E.M. CHE SI PROPAGA ALL'INFINITO E QUIUDI RAPPRESENTA ENERGIA DISSIPATA. VEDREMO PIÙ AVANTI CHE ANCHE DIPOLI MAGNETICI OSCILLANTI GENERANO CAMPI E.M. RADIATIVI. IN ULTIMA ISTANZA LA RADIAZIONE E.M. È UN PROCESSO IRREVERSIBILE. PER FORMALIZZARE QUESTI CONCETTI POSSIAMO SCRIVERE $P(\vec{E}) = \oint_{S_1} \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a}$

IL LIMITE PER $r \rightarrow \infty$ DEL FLUSSO DI S RAPPRESENTA LA POTENZA IRRADIATA $P_{RAD} = \lim_{r \rightarrow \infty} P(r)$. PER VISUALIZZARE MEGLIO LA FISICA DEI PROCESSI RADIATIVI CONSIDERIAMO LA SEGUENTE FIGURA DOVE SONO RAPPRESENTATE LE LINEE DEI CAMPI ELETTRICI DI UNA CARICA PRIMA FERMA, POI SOTTOPOSTA A UNA FORZA IMPULSIVA E QUINDI A UN MOTO CON $\vec{v} = \text{cost.}$



RADIAZIONE DI DIPOLLO ELETTRICO OSCILLANTE



LEGGE COSENI: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

LA SIMMETRIA DEL PROBLEMA È SFERICA, SUPPONIAMO CHE A UN TEMPO t LA CARICA SIA $+q(t)$ NELLA SFERA SUPERIORE E $-q(t)$ NELLA SFERA INFERIORE E SUPPONIAMO CHE LA CARICA SI SPOSTI DA UNA SFERA ALL'ALTRA, SOTTO L'AZIONE DI UNA FORZA ESTERNA, A UNA FREQUENZA ANGOLARE ω . IN TERMINI ANALITICI QUESTO PROCESSO LO POSSIAMO DESCRIVERE COME $q(t) = q_0 \cos \omega t$.

DI CONSEGUENZA NE RISULTA UN DIPOLO ELETTRICO OSCILLANTE $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \hat{z}$, CON $p_0 \equiv q_0 d$. IL POTENZIALE

RITARDATO RISULTA IN \mathbb{P}

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_0 \cos[\omega(t - r_+/c)]}{r_+} - \frac{q_0 \cos[\omega(t - r_-/c)]}{r_-} \right\}$$

DOVE APPLICANDO LA LEGGE DEI COSENI OTTENIAMO

$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp r d \cos \theta + (d/2)^2} \Rightarrow r_{\pm} = r \sqrt{1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{r}\right)^2}$$

ORA INTRODUCENDO LA PRIMA APPROSSIMAZIONE

① $d \ll r \Rightarrow \left(\frac{d}{r}\right)^2$ LO POSSIAMO IGNOTARE \Rightarrow

$$r_{\pm} \approx r \sqrt{1 \mp \left(\frac{d}{r} \cos \theta\right)}. \text{ QUINDI CONSIDERANDO LO SVILUPPO } \sqrt{1 \mp \epsilon} \approx 1 \mp \frac{1}{2} \epsilon \mp \dots \text{ PER } \epsilon \ll 1 \Rightarrow r_{\pm} \approx r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta\right)$$

IN MODO SIMILE POSSIAMO CALCOLARE $\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 \mp \left(\frac{d}{r} \cos \theta\right)}} \approx \frac{1}{r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta\right)}$, MA $\frac{1}{1 \mp \epsilon} \approx 1 \pm \epsilon$ PER $\epsilon \ll 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta\right). \text{ MENTRE } \cos\left[\omega\left(t - \frac{r_{\pm}}{c}\right)\right] \approx$$

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c} \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta\right)\right)\right] = \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \pm \left(\frac{\omega}{2c} \cos \theta\right)\right]$$

DA CUI APPLICANDO LE RELAZIONI DI PROSTAFETESI

$$\cos(k \pm r) \Rightarrow \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos\theta\right)\right] \mp \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\left[\left(\frac{\omega d}{2c} \cos\theta\right)\right].$$

ORA APPLICHIAMO LA SECONDA APPROSSIMAZIONE

② $d \ll \frac{c}{\omega}$ ($d \ll \lambda$) $\Rightarrow \frac{\omega d}{c} \ll 1$. QUESTA CONDIZIONE EQUIVALE A RICHIEDERE CHE LA DIMENSIONE DEL DIPOLLO SIA \ll DELLA LUNGHEZZA D'ONDA DELLA RADIAZIONE GENERATA. NATURALMENTE, AUMENTANDO ω QUESTA CONDIZIONE POTREBBE ESSERVIOLATA, MA NON LO È PASSANDO DA UNA ANTENNA RADIO A UN ATOMO CHE EMETTE LUCE DOVE LE FREQUENZE PASSANO DAI MHz A 10^{18} Hz MA LE DIMENSIONI DEL DIPOLLO PASSANO DA 1 m A 10 fm ($0.1 \text{ \AA} \rightarrow 10^{-11} \text{ m}$) $\left(\frac{10^{18} \text{ Hz} \cdot 10^{-11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m}}\right) \approx 0.03 \ll 1$. QUESTO

EQUIVALE A IGORARE LE DIFFERENZE TRA I TEMPI DI RITARDO ASSOCIATI A PUNTI SORGENTE ASSOCIATI ALLA DIMENSIONE DELLA SORGENTE. IN ALTRE PAROLE LA SORGENTE DEVE ESSERE PICCOLA RISPETTO A λ AL FINE DI USARE UN UNICO t_r PER TUTTI I PUNTI DELLA SORGENTE.

● PROBLEMA DISCUTERE L'APPROSSIMAZIONE $d \ll \lambda$ IN RELAZIONE ALLA COERENZA SPAZIALE.

IN BASE A QUESTA APPROSSIMAZIONE $\cos\left[\omega\left(t - \frac{r \pm}{c}\right)\right] \Rightarrow \approx \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos\theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \Rightarrow$

$$V(\vec{r}, \theta, t) = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\omega}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] + \frac{1}{r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\}$$

CHE PER $\omega \rightarrow 0$ $V = \frac{\phi_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ CHE È IL $V(r, \theta)$ DI UN DIPOLO STATICO.

PER IL CALCOLO DEL CAMPO IRRAGGIATO INTRODUCIAMO UNA TERZA APPROSSIMAZIONE

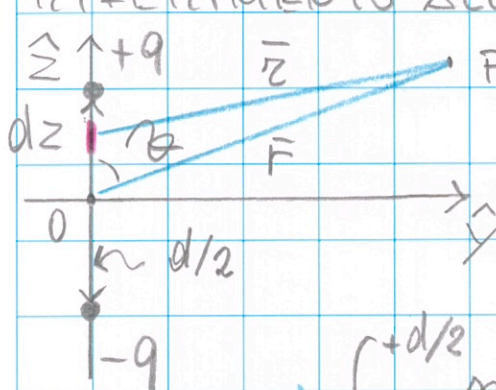
③ $r \gg c/\omega$ ($r \gg \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow r \gg \frac{1}{k}$) NELLO SPAZIO DOVE QUESTA CONDIZIONE SI VERIFICA

$$V(\vec{r}, \theta, t) = - \frac{\phi_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)]$$

PER CALCOLARE $\vec{A}(\vec{r}, \theta, t)$ POSSIAMO PRENDERE IN CONSIDERAZIONE LA CORRENTE CHE SCORRE NEL

FILLO $\vec{I}(t) = \frac{dq}{dt} \hat{z} = -q_0 \omega \sin(\omega t) \hat{z}$ QUINDI FACENDO

RIFERIMENTO ALLA SEGUENTE FIGURA PER $d/r \ll 1$



$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{-q_0 \omega \sin[\omega(t - r/c)] \hat{z}}{z} dz$$

CHE CON $z = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}$

CON $z \leq d/2$ DIVENTA, $\Rightarrow z \approx \sqrt{r^2}$

$$\Rightarrow \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{\sin[\omega(t - r/c)]}{z} dz \approx \frac{\sin[\omega(t - r/c)]}{r} d$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, \theta, t) = - \frac{\mu_0 q_0 d \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{z}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, \theta, t) = - \frac{\mu_0 \phi_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{z}. \text{ DATO CHE}$$

IL PROBLEMA È A SIMMETRIA SFERICA CALCOLIAMO

$\vec{\nabla} V$, $\partial_t \vec{A}$ E $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ IN COORDINATE SFERICHE

DATO CHE V NON DIPENDE DA φ L'OPERATORE

$\vec{\nabla}$ APPLICATO A $V(r, \theta, t)$ DA' $\vec{\nabla} V = \partial_r V \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta V \hat{\theta} =$

$$\vec{\nabla}V = \frac{\rho_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \cos\theta \left(\frac{1}{r^2} \sin[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega}{rc} \cos[\omega(t - r/c)] \right) \hat{r} + \right. \\ \left. - \frac{\sin\theta}{r^2} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\theta} \right\} \quad \text{IN FORZA DELLA APPROSSIMAZIONE } r \gg \frac{c}{\omega}$$

ITERMINI $\frac{\omega}{c r^2}$ SONO $\ll 1$ E VENGONO IGNORATI $\Rightarrow \vec{\nabla}V \approx \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\cos\theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{r}$

$$\partial_t \vec{A} = - \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial_t \vec{A} = \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}$$

$$\text{MENTRE } \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} [\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r] \hat{\phi} \Rightarrow$$

$$= - \frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi c} \left\{ \frac{\omega}{c} \sin\theta \cos[\omega(t - r/c)] + \frac{\sin\theta}{r} \sin[\omega(t - r/c)] \right\} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \approx \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}$$

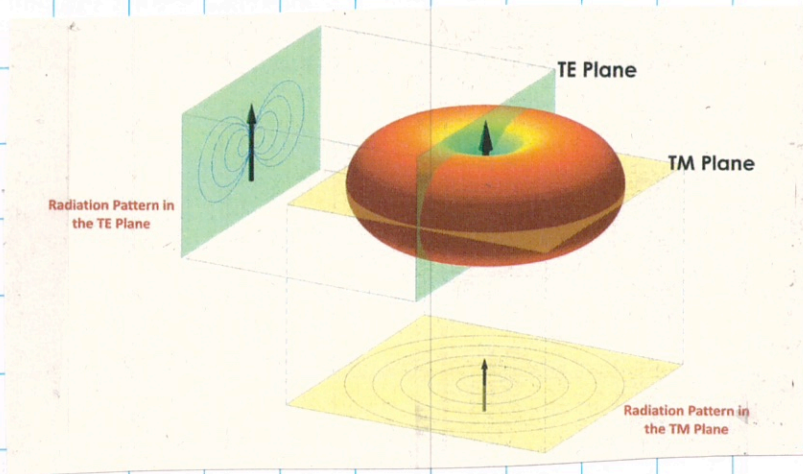
LE EQS. DI \vec{E} E \vec{B} RAPPRESENTANO UN'ONDA E.M. MONOCROMATICA A FREQUENZA ANGOLARE ω CON FRONTE D'ONDA SFERICO CHE SI PROPAGA A C E CON I CAMPI $E \hat{\theta} = \vec{E}$ E $B \hat{\phi} = \vec{B}$ MUTUAMENTE \perp . PER r MOLTO GRANDI QUESTE ONDE SFERICHE SONO APPROSSIMABILI A ONDE PIANE. IL VETTORE

DI POYTING E' DATO DA

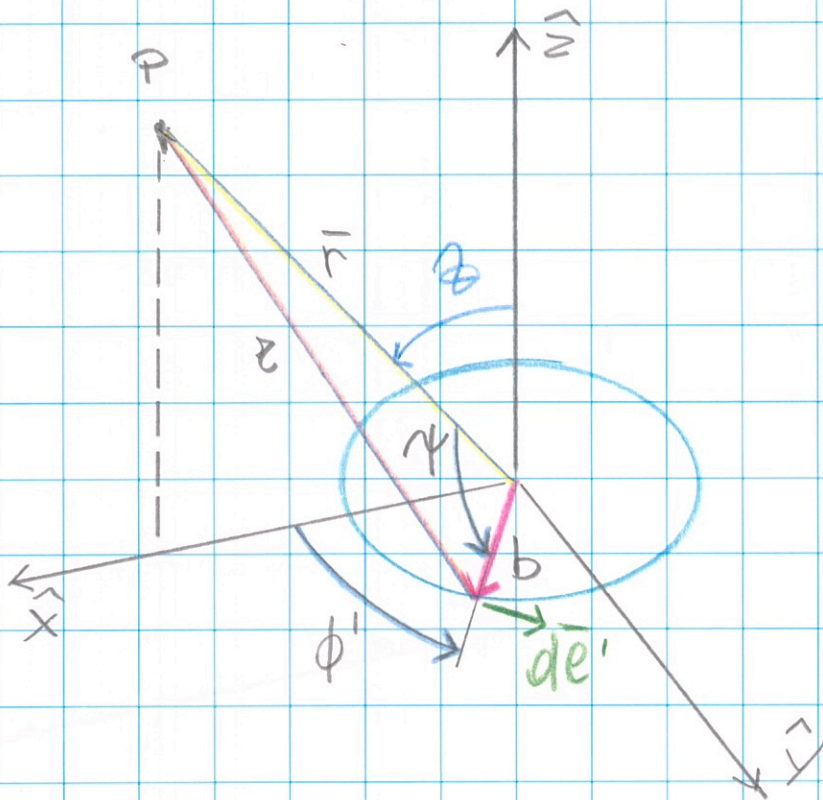
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{r}$$

$$\text{MENTRE } \langle \vec{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 \rho_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r} \text{ CON}$$

$$\langle P \rangle = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 \rho_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\mu_0 \rho_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$



RADIAZIONE DI DIPOLLO MAGNETICO



RADIAZIONE DA UN DIPOLO MAGNETICO

SUPPONIAMO UNA SPIRA DI RAGGIO b

(VEDI FIG) PERCORSA DA UNA CORR.

$$\underline{I(t) = I_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \underline{m(t) = \pi b^2 I(t) \hat{z}}$$

$$\text{LA SPIRA GIACE (X, Y) } = \underline{m_0 \cos(\omega t) \hat{z}}$$

LA CARICA TOTALE DEL SISTEMA È \emptyset

$\Rightarrow V(\vec{r}, t) = 0$. IL POTENZIALE VETTORE

PIZARDATO È

$$\underline{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\pi} \frac{I_0 \cos[\omega(t - \frac{r}{c})] d\vec{\ell}'}{r}}$$

PER UN PUNTO $P \equiv \vec{r}$ DIRETTAMENTE

SOPRA \hat{x} . \vec{A} È DIRETTO \hat{y} DATO CHE LE

COMPONENTI LUNGO \hat{x} PER PUNTI SIMM.

SI CANCELLANO \Rightarrow

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{y} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\omega(t - \frac{r}{c})] \cos\phi' d\phi'}{r}$$

$\cos\phi'$ CI DÀ LA COMP. \hat{y} DI $d\vec{\ell}'$.

DALLA LEGGE DEI COSENI ABBIAMO

$$\underline{r = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos\gamma}}$$

$$\underline{\gamma \equiv \hat{r} \cdot \hat{b}; \gamma = \arccos(\hat{r} \cdot \hat{b})}$$

$$\vec{r} = r \sin \Phi \hat{x} + r \cos \Phi \hat{z}, \quad \vec{b} = b \cos \phi' \hat{x} + b \sin \phi' \hat{y}$$

$$\Rightarrow r b \cos \psi = \vec{r} \cdot \vec{b} = r b \sin \Phi \cos \phi' \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{r^2 + b^2 - 2 r b \sin \Phi \cos \phi'}$$

① APPROX. $b \ll r \Rightarrow$

$$r \approx r \left(1 - \frac{b}{r} \sin \Phi \cos \phi' \right)$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \Phi \cos \phi' \right)$$

$$\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \Phi \cos \phi' \right]$$

$$\downarrow \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega b}{c} \sin \Phi \cos \phi' \right) - \Rightarrow$$

$$- \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{\omega b}{c} \sin \Phi \cos \phi' \right)$$

② APPROX. $b \ll \frac{c}{\omega} \Rightarrow$

$$\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \Rightarrow$$

$$\frac{\omega b}{c} \sin \Phi \cos \phi' \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

DA CUI

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{y} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \phi' d\phi' \right.$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left[b \sin \Phi \cos \phi' \left(\frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \Rightarrow \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \cos \phi' d\phi' \right] \frac{1}{r}$$

IL PRIMO INTEG. $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$

IL SECONDO CONTIENE $\cos^2 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \pi$

INOLTRE SI NOTA CHE \bar{A} È DIRETTO COME $\hat{\phi} \Rightarrow$

$$\bar{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \left\{ \dots \right\} \hat{\phi}$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

PER $\omega = 0$ $\bar{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$

③ APPROX. $r \gg \frac{c}{\omega}$

$$\bar{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\phi}$$

$\bar{E} = -\bar{\nabla} V - \partial_t \bar{A}$ CON $V=0 \Rightarrow \bar{E} = -\partial_t \bar{A}$

$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$

$\bar{E} = \partial_t \bar{A} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\phi}$

$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta}$

\bar{B} CALCOLATO CON L'APPROX. 3

\bar{E} e \bar{B} SONO IN FASE, \perp MUTUALI.

TRASVERSI ALLA DIREZ. DI PROP. \hat{r} E IL
RAPPORTO DELLE AMPIEZZE E'

$E_0/B_0 = c \Rightarrow$ COSTIT. UN' ONDA E.M.

SONO MOLTO SIMILI A QUELLI DI

UN DIP. OSCIL SOLO CHE QUI

$$\underline{B \hat{\phi} \quad E \hat{e} \hat{\phi}}$$

$$\underline{\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} (\bar{E} \times \bar{B})}$$

$$= \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \phi}{r} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}^2 \hat{r}$$

$$\langle \bar{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \phi}{r^2} \hat{r}$$

$$\langle \bar{P} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

$$\frac{P_M}{P_E} = \left(\frac{m_0}{\tau_0 c} \right)^2 \Rightarrow m_0 = \pi b^2 \tau_0; \tau_0 = q_0 d$$

NEL DIP. $I_0 = q_0 \omega$. PONEENDO $d = \pi b$

$$\frac{P_M}{P_E} = \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2$$

A GRANDI DISTANZE

$$d = \pi b \ll \lambda \ll r$$

$$\frac{\omega b}{c} \ll 1 !!$$

ASSUTA MOLTO PICCOLA
APPROSS. 2.

