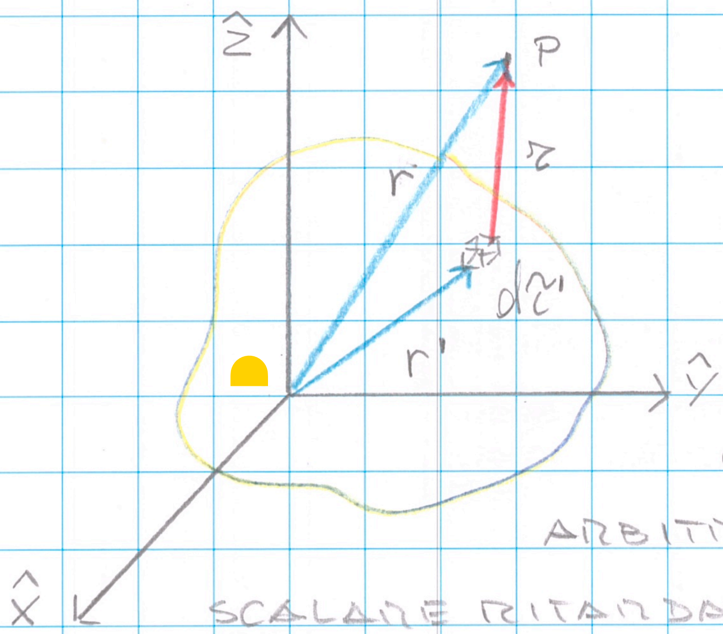
RADIAZIONE DA UNA SORGENTE ARBITRARIA



LA QUESTIONE CHE PONIAMO ORA E' IL CALCOLO DELLA POTENZA IRRAGGIATA DA UNA SORGENTE DI CARICHE E CORRENTI ARBITRARIE. IL POTENZIALE SCALARE RITARDATO E'

$$V(\bar{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\bar{r}',t-\imath/c)}{\imath}d\tau' \quad \text{DOVE}$$

$$\imath=\sqrt{r^2+r'^2-2\bar{r}\cdot\bar{r}'}$$

INTRODUCIAMO LA PRIMA APPROSIMAZIONE

1) $\bar{r}'\ll\bar{r}$ $\Rightarrow$ IL PUNTO P E' MOLTO PIÙ LONTANO RISPETTO ALLE DIMENSIONI LINEARI DELLA SORGENTE. INOLTRE r' E' UNA VARIABILE DI INTEGRAZIONE E QUINDI QUESTA APPROSIMAZIONE IMPLICA CHE $\bar{r}'$ QUANDO VARIA SU TUTTI I PTI DEL VOLUME DELLA SORGENTE E' SEMPRE $\ll\bar{r}$.

CON QUESTA APPROX. $\imath\simeq r\left(1-\frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r^2}\right)$ E QUINDI

$$\frac{1}{\imath}\simeq\frac{1}{r}\left(1+\frac{\bar{r}\cdot\bar{r}'}{r^2}\right) \quad \text{E} \quad \rho(\bar{r}',t-\imath/c)\simeq\rho\left(\bar{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{\hat{r}\cdot\bar{r}'}{c}\right)$$

DA CUI ESPANDENDO ρ IN SERIE DI TAYLOR DI t RISPETTO AL TEMPO RITARDATO ALL'ORIGINE $t_0=t-\frac{r}{c}$

$$\Rightarrow \rho(\bar{r}',t-\imath/c)\simeq\rho(\bar{r}',t_0)+\dot{\rho}(\bar{r}',t_0)\left(\frac{\hat{r}\cdot\bar{r}'}{c}\right)+\dots$$

DOVE I TERMINI SUCESSIVI DELLA SERIE $\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{\rho}\left(\frac{\hat{r}\cdot\bar{r}}{c}\right)^2 + \frac{1}{3!}\dddot{\rho}\left(\frac{\hat{r}\cdot\bar{r}}{c}\right)^3 + \dots$ SI POSSONO TRASCURARE SE

(2) $r' \ll \frac{c}{|\dot{\rho}/\rho|}, \frac{c}{|\ddot{\rho}/\rho|^{1/2}}, \frac{c}{|\dddot{\rho}/\rho|^{1/3}}$, ETC.

PER UN SISTEMA OSCILLANTE CIASCUNO DI QUESTI TERMINI È c/ω E QUINDI RICADIAMO NELLA APPROX. (2) VISTA IN PRECEDENZA. INTERPRETARE IL SIGNIFICATO FISICO DI QUESTA APPROX. È PIÙ DIFFICILE, MA PER LA MATEMATICA IMPLICATA SOLO IL PRIMO TERMINE SARÀ PRESO IN CONSIDERAZIONE. QUINDI UTILIZZANDO LE APPROX. 1 E 2 OTTENIAMO

$$V(\bar{r},t) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\underbrace{\int \rho(\bar{r}',t_0)\,d\tau'}_{\substack{\text{CARICA TOT.} \\ Q \text{ A } t_0}} + \frac{\hat{r}}{r}\cdot\int \bar{r}'\rho(\bar{r}',t_0)\,d\tau' + \frac{\hat{r}}{c}\cdot\frac{d}{dt}\int \bar{r}'\rho(\bar{r}',t_0)\,d\tau'\right]$$

$\Rightarrow$ PER LA CONS. DELLA CARICA ESSA È INDIP. DAL TEMPO

GLI ALTRI DUE INTEGRALI RAPPRESENTANO IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO A t_0 $\Rightarrow$

$$V(\bar{r},t) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\bar{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{r}\cdot\dot{\bar{p}}(t_0)}{rc}\right].$$

NEL CASO STATICO I PRIMI DUE TERMINI SONO I CONTRIBUTI DI MONOPOLO E DIPOLO ALLA ESPANSIONE IN MULTIPOLO DI V, MENTRE IL TERZO TERMINE CHE DIPENDE DAL TEMPO NON SAREBBE PRESENTE. PER QUANTO RIGUARDA $\bar{A}(\bar{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{J}(\bar{r}',t-\imath/c)}{\imath}\,d\tau'$ AL PRIMO ORDINE IN r' È SUFFICIENTE SOSTITUIRE $\imath$ CON r $\Rightarrow$

$\bar{A}(\bar{r},t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \bar{J}(r',t_0)\,d\tau'$ (QUINDI VEDI D.G PROB.

5.7) L'INTEGRALE DI $\bar{J}$ È LA DERIVATA TEMPORALE DEL MOMENTO DI DIPOLO $\Rightarrow$

$\bar{A}(\bar{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\bar{p}}(t_0)}{r}$. DA CUI SI CAPISCE PERCHE' E' SUFFICIENTE L'APPROX. ALL'ORDINE ZERO DI $\tau \simeq r$, DATO CHE $\bar{p}$ E' GIA' AL PRIMO ORDINE IN r' E QUINDI OGNI ALTA CORREZIONE SAREBBE AL SECONDO ORDINE. ORA CALCOLIAMO I CAMPI. DATO CHE SIAMO INTERESSATI AI CAMPI RADIATIVI RITENIAMO SOLO I TERMINI $\propto \frac{1}{r}$

(3) NON CONSIDERIAMO I TERMINI $1/r^2$ DI $\bar{E}$ E $\bar{B}$

COSI IL PRIMO TERMINE $V(\bar{r},t)$, i.e. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \Rightarrow$

$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ NON CONTRIBUISCE ALLA RADIAZIONE E.M.

DALLA EQ. $t_0 = t - \frac{r}{c}$ SEGUE $\bar{\nabla} t_0 = -\frac{1}{c}\bar{\nabla} r = -\frac{1}{c}\hat{r} \Rightarrow$

$$\bar{\nabla} V \simeq \bar{\nabla}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}\cdot\dot{\bar{p}}(t_0)}{rc}\right] \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{r}\cdot\ddot{\bar{p}}(t_0)}{rc}\right]\bar{\nabla} t_0 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{[\hat{r}\cdot\ddot{\bar{p}}(t_0)]}{r}\hat{r}$$

MENTRE $\bar{\nabla}\times\bar{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\bar{\nabla}\times\dot{\bar{p}}(t_0)\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[(\bar{\nabla} t_0)\times\ddot{\bar{p}}(t_0)\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi r c}\left[\hat{r}\times\ddot{\bar{p}}(t_0)\right]$

E $\partial_t \bar{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\bar{p}}(t_0)}{r} \Rightarrow \bar{E}(\bar{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[(\hat{r}\cdot\ddot{\bar{p}})\hat{r} - \ddot{\bar{p}}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\hat{r}\times(\hat{r}\times\ddot{\bar{p}})\right]$

DOVE $\ddot{\bar{p}}$ E' VALUTATO AL TEMPO $t_0 = t - r/c$.

$\bar{B}(\bar{r},t) \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r c}\left[\hat{r}\times\ddot{\bar{p}}\right]$. SE ORA USIAMO LE COORDINATE SFERICHE CON $\hat{z} \parallel \bar{p}$

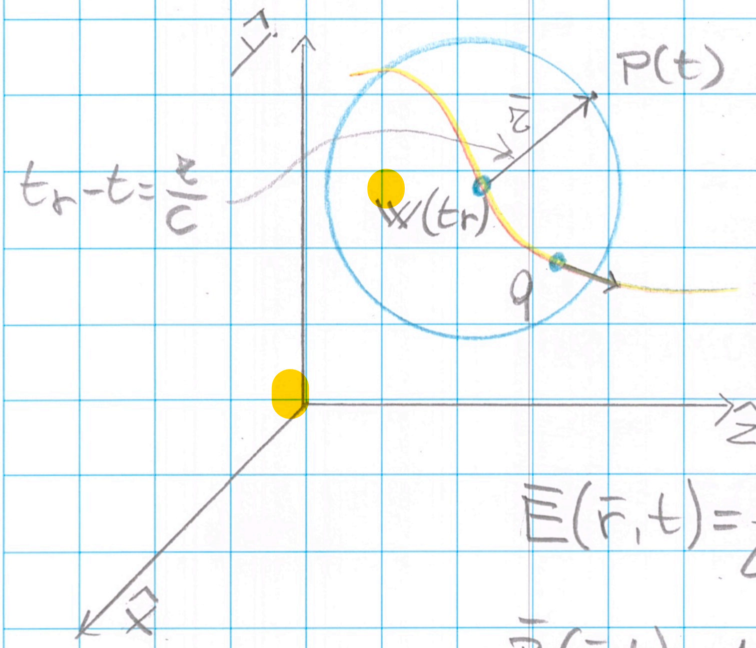
$$\bar{E}(r,\theta,t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{\bar{p}}(t_0)}{4\pi}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)(\hat{\theta})$$

$$\bar{B}(r,\theta,t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{\bar{p}}(t_0)}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)(\hat{\phi})$$

DA CUI $\bar{S} \simeq \frac{1}{\mu_0}(\bar{E}\times\bar{B}) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left[\ddot{p}(t_0)\right]^2\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{r}$

$\Rightarrow P \simeq \int \bar{S}\cdot d\bar{a} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}$. SI NOTI CHE $\bar{E}$ E $\bar{B}$ SONO MUTUAMENTE $\perp$ E TRASVERSALI ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE $\hat{r}$. MENTRE $E/B = c$.

LEZIONE #26 POTENZA IRRAGGIATA DA UN PTO CARICA



I CAMPI DI UNA CARICA IN MOTO GENERICO SONO DATI DA

$$\bar{E}(\bar{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{(\bar{\tau}\cdot\bar{u})^3}\Big[\underbrace{(c^2-v^2)\bar{u}}_{E_v}+\underbrace{\hat{\tau}\times(\bar{u}\times\bar{a})}_{E_a}\Big]$$

$$\bar{B}(\bar{r},t)=\frac{1}{c}\hat{\tau}\times\bar{E}(\bar{r},t) \Rightarrow$$

$\bar{S}=\frac{1}{\mu_0}(\bar{E}\times\bar{B})=\frac{1}{\mu_0 c}\left[\bar{E}\times(\hat{\tau}\times\bar{E})\right]$ DA CUI APPLICANDO LA REGOLA DEL TRIPLO PRODOTTO OTTENIAMO (BAC-CAB) $\bar{S}=\frac{1}{\mu_0 c}\left[E^2\hat{\tau}-(\hat{\tau}\cdot\bar{E})\bar{E}\right]$. DOBBIAMO TUTTAVIA NOTARE CHE NON TUTTO QUESTO FLUSSO DI ENERGIA DIVENTA FLUSSO DI ENERGIA IRRAGGIATA, MA SOLO LA COMPONENTE ACCELERTA DEI CAMPI GENERA RADIAZIONE $\Rightarrow$ $\bar{E}_{RAD}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{(\bar{\tau}\cdot\bar{u})^3}\left[\hat{\tau}\times(\bar{u}\times\bar{a})\right]$

$$\bar{E}_{RAD}\perp\hat{r} \Rightarrow (\hat{\tau}\cdot\bar{E})\bar{E}=0 \Rightarrow \bar{S}_{RAD}=\frac{1}{\mu_0 c}E^2_{RAD}\hat{r}$$

ORA SUPPONIAMO IL CASO CHE LA CARICA SIA FERMA A t_r $\Rightarrow$ $\bar{u}=c\hat{\tau}$ E APPLICANDO LA REGOLA DEL TRIPLO PRODOTTO VETTORIALE OTTENIAMO

$$\underline{\bar{E}_{RAD}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2\tau}\left[\hat{\tau}\times(\hat{\tau}\times\bar{a})\right]=\underline{\frac{\mu_0 q}{4\pi\tau}\left[(\hat{\tau}\cdot\bar{a})\hat{\tau}-\bar{a}\right]}$$

$$\vec{S}'_{RAD} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 q}{4\pi r}\right)^2 \left[a^2 - (\hat{r}\cdot\bar{a})^2\right]\hat{r}$$

$$\left(a^2 - a^2\cos^2\theta\right) = a^2\left(1-\cos^2\theta\right) = a^2\sin^2\theta$$

$$\vec{S}'_{RAD} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\hat{r} \Rightarrow P = \oint \bar{S}\cdot d\bar{a} \Rightarrow$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\theta}{r^2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \boxed{\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}}$$