$$\bar{S}'_{RAD} = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 q}{4\pi r}\right)^2 \left[\underbrace{a^2 - (\hat{r}\cdot\bar{a})^2}\right]\hat{r}$$

$$(a^2 - a^2\cos^2\vartheta) = a^2(1-\cos^2\vartheta) = a^2\sin^2\vartheta$$

$$\bar{S}'_{RAD} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\right)\hat{r} \Rightarrow P = \oint \bar{S}\cdot d\bar{a} \Rightarrow$$

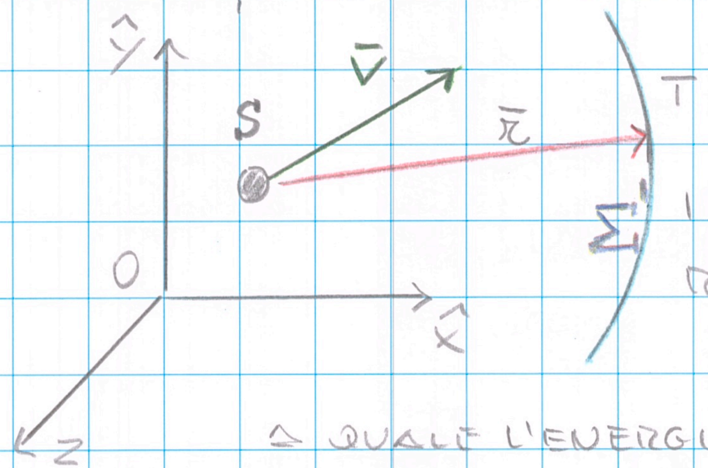
$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\int \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi = \boxed{\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}}$$ FORMULA DI LARMOR

VOGLIAMO ORA CALCOLARE UNA RELAZIONE PIÙ GENERALE DELLA FORMULA DI LARMOR DOVE PER LA SORGENTE ABBIAMO ASSUNTO $\bar{V}(t_r) = \emptyset$. PER $\bar{V}(t_r) \neq \emptyset$ $\bar{E}_{RAD}(\bar{r},t)$ E' PIÙ COMPLICATO CHE NEL CASO $\bar{V}(t_r) = \emptyset$. INOLTRE, PER $\bar{V}(t_r) \neq \emptyset$ $\bar{S}_{RAD} \Longrightarrow$ ENERGIA E.M. PER UNITÀ DI TEMPO CHE ATTRAVERSA UNA SFERA (IMMAGINARIA DI GRANDE RAGGIO E SUPERFICIE Σ') NON E' LA STESSA DI QUANDO LA RADIAZIONE HA LASCIATO LA PARTICELLA CARICA AL TEMPO RITARDATO.

QUESTO E' UN EFFETTO RICONDUCIBILE ALL'EFFETTO DOPPLER CHE OSSERVIAMO ANCHE IN MECCANICA DOVE UNA SORGENTE IN MOVIMENTO CHE GENERA UN EFFETTO MISURABILE CHE SI PROPAGA (SUONO, PARTICELLE ETC.) SARÀ MISURATO NELL'UNITÀ DI TEMPO CON UN NUMERO DI CONTEGGI DIFFERENTE DA QUELLO MISURATO ALLA SORGENTE.

IN PARTICOLARE SE INDICHIAMO CON N_S IL NUMERO DI CONTEGGI PER UNITÀ DI TEMPO (RATE) ALLA SORGENTE E N_T IL RATE MISURATO DALL'OSSERVATORE OTTENIAMO

$\nu_S = \left(1 - \frac{\hat{r}\cdot\bar{v}}{c}\right)\nu_T$ DOVE $\bar{v}$ È LA VELOCITÀ DELLA SORGENTE, RISPETTO A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE, C È LA VELOCITÀ DELLE PARTICELLE (O DELLA PERTURBAZIONE GENERATA DA S) E $\hat{r}$ È IL VERSORE DEL VETTORE $\bar{r}$. $\frac{dW}{dt}$ È IL RATE



A QUALE L'ENERGIA PASSA ATTRAVERSO LA SFERA DI SUPERFICIE Σ' E RAGGIO r ⇒ IL RATE AL QUALE L'ENERGIA HA LASCIATO LA SORGENTE È

$$\frac{dW}{dt_r} = \frac{dW}{dt}\frac{dt}{dt_r} = \frac{dW}{dt}\Big/\frac{\partial t_r}{\partial t} = \left(\frac{\bar{r}\cdot\bar{u}}{c}\right)\frac{dW}{dt} \Rightarrow$$

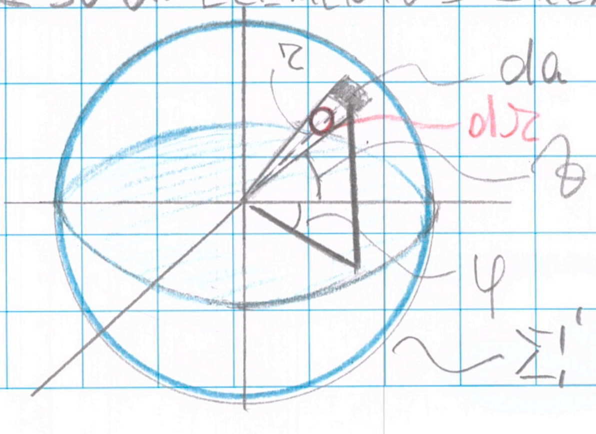
$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{c}{\hat{r}\cdot\bar{u}} = \frac{rc}{\bar{r}\cdot\bar{u}} \quad \text{CON } \bar{u} = c\hat{r} - \bar{v}(t_r) \Rightarrow$$

$$\frac{\hat{r}\cdot\bar{u}}{c} = \frac{\hat{r}\cdot(c\hat{r} - \bar{v}(t_r))}{c} = 1 - \hat{r}\cdot\bar{v}(t_r)/c = \underline{1 - \hat{r}\bar{\beta}(t_r)}$$

FATTORE DI RITARDO,

CON $\bar{\beta} = \bar{v}(t_r)/c \Rightarrow \frac{dW}{dt_r} = \left(\frac{\bar{r}\cdot\bar{u}}{c}\right)\frac{dW}{dt} =$

$= \left(1 - \hat{r}\cdot\bar{\beta}(t_r)\right)\frac{dW}{dt} = k\frac{dW}{dt}$. COSÌ LA POTENZA IRRAGGIATA SU UN ELEMENTO D'AREA $da = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2 d\Omega$ DI Σ', CON $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ ANGOLO SOLIDO CHE IDENTIFICA L'ELEMENTO D'AREA da ATTRAVERSATO DA UNA POTENZA E.M.



$dP_{RAD}(t_r) \Rightarrow P_{RAD}(t_r) = \int_{\Sigma_1'} \left(dP_{RAD}/d\Omega\right) d\Omega$. IL CALCOLO

$dP_{RAD}(t_r)$ LO SVOLGIAMO PARTENDO DA $\bar{E}_A(\bar{r},t) \Rightarrow$

$$\frac{dP_{RAD}(t_r)}{d\Omega} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{(\bar{r}\cdot\bar{u})^3}\left[\bar{r}\times(\bar{u}\times\bar{a})\right] \quad E \quad \bar{S}_{RAD}(\bar{r},t) \Rightarrow$$

$= \frac{1}{\mu_0 c} E^2_{RAD}$ CONSIDERANDO CHE $dP_{RAD}(t_r) = \left(\frac{\bar{r}\cdot\bar{u}}{c}\right)\bar{S}_{RAD}\, r^2 d\Omega$

OTTENIAMO $$\frac{dP_{RAD}(t_r)}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\frac{|\hat{r}\times(\bar{u}\times\bar{a})|^2}{(\hat{r}\cdot\bar{u})^5}$$

$P_{RAD}(t_r) \equiv P_{RAD}(t)$ SE NON CI SONO PERDITE SPURIE

DI ENERGIA $\Rightarrow P_{RAD}(t) = \int_{\Sigma_1'}\left(dP_{RAD}/d\Omega\right)d\Omega$

OTTENIAMO $$P_{RAD} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\gamma^6\left[a^2(t_r) - |\bar{\beta}(t_r)\times\bar{a}(t_r)|^2\right]$$

CON $$\gamma(t_r) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t_r)}}$$ = FATTORE DI LORENTZ.

REAZIONE DI RADIAZIONE.

QUESTO EFFETTO RIGUARDA LA RETROAZIONE CHE AGISCE SU UNA PARTICELLA CARICA CHE IRRAGGIA. INFATTI LA PERDITA DI ENERGIA (MOMENTO) DOVUTA ALL'IRRAGGIAMENTO DEVE ESSERE CONSIDERATA NEL BILANCIO DELLA ENERGIA COMPLESSIVA CHE SI CONSERVA. OVVERO L'ENERGIA PERSA PER IRRAGGIAMENTO VA A DECREMENTO DELLA ENERGIA CINETICA DELLA

PARTICELLA. QUESTO EFFETTO DI PERDITA DELLA E_k E' OVVIAMENTE PRESENTE SIA CHE LA FORZA IMPRESSA SULLA PARTICELLA E CHE QUINDI LA ACCELERA, SIA $\perp$ A $\bar{V}$ O SIA $//$ A $\bar{V}$. NEL PRIMO CASO LA FORZA NON FA LAVORO E $\bar{V}$ E' COST., i.e. E_k NON VARIA PER LA FORZA ESTERNA AGENTE SULLA PARTICELLA, MENTRE NEL SECONDO CASO E_k AUMENTA O DIMINUISCE A SECONDA SE $\bar{F}$ E' CONCORDE O SI OPPONE AL MOTO. QUI ESAMINEREMO IL SECONDO CASO, MENTRE PER IL PRIMO LO RIMANDIAMO AGLI APPROFONDIMENTI. LA QUESTIONE RELATIVA AL CASO DI $\bar{F} // \bar{V}$ NASCE DAL FATTO CHE LA STESSA FORZA APPLICATA A DUE PARTICELLE CHE VIAGGIANO ALLA STESSA VELOCITÀ E CON LA STESSA MASSA, MA DELLE QUALI UNA E' NEUTRA E UNA E' CARICA, PRODUCE UN AUMENTO DI E_K MAGGIORE PER LA PARTICELLA NEUTRA DATO CHE QUELLA CARICA RISULTA "FRENATA" DALLA PERDITA DI ENERGIA PER IRRAGGIAMENTO. QUESTO IMPLICA CHE LA RADIAZIONE ESERCITA UNA FORZA DI FRENAMENTO SULLA PARTICELLA CARICA CHE PRODUCE SIA UNA PERDITA DI MOMENTO SIA DI E_k. QUESTO E' CONSISTENTE CON IL FATTO CHE ALLA RADIAZIONE E.M. SIA CHE SI CONSIDERI COME UN'ONDA SIA CHE SI CONSIDERI QUANTIZZATA E' SEMPRE ASSOCIATA UNA DENSITÀ DI ENERGIA, UNA QUANTITÀ DI MOTO E UN MOMENTO ANGOLARE E QUIN-

L'EMISSIONE DI RADIAZIONE DEVE ESSERE CONSIDERATA NEL BILANCIO COMPLESSIVO DELLA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA E DEL MOMENTO. TUTTAVIA, L'IMPORTANZA FONDAMENTALE DI QUESTO EFFETTO DI FRENAMENTO (REAZIONE DI RADIAZIONE) RISULTA DAL FATTO CHE ESSO VIOLA ESPLICITAMENTE L'INVARIANZA SOTTO INVERSIONE TEMPORALE E QUINDI COSTITUISCE UNA INCONSISTENZA INTERNA RENDENDO COSÌ L'INTERA TEORIA ELETTRODINAMICA CLASSICA BASATA SUI POSTULATI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ SPECIALE, DELLE EQS. DI MAXWELL E DELLA FORZA DI LORENTZ UNA TEORIA INCONSISTENTE. IL CALCOLO DELLA FORZA DI REAZIONE DI RADIAZIONE $\bar{F}_{RR}$ NON È IMMEDIATO. INFATTI PER UNA PARTICELLA NON RELATIVISTICA ($v \ll c$) LA POTENZA TOTALE IRRADIATA È DATA DALLA FORMULA DI LARMOR $P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$ $\Rightarrow$ CHE LA PERDITA DI ENERGIA PER UNITÀ DI TEMPO $\bar{F}_{rr} \cdot \bar{v} = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$

TUTTAVIA, QUESTO CALCOLO È ERRATO. QUANDO UNA PARTICELLA CARICA ACCELERA (DECELERA) LE COMPONENTI $\bar{E}_v$ E $\bar{E}_A$ DEL CAMPO VARIANO ENTRAMBE SIMULTANEAMENTE E QUINDI L'ENERGIA AD ESSE ASSOCIATA. PARTENDO DA $\bar{E}_{TOT} = \bar{E}_v + \bar{E}_A$ $\Rightarrow$

$$u_{EM}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\bar{r}, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\underbrace{E_v^2} + \underbrace{2\bar{E}_v \cdot \bar{E}_A} + \underbrace{E_A^2} \right]$$

ENERGIA DEL E_v (FOTONI VIRTUALI)

ENERGIA DEL CAMPO MISTO $\bar{E}_v \cdot \bar{E}_A$ (FOTONI REALI E VIRTUALI)

ENERGIA DEL CAMPO E_A: (FOTONI REALI)

PER QUESTO IL TERMINE CORRETTO DOVREBBE ESSERE REAZIONE DI CAMPO. IN ULTIMA ANALISI SE UNA PARTICELLA CARICA ACCELERA O DECELERA SI VERIFICA UNA VARIAZIONE SIMULTANEA DEI CAMPI $\bar{E}_V$ E $\bar{E}_A$ E QUINDI DELLA DENSITÀ DI ENERGIA AD ESSI ASSOCIATA. IL PRODOTTO $\bar{F}_{RR} \cdot \bar{V}$ TIENE CONTO SOLO DELL'ENERGIA IRRAGGIATA (FOTONI REALI) E NON DELLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA INTERNA ASSOCIATA A $\bar{E}_V$ (FOTONI VIRTUALI). INFATTI VEDREMO CHE $\bar{F}_{RR}$ E' DETERMINATO DALLA $\dot{\bar{a}}$ (DERIVATA TEMPORALE) E PUO' ESSERE $\neq \emptyset$ ANCHE QUANDO $\bar{a}$ E' ISTANTANEAMENTE $\emptyset$. COSÌ MENTRE IL CALCOLO PRECEDENTE NON E' CORRETTO PER UN PROCESSO ISTANTANEO LO E' SE SI CONSIDERA UNA MEDIA SU UN INTERVALLO DI TEMPO $t_1 - t_2$ DOVE LO STATO FINALE DEL SISTEMA COINCIDE CON QUELLO INIZIALE (PER ESEMPIO UN MOTO PERIODICO)

$$\int_{t_1}^{t_2} (\bar{F}_{RR} \cdot \bar{V})\, dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2\, dt$$

IL SECONDO TERMINE DI QUESTA EGUAGLIANZA SI PUO' INTEGRARE PER PARTI

$$\int_{t_1}^{t_2} a^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right)\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right) dt = \cancel{\left(\bar{V} \cdot \frac{d\bar{V}}{dt}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2 V}{dt^2}\, \bar{V}\, dt$$

MA DATO CHE LO STATO INIZIALE DEL SISTEMA E' UGUALE A QUELLO FINALE $\Rightarrow \bar{V}(t_1) = \bar{V}(t_2)$ E $\bar{a}(t_1) = \bar{a}(t_2) \Rightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\bar{F}_{RR} \cdot \bar{V})\, dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\left(-\int_{t_1}^{t_2} \dot{\bar{a}} \cdot \bar{V}\, dt\right.$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left(\bar{F}_{RR} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\dot{\bar{a}}\right) \cdot \bar{V}\, dt = \emptyset \Rightarrow$$

$$\bar{F}_{RR} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\bar{a}}$$ QUESTA È LA FORMULA DI ABRAHAM-LORENTZ DELLA FORZA DI REAZIONE DI RADIAZIONE, TUTTAVIA, QUESTA RELAZIONE SI RIFERISCE A UNA F_{RR} MEDIATA TRA t_1 E t_2 DELLA COMPONENTE DELLA FORZA // A $\bar{v}$. NON ABBIAMO INFORMAZIONI CIRCA LA COMPONENTE $\perp$ PER LA QUALE È NECESSARIO CONDURRE UN'ANALISI AD-HOC (VEDI A. ZANGWILL CAP. 23 (870-915)) MA CI SONO ALTRI ASPETTI DI INCONSISTENZA. INFATTI, SUPPONIAMO CHE NON CI SIANO FORZE ESTERNE AGENTI SULLA PARTICELLA CARICA $\Rightarrow$

$$\bar{F}_{RR}(t_r') = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\bar{a}}(t_r') = \tau \dot{\bar{a}}(t_r') = m\bar{a}$$

CON $\tau \equiv \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}$. SOLUZIONE DELLA EQ. DIFF. INOMO.

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{m}{\tau}\bar{a}$$ È $\bar{a}(t_r) = a_0 e^{t/\tau}$ (PER UN e^- $\tau \cong 6 \times 10^{-24}$ s)

$\Rightarrow$ L'ACCELERAZIONE AUMENTA IN MODO SPONTANEO CON IL TEMPO. QUESTO PUÒ ESSERE EVITATO SOLO SE $a_0 = \emptyset$. TUTTAVIA, SE SUPPONIAMO $a_0 = 0$ QUANDO SI APPLICA UNA FORZA ESTERNA LA PARTICELLA RISPONDE PRIMA CHE LA FORZA AGISCA E QUESTO CI PORTA A VIOLARE IL PRINCIPIO CAUSA-EFFETTO. QUESTE DIFFICOLTÀ PERSISTONO ANCHE QUANDO SI TIENE CONTO DELLA RELATIVITÀ (FORMULA DI ABRHAM-LORENTZ RELATIVISTICA), MA PUNTANO AL FATTO CHE I "PUNTI CARICA" NON SONO COMPATIBILI CON LA FISCA E CHE EFFET-

COME LA REAZIONE DI RADIAZIONE NON POSSONO ESSERE TRATTATI NELL'AMBITO DI UNA TEORIA CLASSICA. COME ULTIMO PUNTO DI QUESTO ARGOMENTO TORNIAMO ALL'OSCILLATORE DI LORENTZ.

$$m\ddot{x}(t_r) = \bar{F}_{MOLLA}(t_r) + \bar{F}_{RAD}(t_r) + \bar{F}_{EST.}(t_r)$$

$$= -m\omega_0^2 x(t_r) + \underbrace{m\tau\dddot{x}(t_r)}_{\text{FORZA UGUALE ALLA } F_{RR}} + \bar{F}_{EST}(t_r)$$

FORZA UGUALE ALLA F_{RR} E DOVUTA ALLA PERDITA DI ENERGIA IRRADIATA.

$$x(t_r) = x_0 \cos(\omega t_r + \vartheta) \Rightarrow \dot{x}(t_r) = -\omega x_0 \sin(\omega t_r + \vartheta) \Rightarrow$$

$$\ddot{x}(t_r) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t_r + \vartheta) \Rightarrow \dddot{x}(t) = +\omega^3 x_0 \sin(\omega t_r + \vartheta)$$

$$= -\omega^2 [\underbrace{-\omega x_0 \sin(\omega t_r + \vartheta)}_{-\dot{x}(t_r)}]$$

$$\Rightarrow \dddot{x}(t_r) = -\omega^2 \dot{x}(t_r) \Rightarrow$$

$$m\ddot{x}(t_r) + m\underline{\tau\omega^2}\dot{x}(t_r) + m\omega_0^2 x(t_r) = \bar{F}_{EST}(t_r)$$

QUESTO RISULTATO SVELA CHE IL TERMINE γ DELLO OSCILLATORE DI LORENTZ HA ORIGINE DALLA FORZA DI REAZIONE DI RADIAZIONE E VALE

$$\gamma = \tau\omega^2$$