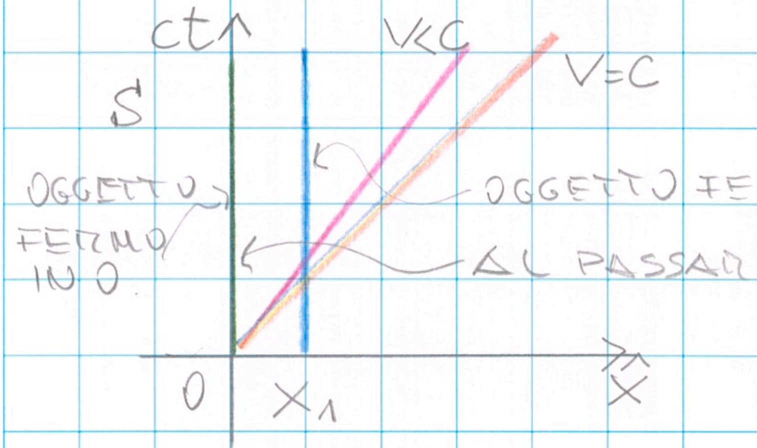
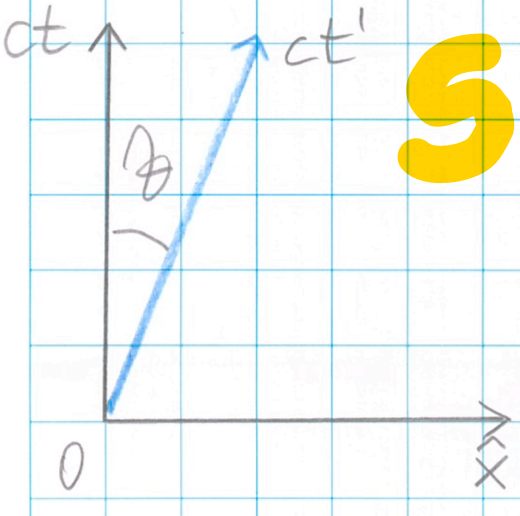
ORA COSTRUIAMO IL CRONOTOPO DI UN OSSERVATORE S' CON UN BOOST $\hat{x}$ PARI A $\bar{v}=\text{cost}$ $(v\hat{x})$ RISPETTO A UN CRONOTOPO S $\Rightarrow$ I SISTEMI SONO NELLA CONFIGURAZIONE STANDARD. SEMPLIFICHIAMO IL CASO CONSIDERANDO I SISTEMI A $t=t'=\emptyset$ CON GLI ASSI ct E ct' CHE COINCIDONO. FACCIAMO PRIMA LA SEGUENTE OSSERVAZIONE

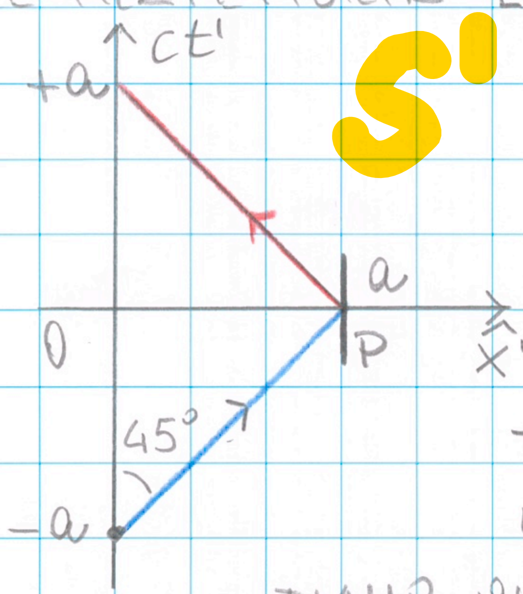


SE CONSIDERIAMO CHE A $t=t'=\emptyset$ O DI S E O' DI S' COINCIDONO ALLORA ALLORA LA COOR. TEMPORALE DI UN CORPO CHE A $t'=0$ SI TROVA IN O' AL PASSARE DEL TEMPO TRACCERA' L'ASSE ct' RISPETTO A S $\Rightarrow$ L'ANGOLO FORMATO DA ct' CON ct E' DATO DA $\left(\tan\theta\right)=\frac{v}{c}$.

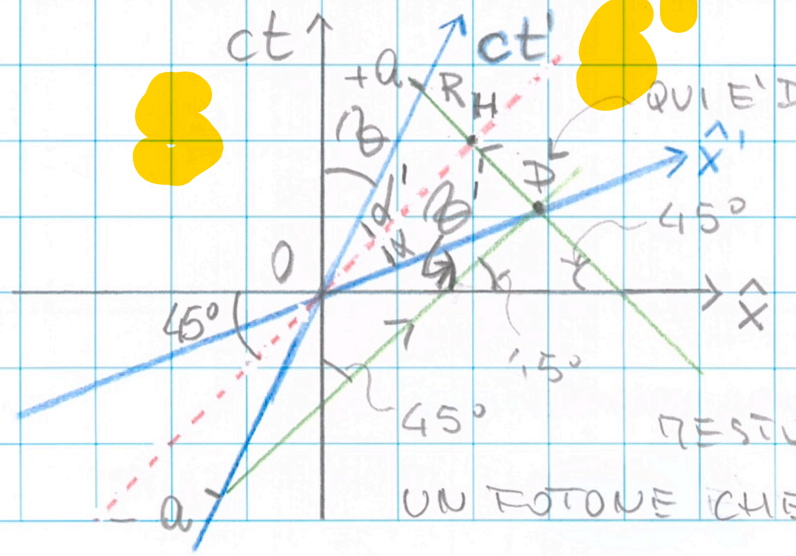


ORA DOBBIAMO TRACCIA X!
PER OTTENERE LO SCOPO POSSIAMO USARE SIA UN METODO GEOMETRICO SIA ALGEBRICO. IL METODO GEOMETRICO HA IL VANTAGGIO DI METTERE IN EVIDENZA I PUNTI SALIENTI

DELLE PROCEDURE DI SINCRONIZZAZIONE. QUESTE SI BASANO SUL PRIMO POSTULATO DELLA RELATIVITÀ $C = COST$ IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO INER. E NEL CRONOTOPO UN FOTONE TRACCIA SEMPRE UNA TRAIETTORIA INCLINATA DI $\pm 45°$ RISPETTO A ct E QUINDI ANCHE A ct'. PER CUI IN S' UN FOTONE CHE ORIGINA IN $(0', -a)$ HA LA SEGUENTE TRAIETTORIA E A $ct' = 0$ INTERCETTA $\hat{x}'$ IN



$x' = a$ $(a, 0)$. IN $x' = a$ METTIAMO UNO SPECCHIO $\perp$ $\hat{x}$. IL FOTONE SARÀ RILESSO PERCORRENDO UNA TRAIETTORIA $\perp$ ALLA PREDENTE (i.e. A $-45°$ RISPETTO A ct') E INTERCETTERÀ ct' NEL PUNTO $(0, +a)$. ORA RIPORTIAMO QUESTO IN S', RICORDANDO CHE I FOTONI SI MUOVONO SEMPRE A C SIA IN S CHE S' E QUINDI TRACCIANO TRAIETTORIE CHE SONO SEMPRE LA BISETTRICE DELL'ANGOLO TRA L'ASSE TEMPORALE E QUELLO SPAZIALE.

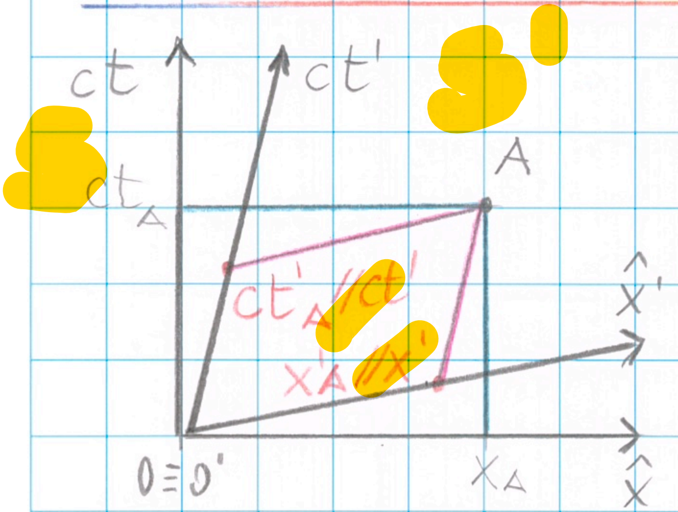


QUI È DOVE C'È LO SPECCHIO M $\Rightarrow ct' = 0, x' = a$. IL TRIANGOLO RPO È ISOSCELE DATO CHE $\overline{aO} = \overline{OP}$ (DEL RESTO LA TRAIETTORIA DI UN FOTONE CHE PASSA PER L'ORIGINE

DI UN S.d.R INERZIALE È SEMPRE BISETTRICE TRA L'ASSE ct E x) => CHE I DUE ANGOLI $a\hat{O}H$ (α') E $H\hat{O}P$ (α) SONO UGUALI => $\alpha=\alpha'$ => $\theta' = 45° - \alpha$ => $\theta' = \theta = 45° - \alpha$

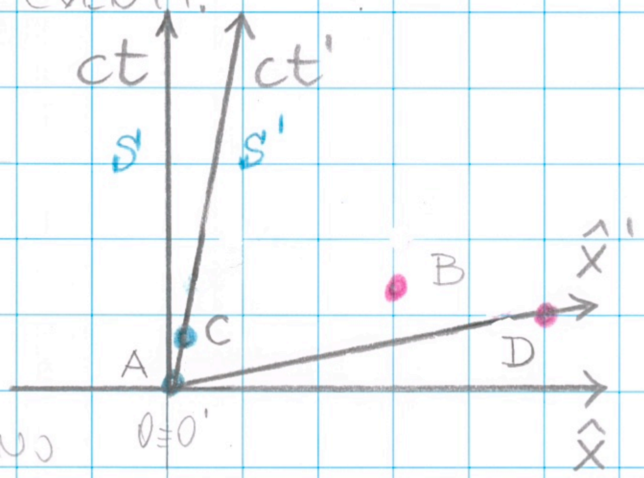
IN CONCLUSIONE ct' FORMA UN ANGOLO θ CON ct UGUALE ALL'ANGOLO FORMATO DA $\hat{x}'$ CON $\hat{x}$. ORA RICAVIAMO LE COORDINATE DI UN EVENTO IN S E S'.

CON EVENTO DEFINIAMO UN PUNTO DELLO SPAZIO-TEMPO CON COORDINATE (ct, x, y, z).



• **SIMULTANEITÀ E CAUSALITÀ**

CONSIDERIAMO ORA LA SEGUENTE SEQUENZA DI EVENTI.



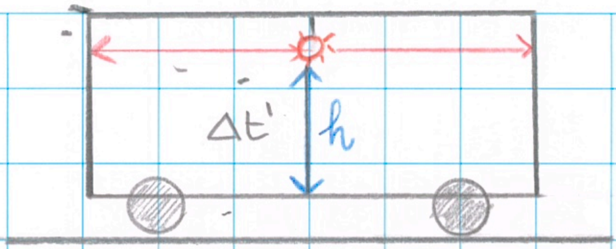
S VEDE LA SEQUENZA DEGLI EVENTI A C D B (SI PROIETTANO GLI EVENTI SULL'ASSE ct). MA S' VEDE GLI EVENTI A E D SIMULTANEI E QUINDI C E B SIMULTANEI => OSSERVATORI DIVERSI POSSONO VEDERE SEQUENZE DI EVENTI DIVERSE => QUESTO È PARTICOLARMENTE CRITICO QUANDO SI DEVE STABILIRE CAUSA (PRIMA) → EFFETTO (DOPO). PER S È CHIARO CHE A PUÒ ESSERE CAUSA DI C E C CAUSA DI D E D CAUSA DI B. PER S' ESSENDO A D E C B SIMULTANEI CAUSA E EFFETTO RESTANO INDETERMINATI.

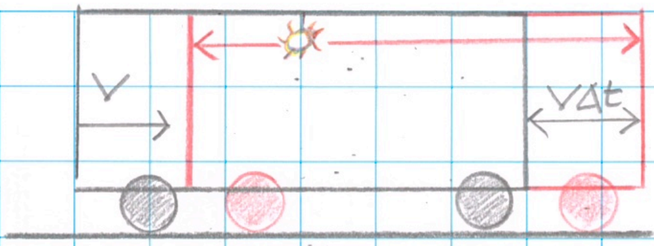
TUTTAVIA IN PRATICA STABILIRE LA SEQUENZA DEGLI EVENTI SIGNIFICA PRIMA SINCRONIZZARE GLI OROLOGI. QUESTO SI PUÒ FARE SOLO UTILIZZANDO SEGNALI LUMINOSI DATO CHE "C" È COSTANTE IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO. NATURALMENTE SE A SI VUOLE SINCRONIZZARE CON B È NECESSARIO CONOSCERE LA DISTANZA L TRA A E B. UN SEGNALE LUMINOSO CHE PARTE DA A A $t_A = 0$ (OROLOGIO A CON $t=0$) ARRIVA IN B A $t_B = L/C$. MA MISURARE LA DISTANZA TRA A E B SIGNIFICA MISURARE SIMULTANEAMENTE I SUOI ESTREMI. TUTTAVIA, LA SIMULTANEITÀ È UN CONCETTO RELATIVO $\Rightarrow$ ANCHE LE MISURE DI LUNGHEZZA DIPENDERANNO DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO. QUINDI ANCHE t, CHE MOLTIPLICATO PER UNA COSTANTE "C" UGUALE PER TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO, SI TRASFORMA NELLA COORDINATA SPAZIALE ct, DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO. TUTTE QUESTE OSSERVAZIONI SONO UNA CONSEGUENZA DEL PRIMO POSTULATO DELLA RELATIVITÀ: C = COST PER TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI.

- I "GEDANKEN EXPERIMENT" DI EINSTEIN

DILATAZIONE (CONTRAZIONE) DEI TEMPI - CONTRAZIONE (DILATAZIONE) DELLE LUNGHEZZE.

SUPPONIAMO IL SEGUENTE ESPERIMENTO "IDEALE" UN TRENO - UN SEGNALE LUMINOSO SUL TRENO E DUE OSSERVATORI S' E S'' UNO SOLIDALE AL SUOLO (S') E UNO SUL TRENO (S'').



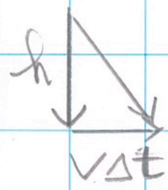


S.d.R S' (TRENO)

PER UN OSSERVATORE SUL TRENO $\Delta t' = h/c$ − TEMPO IMPIEGATO DALLA LUCE DALLA SORGENTE ALLA BASE DEL TRENO

S.d.R S (SUOLO)

QUESTO OSSERVATORE VEDE LA LUCE PERCORRERE UNO SPAZIO DATO DALLA COMPOSIZIONE DI $\bar{h}$ E $\bar{v}\Delta t$, DOVE Δt È IL TEMPO IMPIEGATO DALLA LUCE DA SORGENTE ALLA BASE DEL TRENO. ⇒



$$\Delta x \text{ (SPAZIO PERCORSO)} = \sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2} \Rightarrow$$

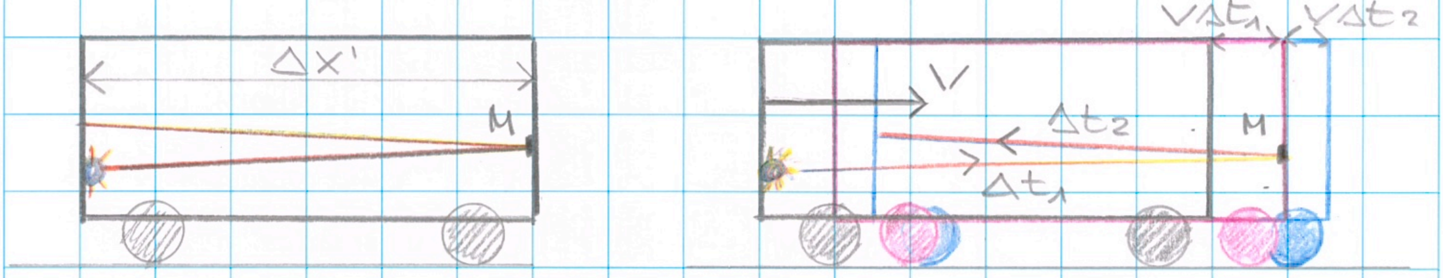
$$\Delta t = \left(h^2 + (v\Delta t)^2\right)^{1/2} / c \Rightarrow \Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}$$ MA

$$h/c = \Delta t' \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2} \cdot \Delta t}$$ DEFINENDO

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t}$$

NOTIAMO CHE QUESTO RISULTATO È DOVUTO AL FATTO CHE SIA S CHE S' HANNO CONSIDERATO $c = \text{COST.}$ LA RELAZIONE SCRITTA SOPRA SI TRADUCE IN UNA DILATAZIONE (CONTRAZIONE) DEI TEMPI A SECONDA SE S' SI CONFRONTA CON S O VICEVERSA $\Delta t = \gamma \Delta t'$. S E S' SONO ESATTAMENTE EQUIVALENTI E QUINDI LA MISURA DEL TEMPO È RELATIVA.

- DILATAZIONE (CONTRAZIONE) DELLE LUNGHEZZE



S.d.R S'' (TRENO) S.d.R S' (SUOLO)

PER S' $\Delta t' = 2\dfrac{\Delta x'}{c}$ LA LUCE FA DUE PERCORSI DI LUNGHEZZA DIVERSA.

PRIMA NELLA STESSA DIREZIONE DI $\bar{V}$ E POI NELLA DIREZIONE OPPOSTA $\Rightarrow$ S' MISURA DUE TEMPI Δt_1 E Δt_2 CON $\Delta t_1 = \dfrac{\Delta x + V\Delta t_1}{c}$ E $\Delta t_2 = \dfrac{\Delta x - V\Delta t_2}{c}$

$\Delta t_1 = \dfrac{\Delta x}{c-V}$; $\Delta t_2 = \dfrac{\Delta x}{c+V}$ $\Rightarrow$ $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow$

$\Delta t = 2\dfrac{\Delta x}{c}\left(1 - V^2/c^2\right)^{-1} = 2\dfrac{\Delta x}{c}\gamma^2$ MENTRE $\Delta t' = \dfrac{1}{\gamma}\Delta t$

$\cancel{2}\dfrac{\Delta x'}{\cancel{c}} = \dfrac{1}{\cancel{\gamma}}\,\cancel{2}\dfrac{\Delta x}{\cancel{c}}\gamma^{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{\Delta x' = \gamma\Delta x}$. QUESTA RELAZIONE RAPPRESENTA LA CONTRAZIONE (DILATAZIONE) DELLE LUNGHEZZE.

- ESEMPIO UN e^- CON $E_k = 50\ \text{MeV}$ $(5\times10^7 eV)$ E QUINDI $\beta = \dfrac{V}{c} \simeq 0.999949$ IN UN TUBO UHV (ULTRA ALTO VUOTO) CHE NEL S.d.R DEL LAB. MISURA 10. NEL S.d.R. DELL'e^- QUANTO È LUNGO IL TUBO?

$\Delta x' = \dfrac{1}{\gamma}\Delta x = \Delta x\sqrt{1-\beta^2} \cong 10\ \text{cm}.$

- DERIVAZIONE DELLE EQS. DI TRASFORMAZIONE DI LORENTZ.