DERIVEREMO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SOLO SULLA BASE DI IPOTESI SULLO SPAZIO FISICO E SUI POSTULATI DELLA RELATIVITÀ SPECIALE. IL PROBLEMA CHE CI PONIAMO QUINDI È DI OTTENERE DELLE EQS CHE CI PERMETTANO DI TRASFORMARE LE COORDINATE DI UN EVENTO NELLO SPAZIO FISICO LIBERO OSSERVATE IN UN S.d.R INERZIALE S IN QUELLE DI UN SISTEMA INERZIALE S' CON UN BOOST $\hat{x}$ RISPETTO A S E TALI CHE LE LEGGI DELLA FISICA SIANO INVARIANTI RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI. LE IPOTESI SONO CHE LO SPAZIO FISICO SIA OMOGENEO E UNIFORME E I PRINCIPI DELLA RELATIVITÀ SPECIALE APPLICATI. SI TRATTA QUINDI DI DUE S.d.R. NELLA CONFIGURAZIONE STANDARD $V = \text{COST} \parallel \hat{x} \Rightarrow$ I PIANI $y=0$ E $z=0$ SONO COINCIDENTI CON $y'=0$ E $z'=0$. DATA L'IPOTESI DI OMOGENEITÀ DELLO SPAZIO LE TRASFORMAZIONI CERCATE TRA I DUE SISTEMI DEVONO ESSERE LINEARI.

ESEMPIO SE LE TRASFORMAZIONI NON FOSSERO LINEARI ALLORA SAREBBE VIOLATA LA OMOGENEITÀ DELLO SPAZIO. SUPPONIAMO CHE LA TRASF. NON SIA LINEARE PER ESEMPIO $x' = a_{11} x^2 \Rightarrow$ $x'_2 - x'_1 = a_{11}(x_2^2 - x_1^2)$ SUPPONIAMO $x_2 = 2$ E $x_1 = 1$ $\Delta x = 1 \Rightarrow x'_2 - x'_1 = a_{11} 3$. ORA PRENDIAMO DUE PUNTI CON LA STESSA $\Delta x = 1$ COME $x_2 = 5$ E $x_1 = 4$ $\Rightarrow x'_2 - x'_1 = a_{11} 9 \Rightarrow$ LO SPAZIO NON È OMOGENEO $\Rightarrow$ IN UNO SPAZIO OMOGENEO UNA TRAIETTORIA

RETTILINEA UNIFORME IN S È RETTILINEA UNIFORME ANCHE IN S'. LA RICHIESTA CHE LO SPAZIO SIA UNIFORME $\Rightarrow$ LE TRASFORMAZIONI SONO LE STESSE IN TUTTE LE DIREZIONI. DATO CHE LO SPAZIO IN QUESTIONE È IL CRONOTOPO (ct, x, y, z) DOVREMO SCRIVERE 4 EQS CHE METTANO IN RELAZIONE (ct, x, y, z) IN S CON (ct', x', y', z') IN S' E TALI RELAZIONI DEVONO ESSERE LINEARI $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}\right\}$$

GLI a_{ij} SONO 16 COEFF. CHE IN GENERE DIPENDONO DALLA V_x RELATIVA TRA S E S' E POSSONO ESSERE ARRANGIATI IN MODO DI FORMARE UNA MATRICE 4X4. NELLA CONFIGURAZIONE STANDARD x E x' SONO COINCIDENTI CON LA DIREZIONE DEL MOTO $\Rightarrow$ x' DIPENDE SOLO DA x E DA t $\Rightarrow$ $a_{12} = a_{13} = \emptyset$ $\Rightarrow$ $x' = a_{11}x + a_{14}t$. PER LA COORDINATA y E z DATO CHE SIAMO IN CONFIGURAZIONE STANDARD $\Rightarrow$ I PIANI $y = \emptyset$ E $z = \emptyset$ COINCIDONO CON I PIANI $y' = \emptyset$ E $z' = \emptyset$, RISPETTIVAMENTE $\Rightarrow$ $a_{21} = a_{23} = a_{24} = \emptyset$ E $a_{31} = a_{32} = a_{34} = \emptyset$ $\Rightarrow$ $y' = y$ E $z' = z$. INOLTRE, PER L'ISOTROPIA DELLO SPAZIO POSTI DUE OROLOGI NEL PIANO (y, z) A COORDINATE $(0, y, 0)$ E $(0, -y, 0)$ E $(0, 0, z)$ E $(0, 0, -z)$ QUESTI DEVONO MISURARE GLI STESSI TEMPI PER GLI OSSERVATORI IN S E S' $\Rightarrow$ $a_{42} = a_{43} = 0$ $\Rightarrow$ DALLA MATRICE DI

PARTENZA OTTENIAMO $\neq 0$ I TERMINI DIAGONALI E I TERMINI IN x E t $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{14}t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases}$$

NELLA PRIMA EQ PER $x' = 0$ E CONSIDERANDO CHE S' SI MUOVE CON UN BUST-X A $V \Rightarrow x = vt$

$$x' = a_{11}vt + a_{14}t = 0 \Rightarrow -a_{11}v = a_{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = a_{11}x - a_{11}vt \Rightarrow x' = a_{11}(x - vt) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ DOBBIAMO TROVARE DELLE RELAZIONI UTILI PER CALCOLARE a_{11}, a_{41} E a_{44}.

PER QUESTO RICORRIAMO AL POSTULATO CHE C=COST. È LA STESSA IN S E S'. SUPPONIAMO ORA CHE UN'ONDA LUMINOSA SFERICA SI PROPAGHI DALLA ORIGINE O DI S' QUANDO QUESTA COINCIDE CON L'ORIGINE DI O' DI S'. ESSA SI PROPAGHE' A C=COST IN TUTTE LE DIREZIONI SIA IN S' CHE IN S' $\Rightarrow$ LE SUPER. EQUIFASE E EQUIAMPIEZA (FRONTE D'ONDA) SONO UNA SFERA SIA IN S' CHE IN S' $\Rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \underbrace{c^2t^2}_{\text{RAGGIO DELLA SFERA A } t \text{ IN } S'} \quad ; \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \underbrace{c^2t'^2}_{\text{RAGGIO DELLA SFERA A } t' \text{ IN } S'}$$

ORA SOSTITUIAMO LE COORDINATE x', y', z' E t' CON LE EQS DELLE TRASFORMAZIONI CHE ABBIAMO RICAVATO IN PRECEDENZA E OTTENIAMO

$a_{11}^2(x-vt)^2+y^2+z^2=c^2(a_{41}x+a_{44}t)^2$ DA CUI

$(a_{11}^2-c^2a_{41}^2)x^2+y^2+z^2-2(va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44})xt=$
$=(c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2)t^2$. PER AVERE UNA SFERA IN S'

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2-c^2a_{41}^2=1 \\ va_{11}^2+c^2a_{41}a_{44}=0 \\ c^2a_{44}^2-v^2a_{11}^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow$$

TRE EQS CON TRE INCOGNITE a_{11}, a_{41} E a_{44}

OTTENIAMO LE SEGUENTI SOLUZIONI

$$\boxed{a_{11}=a_{44}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-v^2/c^2}}\;;\quad a_{41}=-\frac{v}{c^2}\,\frac{1}{\pm\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

QUESTA PROCEDURA BASATA SU ARGOMENTI FISICI PORTA AGLI STESSI RISULTATI DI UNA PROCEDURA COMPLETAMENTE ALGEBRICA. PER QUESTO PARTIAMO DALLE RELAZIONI $x'=a_{11}x+a_{14}t$ E $t'=a_{44}t+a_{41}x$. A $t'=t=0$ LE ORIGINI DI S' E S'' COINCIDONO. DOPO UN TEMPO t $x'=0$ SI E' SPOSTATO RISPETTO A S'$(x=0)$ DI UNA DISTANZA $x=vt \Rightarrow x'=a_{11}vt+a_{14}t=0 \Rightarrow$

$a_{14}=-a_{11}v \Rightarrow \frac{x'}{t}=\frac{a_{11}x-a_{11}vt}{a_{44}t+a_{14}x}$. DOPO UN TEMPO

t' S'$(x=0)$ SARÀ RISPETTO A S'' A $x'=-vt \Rightarrow$

$\frac{x'}{t'}=-\frac{vt'}{t'}=\frac{-a_{11}vt}{a_{44}t} \Rightarrow v=\frac{a_{11}}{a_{44}}v \Rightarrow$

$a_{11}=a_{44} \Rightarrow \frac{x'}{t'}=\frac{a_{11}(x/t)-va_{11}}{a_{11}+a_{41}(x/t)}$ CON $c=$ COST IN S' E S''

$\Rightarrow x/t = c = x'/t' \Rightarrow \dfrac{x'}{t'} = c = \dfrac{a_{11}c - a_{11}v}{a_{11} + a_{41}c} \Rightarrow$

$c\,a_{11} + c^2 a_{41} = a_{11}c - v\,a_{11}$ MA $a_{11} = a_{44} \Rightarrow a_{41} = \dfrac{-v a_{11}}{c^2} = \dfrac{-v a_{44}}{c^2}$

$\Rightarrow t' = a_{44}\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right)$. RICORDANDO CHE $a_{11} = a_{44}$ E

$a_{14} = -a_{11}v = -a_{44}v \Rightarrow x' = a_{44}(x - vt)$. RISCRIVENDO x' E t' IN TERMINI DI x E t (SIGNIFICA PASSARE DA $S' \to S$ (S SI MUOVE CON $-v$ RISPETTO A S')

$t = a_{44}(t' + vx'/c^2)$; $x = a_{44}(x' + vt')$. SE ORA SOSTITUIAMO t E x IN $x' = a_{44}(x - vt) = a_{44}\left[a_{44}(x' + vt') + \right.$
$\left. -v a_{44}(t' + vx'/c^2)\right] = a_{44}(a_{44}x' + a_{44}vt' - v a_{44}t' + v^2 a_{44} x'/c^2)$

$\Rightarrow x' = (a_{44}^2 x' - v^2 a_{44}^2 x'/c^2) \Rightarrow 1 = (a_{44})^2(1 - v^2/c^2) \Rightarrow$

$a_{44} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. QUINDI DALLE OTTENIAMO

$$\boxed{a_{11} = a_{44} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ ; \quad a_{41} = -\frac{v}{c^2}\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

CHE SONO LE RELAZIONI OTTENUTE IN PRECEDENZA, DOVE SI ASSUME IL SEGNO + SE SI VOGLIONO TRASFORMAZIONI IDENTICHE NEL LIMITE $v \to 0$

• PROBLEMA ALLA LUCE DI QUESTA ULTIMA DIMOSTRAZIONE E' CHIARO CHE L'IPOTESI CHE UN'ONDA E.M. SFERICA GENERATA A $t = t' = 0$ IN $O(t=0) = O'(t'=0)$ CON S E S' IN CONFIGURAZIONE STANDARD E' CORRETTA. SI CHIEDE DI ARGOMENTARE PERCHE'!

ORA SIAMO IN GRADO DI SCRIVERE LE TRASFORMAZIONI CERCATE

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{CON } \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma \quad \beta \equiv v/c \quad \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases}$$

CON LA TRASFORMAZIONE DEI TEMPI CHE PUO' ESSERE RISCRITTA COME

$ct' = \gamma(ct - \beta x)$. QUESTE SONO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

- OSSERVAZIONI

1 - LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SONO UNA CONSEGUENZA DEL FATTO CHE LO SPAZIO FISICO LIBERO E' ISOTROPO E OMOGENEO E CHE C = COST E' UGUALE IN TUTTI I S.d.R. INERZIALI.

2 PER $v \ll c$ $\gamma \to 1 \Rightarrow x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z$

$vx/c^2 \to 0 \Rightarrow t' = t$ CHE SONO LE TRASF. DI GALILEO-NEWTON $\Rightarrow$ LA MECCANICA NEWTONIANA E' UN'APPROSSIMAZIONE DELLA MECCANICA RELATIVISTICA NELLA APPROSIMAZIONE $v \ll c$

3 SE ASSUMIAMO CHE IN UNO SPAZIO FISICO ISOTROPO E OMOGENEO E LIBERO ε_0, μ_0, i.e. $C = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, SONO LE STESSE IN TUTTI I PUNTI E PER TUTTI I TEMPI, ALLORA NE CONSEGUE CHE "C" E' ASSOLUTA PER OGNI OSSERVATORE INERZIALE E COME CONSEGUENZA LE TRAS.

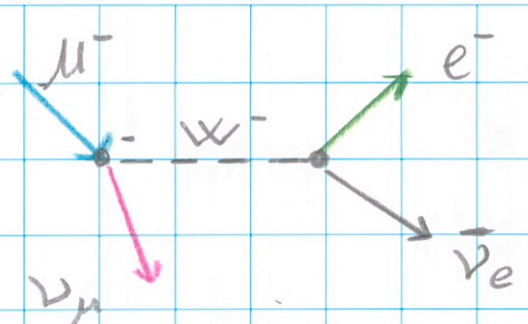
DELLE COOR. TRA DUE OSSERVATORI S' E S'' IN CONFIGURAZIONE STANDARD SONO DATE DALLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

(4) LE PROPRIETÀ DELLO SPAZIO FISICO GOVERNANO LE SIMMETRIE DELLE LEGGI FISICHE. IN ALTRE PAROLE UNA OPERAZIONE DI SIMMETRIA APPLICATA A UN SISTEMA LASCIA IL SISTEMA INVARIATO. NEL CASO CHE ABBIAMO ESAMINATO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ APPLICATE ALLE COORDINATE DI UN SISTEMA FISICO IN S' LE TRASFORMANO NELLE COORDINATE DELLO STESSO SISTEMA IN S'', CHE SI TROVA IN CONFIGURAZIONE STANDARD RISPETTO A S', MA LASCIANDO INVARIATE LE LEGGI DELLA FISICA. QUESTA OSSERVAZIONE FA DA PROLOGO AL TEOREMA DI EMMY NOETHER

(5) QUESTI RISULTATI BEN GIUSTIFICANO LA FRASE ATTRIBUITA A PLATONE CHE LA LEGGENDA VUOLE FOSSE SCRITTA ALLA ENTRATA DELLA SCUOLA DI ATENE: "QUI NESSUNO ENTRI SE NON SA DI GEOMETRIA".

- PROBLEMA IL MUONE E' UNA PARTICELLA INSTABILE ($\mu^{\pm}$) CON UN TEMPO DI VITA MEDIA $\tau'_{\mu} = 2.2\mu s$ MISURATO NEL SUO S.d.R. (S''). ESSO DECADE SECONDO IL SEGUENTE SCHEMA

$$\left.\begin{array}{l}\mu^{+} \rightarrow e^{+} \nu_{e} \bar{\nu}_{\mu} \\ \mu^{-} \rightarrow e^{-} \bar{\nu}_{e} \nu_{\mu}\end{array}\right\}$$ VIA INTERAZIONI DEBOLI (MEDIATE DA BOSONI $W^{\pm}$)



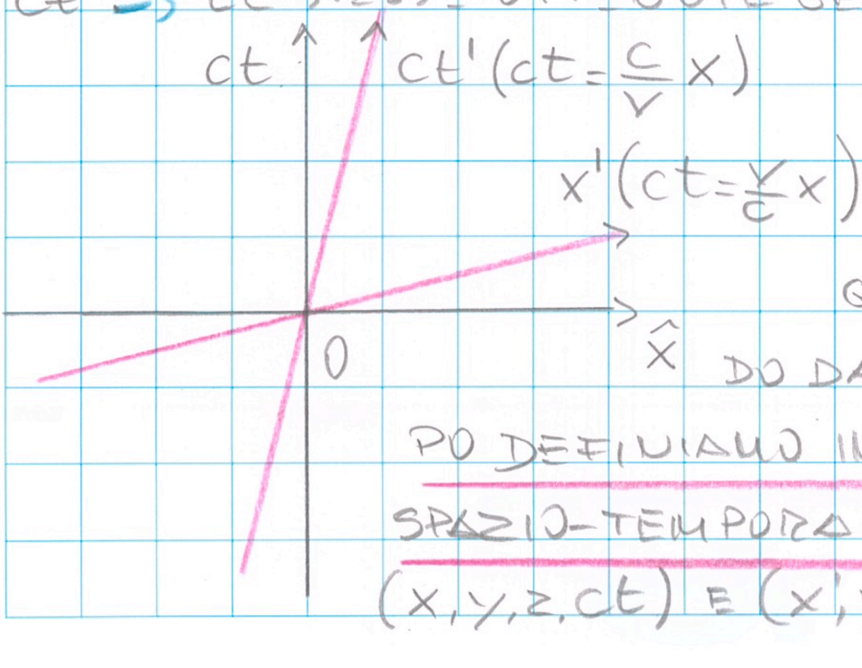
SE IL MUONE VIAGGIA A 3/5 C, QUALE $\tilde{\tau}$ SI MISURA NEL S.d.R. DEL LABORATORIO (S')?

$\Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \tilde{\tau}_\mu = \gamma_\mu \tilde{\tau}'_\mu$ CON

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\mu^2}}$$

CON $\beta_\mu = \frac{V}{C} = \frac{3}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4} \Rightarrow \tilde{\tau}_\mu \simeq 2{,}75\,\mu s.$

RELATIVITÀ DELLA SIMULTANEITÀ NELLE LEZIONI PRECEDENTI ABBIAMO COSTRUITO UN S.d.R INERZIALE S'' RISPETTO A S' UTILIZZANDO LA GEOMETRIA DEL CRONOTOPO. ALLE STESSE CONCLUSIONI POSSIAMO ARRIVARE USANDO L'ALGEBRA DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.
PARTIAMO DA $t' = \gamma\,(t - Vx/c^2)$. MOLTIPLICANDO x C SI OTTIENE $ct' = \gamma c\,(t - Vx/c^2)$. L'EQ PER x' E' DATA DALLA RETTA $ct' = 0 \Rightarrow 0 = c\gamma\,(t - Vx/c^2) \Rightarrow ct = \frac{V}{C}x$ CHE E' L'EQ. PER x'. IN MODO SIMILE DA $x' = \gamma(x - vt)$ PER $x' = 0$ LA RETTA ct' E' DATA DA $0 = \gamma(x - vt) \Rightarrow t = \frac{x}{V}$ CHE x C DÀ $ct = \frac{cx}{V} = \frac{c}{V}x$ CHE E' L'EQ. PER ct' $\Rightarrow$ LE STESSE OTTENUTE GEOMETRICAMENTE



ORA POSSIAMO VEDERE COME SI TRASFORMANO GLI INTERVALLI PASSANDO DA $S \to S'$. NEL CRONOTOPO DEFINIAMO INTERVALLO LA DISTANZA SPAZIO-TEMPORALE TRA DUE EVENTI. (x, y, z, ct) E (x', y', z', ct').

IN $\mathbb{R}^3$ E' L'EQUIVALENTE DELLA DISTANZA TRA DUE PTI.

CONSIDERIAMO L'EVENTO (1) E L'EVENTO (2): (1) SI TRASFORMA COME $t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v x_1}{c}\right)$; $x_1' = \gamma(x_1 - v t_1)$; $y_1' = y_1$; $z_1' = z_1$. (2) SI TRASFORMA COME

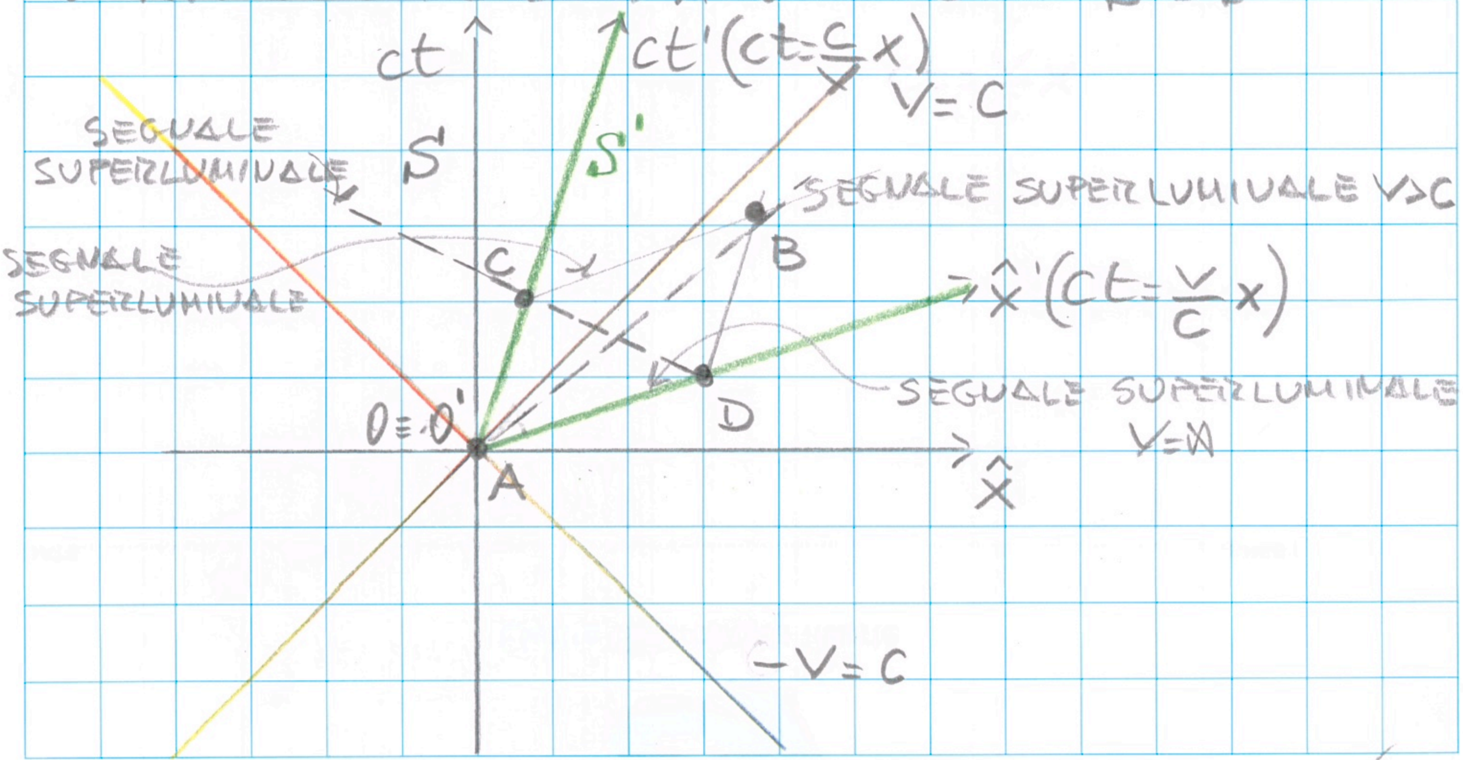
$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v x_2}{c}\right)$; $x_2' = \gamma(x_2 - v t_2)$; $y_2' = y_2$; $z_2' = z_2$ $\Rightarrow$

$\Delta t' = t_2' - t_1'$ E $\Delta x' = x_2' - x_1'$ $\Rightarrow$

$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$; $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$; $\Delta y' = \Delta y$; $\Delta z' = \Delta z$. IN MODO SIMILE LE TRASFORMAZIONI INVERSE RISULTANO

$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$; $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$; $\Delta y = \Delta y'$; $\Delta z = \Delta z'$.

- FORMULAZIONE ALGEBRICA DELLA RELATIVITÀ DELLA SIMULTANEITÀ. ORA POSSIAMO FORMULARE ALGEBRICAMENTE LA RELATIVITÀ DELLA SIMULTANEITÀ IN S' E S'. A QUESTO SCOPO RICHIAMIAMO LA QUESTIONE RELATIVA AGLI EVENTI SIMULTANEI IN S E S'



COME AVEVAMO VISTO GLI EVENTI IN S' HANNO LA SEQUENZA A-D-C-B. IN S' A E' SIMULTANEO A D ($ct'=0$) E C E' SIMULTANEO A B ($ct'\neq 0$). QUESTA OSSERVAZIONE VIOLA IL PRINCIPIO DI CAUSALITA'. IN S' "A" POTREBBE ESSERE LA CAUSA DI "D". "D" QUELLA DI "C" E "C" QUELLA DI "B", DATO CHE $t_A < t_D < t_C < t_B$. S' NON SAREBBE D'ACCORDO CON QUESTA SEQUENZA. QUINDI IL PRINCIPIO DI CAUSALITÀ E' VIOLATO QUANDO S E S' SI CONFRONTANO. TUTTAVIA, SE C OLTRE CHE ESSERE COSTANTE IN TUTTI I S.d.R INERZIALI FOSSE ANCHE LA MASSIMA VELOCITA' A CUI SI PROPAGA IL SEGNALE E.M. $\Rightarrow$ ANCHE SE S E S' SONO IN DISACCORDO SULLA SEQUENZA DEGLI EVENTI ESSI POSSONO ESSERE D'ACCORDO SULLA SEQUENZA DI EVENTI COLLEGATI DA UN SEGNALE CHE VIAGGIA A $V \leq C$. DI FATTO GLI EVENTI "B" E "D" POSSONO ESSERE CONNESSI A "A" E "C" SOLO DA SEGNALI SUPERLUMINALI (VEDI FIGURA) E QUINDI LA LORO SEQUENZA NON VIOLEREBBE IL PRINCIPIO DI CAUSALITÀ CON $V > C$. TUTTAVIA, QUESTO VIOLEREBBE L'OMOGENEITÀ DELLO SPAZIO FISICO PERCHE' AVREMMO DEI PUNTI DATI DALLE TRAIETTORIE DEI SEGNALI SUPERLUMINALI DOVE $\varepsilon_{0SL} \neq \varepsilon_0$ E $\mu_{0SL} \neq \mu_0$! QUESTA OSSERVAZIONE CI INTRODUCE AL CONO DI LUCE ENTRO IL QUALE I SEGNALI POSSONO ESSERE CORRELATI.