LEZIONE #28 ABBIAMO VISTO CHE LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ NEL LIMITE DI $v \ll c$ DIVENTANO QUELLE DI GALILEO-NEWTON, MA ORA VOGLIAMO DIMOSTRA CHE LE EQS. DI MAXWELL SONO INVARIANTI RISPETTO ALLE ALLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ. IN ALTRI TERMINI SONO RELATIVISTICAMENTE INVARIANTI. PER DIMOSTRARE QUESTO E' SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE L'OPERATORE $\Box^2$ E' RELATIVISTICAMENTE INVARIANTE. IN ALTRI TERMINI L'EQ. DELLE ONDE E.M. E' LA STESSA QUANDO CONSIDERIAMO S E S' NELLA CONFIGURAZIONE STANDARD. COME AL SOLITO PARTIAMO DALLA CONDIZIONE INIZIALE DOVE $O=O'$ A $t=t'=0$. NELLA CONF. STANDARD GLI OPERATORI $\partial_y=\partial_{y'}$ E $\partial_z=\partial_{z'}$ SONO ASSUNTI INVARIANTI $\Rightarrow \partial^2_y=\partial^2_{y'}$ E $\partial^2_z=\partial^2_{z'}$, QUINDI IL NOSTRO PROBLEMA SI RIDUCE A TROVARE COME SI TRASFORMANO ∂^2_x E $\partial^2_t \Rightarrow$ L'INVARIANZA DI $\Box^2$ E' ESPRESSA DA $\partial^2_x - \frac{1}{c^2}\partial^2_t = \partial^2_{x'} - \frac{1}{c^2}\partial^2_{t'}$

(QUESTO RISULTA DAL POSTULATO c=COST.)

SE DALLA IPOTESI CHE IL $\Box^2$ E' INVARIANTE DERIVO LE TRAS. DI LORENTZ $\Rightarrow \Box^2$ E' LORENTZ INVARIANTE. FATTORIZZO

$$\left(\partial_x - \frac{1}{c}\partial_t\right)\cdot\left(\partial_x + \frac{1}{c}\partial_t\right) = \left(\partial_{x'} - \frac{1}{c}\partial_{t'}\right)\cdot\left(\partial_{x'} + \frac{1}{c}\partial_{t'}\right)$$

ASSUMENDO CHE TUTTI GLI OPERATORI SONO LINEARI POSSIAMO SCRIVERE $\left(\partial_x - \frac{1}{c}\partial_t\right) = A\left(\partial_{x'} - \frac{1}{c}\partial_{t'}\right)$ E $\left(\partial_x + \frac{1}{c}\partial_t\right) = A^{-1}\left(\partial_{x'} + \frac{1}{c}\partial_{t'}\right)$ DOVE IL FATTORE A

E' INDIPENDENTE DAGLI OPERATORI DERIVATA MA PUO' DIPENDERE SOLO DA $\bar{v}$. PER DETERMINAR A CHIEDIAMO CHE LE TRASFORMAZIONI LINEARI ATTESE TRA LE DERIVATE TEMPORALI DELLE COORDINATE DI S E S' SIANO PROPRIAMENTE RIDOTTE ALLE CORRISPONDENTI TRASFORMAZIONI GALILEANE $\partial_t = \partial_{t'} - v\partial_{x'}$. QUESTA RICHIESTA E' CONSISTENTE CON UNA TRASFORMAZIONE LINEARE DEL TIPO $\partial_t = F(\bar{v})\partial_{t'} - v\partial_{x'}$ DOVE $F(\bar{v})$ DIPENDE DALLA VELOCITÀ v COSÌ CHE $F(v) \to 1$ QUANDO $v \ll c$.

DA QUESTA TRASFORMAZIONE GENERALE NE CONSEGUE CHE SE $\partial_t = 0$ ALLORA $\partial_{t'} = v\partial_{x'}$ PERCHÈ $F(\bar{v}) \neq 0$. USANDO QUESTI RISULTATI NELLE RELAZIONI

$$\left(\partial_x - \frac{1}{c}\partial_t\right) = A\left(\partial_{x'} - \frac{1}{c}\partial_{t'}\right) \text{ E } \left(\partial_x + \frac{1}{c}\partial_t\right) = A^{-1}\left(\partial_{x'} + \frac{1}{c}\partial_{t'}\right)$$

OTTENIAMO: $\partial_x = A\left(\partial_{x'} - \frac{v}{c}\partial_{x'}\right)$ E $\partial_x = A^{-1}\left(\partial_{x'} + \frac{v}{c}\partial_{x'}\right)$

COMBINANDO QUESTE EQS. OTTENIAMO L'ESPRESSIONE

$$A = \frac{(1+v/c)^{1/2}}{(1-v/c)^{-1/2}} = \gamma(1+v/c) \text{ E } A^{-1} = \gamma(1-v/c)$$

USANDO QUESTE EQS. NELLE OTTENIAMO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONE

$$\begin{cases} \left(\partial_x - \frac{1}{c}\partial_t\right) = \gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(\partial_{x'} - \frac{1}{c}\partial_{t'}\right) \\ \left(\partial_x + \frac{1}{c}\partial_t\right) = \gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(\partial_{x'} + \frac{1}{c}\partial_{t'}\right) \end{cases}$$

DA CUI SOMMANDO E SOTTRAENDO QUESTE EQS. OTTENIAMO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONE TRA LE DERIVATE DELLE COORDINATE IN S E S'

$\partial_x = \gamma\left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\partial_{t'}\right)$; $\partial_t = \gamma\left(\partial_{t'} - v\partial_{t'}\right)$ CHE CON

$\partial_y = \partial_{y'}$ E $\partial_z = \partial_{z'}$ COMPLETANO LE TRASFORMAZIONI. QUESTE SONO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ PER GLI OPERATORI ∂ (DERIVATE PARZIALI) DELLA CONFIGURAZIONE STANDARD. DA QUESTE EQUAZIONI RICAVIAMO LE RELAZIONI DIRETTE $\underbrace{\partial_x x' = \gamma}_{1}$; $\underbrace{\partial_t x' = -\gamma v}_{2}$; $\underbrace{\partial_t t' = \gamma}_{3}$; $\underbrace{\partial_x t' = -\frac{\gamma v}{c^2}}_{4}$

LA PRIMA DI QUESTE RELAZIONI IMPLICA

(1) $x' = \gamma x + f_1(t)$ DOVE $f_1(t)$, A MENO DI UNA COSTANTE SI OTTIENE DIFFERENZIANDO (1) RISPETTO A t E QUINDI USANDO LA RELAZIONE (2): $\partial_t x' = \frac{df_1(t)}{dt} = -\gamma v$ $\Rightarrow f_1(t) = -\gamma v t + x_0$ CON $x_0 = \text{COST}$. DA (1) E (2) OTTENIAMO $x' = \gamma(x - vt) + x_0$. LA (3) $\Rightarrow t' = \gamma t + f_2(x)$ DOVE $f_2(x)$ PUO' ESSERE OTTENUTA, A MENO DI UNA COST., DIFFERENZIANDO LA (3) RISPETTO A x E USANDO LA (4): $f_2(x) = -\gamma v x / c^2 + t_0$ CON $t_0 = \text{COST}.$, DALLA (3) E DALLA (4) OTTENIAMO $t' = \gamma(t - vx/c^2) + t_0$. CON $O \equiv O'$ PER S E S' A $t = 0$ $\Rightarrow t = t' = \emptyset \Rightarrow x_0 = 0$ E $t_0 = 0$ $\Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$ E $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ CON $y' = y$ E $z' = z$.

• OSSERVAZIONE. L'EQ. DELLE ONDE E' TRA LE PIU' IMPORTANTI DELLA FISICA $\Rightarrow$ LE SIMMETRIE ASSOCIATE A QUESTA EQ. SONO UGUALMENTE IMPORTANTI. TRA QUESTE FORSE LA PIU' IMPORTANTE E' QUELLA DI LORENTZ. DIMOSTRARE CHE $\square^2$ E' INVARIANTE DI FORMA SOTTO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ E' UN PASSAGGIO FONDAMENTALE. QUESTO EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE SE $\square^2$ E' INVARIANTE DI FORMA

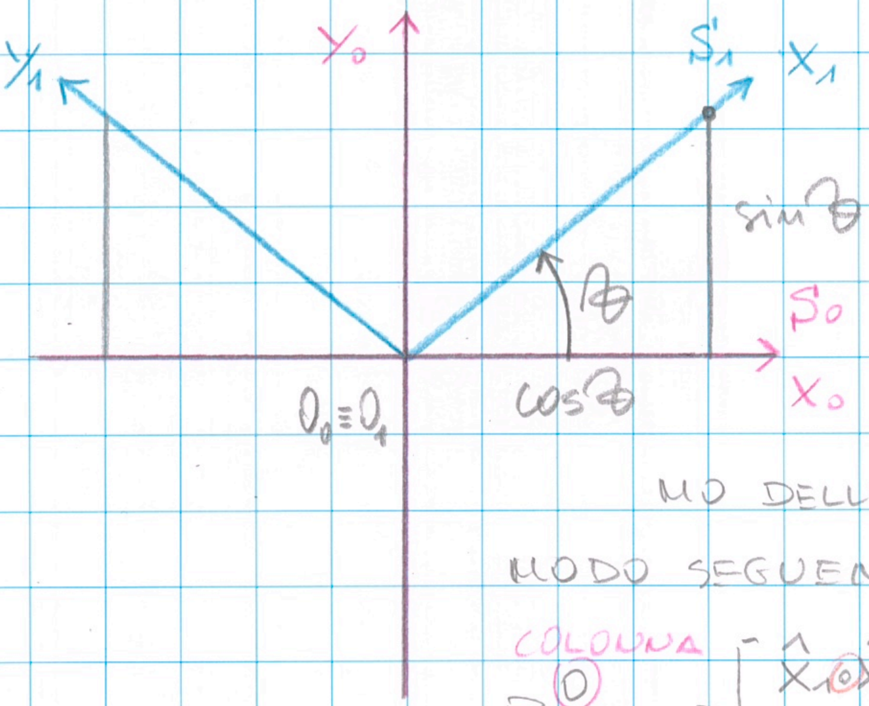
ALLORA QUESTO $\Rightarrow$ CHE (x, y, z, t) IN S' SI TRASFORMANO IN (x', y', z', t') SECONDO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ. OVVERO PARTENDO DA $\Box^2$ INVARIANTE DI FORMA SI OTTENGONO LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ. QUESTO E' POSSIBILE SOLO PARTENDO DAI POSTULATI DELLA RELATIVITÀ SPECIALE.

- OSSERVAZIONE CON LA DERIVAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SI CHIUDE IL PROBLEMA DELLA TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE, TRA DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI, CHE PRESERVINO TUTTE LE LEGGI DELLA FISICA, SIA DELL MECCANICA CLASSICA - STABILENDO UNA GERARCHIA TRA MECCANICA RELATIVISTICA E NEWTONIANA, CON QUEST'ULTIMA APPROSIMAZIONE DELLA PRIMA NEL LIMITE $v \ll c$ -, SIA DELLA E.D. CHE RISULTA INVECE INTRINSECAMENTE UNA TEORIA RELATIVISTICA.

- FORMALISMO MATRICIALE E METRICA IN $\mathbb{R}^3$

NELLO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^3$ LE TRASFORMAZIONI DELLE COORDINATE DI UN QUALSIASI ELEMENTO CHE APPARTIENE A QUELLO SPAZIO RIGUARDANO TIPICAMENTE OPERAZIONI DI TRANSLAZIONI, ROTAZIONI O ROTO-TRANSLAZIONI DEGLI ASSI DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO. QUI DI SEGUITO RICAPITOLIAMO ALCUNI ASPETTI FORMALI CHE POI UTILIZZEREMO E SVILUPPEREMO PER ANALOGIA PER IL CRONOTOPO, CHE PER CONVENZIONE CHIAMEREMO SPAZIO DI MINKOWSKI.

CONSIDERIAMO ORA UNA SEMPLICE ROTAZIONE DEGLI ASSI DI UN S.d.R IN $\mathbb{R}^2$ (2D)



QUESTA SEMPLICE OPERAZIONE DI ROTAZIONE DEGLI ASSI LA POSSIAMO RAPPRESENTARE CON IL FORMALISMO DELL'ALGEBRA LINEARE MODO SEGUENTE

COLONNA

$$R^{0}_{1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 \end{bmatrix} =$$

RIGA

PRODOTTI SCALARI

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

QUINDI UNA TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE DA $S'_0 \to S_1$ SI OTTIENE CON LA SEGUENTE OPERAZIONE

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = R^{0}_{1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

LA MATRICE R^0_1 LA OTTENIAMO DA

$$\begin{cases} x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta = x_1 \\ x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta = y_1 \end{cases}$$

OVVERO GLI ELEMENTI R^0_1 SONO I COEFFICIENTI CHE TRASFORMANO LE COORDINATE. QUESTO FORMALISMO RISULTA PARTICOLARMENTE UTILE QUANDO SI TRATTA DI FARE TRASFORMAZIONI PIÙ COMPLESSE COME UNA ROTAZIONE DEGLI ASSI IN $\mathbb{R}^3$.

COLONNA $\to$ 1

DOVE R_0^1 DIVENTA
$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{y}_0 \\ \hat{x}_1 \cdot \hat{z}_0 & \hat{y}_1 \cdot \hat{z}_0 & \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_0 \end{bmatrix} = R_0^1$$

RIGA $\to$ 0

- ESEMPIO LA ROTAZIONE ATTORNO A $\hat{z}_0$ DIVENTA

$\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_0 = \cos\theta \quad \hat{y}_1 \cdot \hat{x}_0 = -\sin\theta$

$\hat{x}_1 \cdot \hat{y}_0 = \sin\theta \quad \hat{y}_1 \cdot \hat{y}_0 = \cos\theta$

$\hat{z}_1 \cdot \hat{z}_0 = 1$

$$\Rightarrow R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{z,0} = I \ ; \ R_{z,\theta} \cdot R_{z,\phi} = R_{z,\theta+\phi} \ ; \ (R_{z,\theta})^{-1} = R_{z,-\theta}$$

- PROBLEMA SCRIVERE LE SEGUENTI MATRICI DI ROTAZIONE: $R_{x,\theta}$ E $R_{y,\theta}$.

- METRICA EUCLIDEA: LA METRICA E' UNA FUNZIONE CHE DEFINISCE LA DISTANZA TRA DUE PTI IN UN PARTICOLARE SPAZIO. IN TEORIA CONOSCENDO LA METRICA DI UNO SPAZIO SI CONOSCE LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO. NEL CASO DI $\mathbb{R}^3$ LA DISTANZA TRA DUE PUNTI E' INDIPENDENTE DALLA POSIZIONE (S.d.R.) DELL'OSSERVATORE $\Rightarrow$ LA DISTANZA TRA x_1, y_1, z_1 E x_2, y_2, z_2 DATA DA $(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$ E' INVARIANTE RISPETTO A QUASIASI TRASFORMAZIONE DEGLI ASSI DEL S.d.R. ED E' DEFINITA DAL PRODOTTO SCALALE $(\Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} + \Delta z\hat{z}) \cdot (\Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} + \Delta z\hat{z})$.

- ESEMPIO CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI LA DISTANZA TRA I PTI $\bar{P}_1$ E $\bar{P}_2$ SIA DATA DA dx, dy, dz (CHIAMEREMO QUESTE COORDINATE DIFFERENZIALI). LA DISTANZA DIFFERENZIALE TRA $\bar{P}_1$ E $\bar{P}_2$ E' DATA DA $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. IN QUESTO CASO LA FUNZIONE DISTANZA E' DETTA ELEMENTO DI LINEA.

NELL'ELEMENTO DI LINEA I COEFFICIENTI DIFFERENZIALI SONO TUTTI 1 E SONO DETTI COEFF. METRICI. QUESTI SI POSSONO RAGGRUPPARE IN UNA MATRICE 3X3 CHE DIREMO MATRICE METRICA CHE POSSIAMO COSTRUIRE IN BASE ALLA DEFINIZIONE DI DISTANZA DERIVATA DAL PRODOTTO SCALARE

$$dl^2 = (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \circ (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

RAPPRESENTATO DALLA SEGUENTE MATRICE

RIGA

$$g^{i}_{j} \equiv \begin{array}{c|ccc} & dx\hat{x} & dy\hat{y} & dz\hat{z} \\ \hline dx\hat{x} & 1 & 0 & 0 \\ dy\hat{y} & 0 & 1 & 0 \\ dz\hat{z} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

COLONNA

LA MATRICE

$$g^{i}_{j} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

È DETTA MATRICE METRICA O TENSORE METRICO.

- OSSERVAZIONE GLI INDICI i E j IDENTIFICANO LE RIGHE E LE COLONNE RISPETTIVAMENTE. PER LA MATRICE METRICA DI $\mathbb{R}^3$ $g^1_1 = 1$; $g^2_2 = 1$; $g^3_3 = 1$ $\Rightarrow i = j \Rightarrow g^i_j = 1$ PER $i \neq j$ $g^i_j = 0$.

- PROBLEMI: CALCOLARE GLI ELEMENTI DI LINEA E LA METRICA DI $\mathbb{R}^2$ USANDO LE COOR. POLARI $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$.

- TROVARE ELEMENTI DI LINEA, METRICA E MATRICE INVERSA DI UNO SPAZIO $\mathbb{R}^3$ USANDO LE COOR. SFERICHE $x = r\sin\theta\cos\phi$; $y = r\sin\theta\sin\phi$; $z = r\cos\theta$.

- LA STRUTTURA DEL CRONOTOPO O SPAZIO-TEMPO O SPAZIO DI MINKOWISKI. IL CRONOTOPO HA 4-D 1 TEMPORALE E 3 SPAZIALI $(ct, \vec{r} = x, y, z)$. L'USO DI UN VETTORE (TENSORE) 4 D NEL FORMALISMO DELLA RELATIVITÀ RENDE LA MATEMATICA PIÙ COMPATTA.

TUTTAVIA, PRIMA DI DEFINIRE L'ELEMENTO DI LINEA E LA MATRICE METRICA DELLO SPAZIO DI MINKOWSKI È NECESSARIO INTRODURRE ALCUNE DEFINIZIONI E REGOLE ALGEBRICHE OLTRE CHE LA NOTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ NEL FORMALISMO DELLO SPAZIO-TEMPO.
GLI ELEMENTI DELLO SPAZIO TEMPO SONO DUNQUE DEI VETTORI 4-D. QUESTI LI INDICHEREMO CON $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$

- USEREMO LE LETTERE GRECHE PER GLI INDICI SPAZIO-TEMPORALI $(\mu, \nu, \alpha, \beta$ ecc.$)$ E QUELLE LATINE PER LE DIMENSIONI SPAZIALI $(i, j, k; a, b \ldots)$. PER CONVENZIONE x^0 = COMP. TEMP. E $x^{1,2,3}$ = COMPONENTI SPAZIALI.

UN'ALTRA CONVENZIONE CHE ADOTTEREMO È DALLA POSIZIONE DELL'INDICE:

x_μ = VETTORE COVARIANTE ; x^μ = VETTORE CONTROVARIANTE.

$$x_\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

$$x^\mu = (-x^0, x^1, x^2, x^3) = (-ct, x, y, z)$$

CON QUESTE NOTAZIONI LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ TRA DUE S.d.R. IN CONFIGURAZIONE STANDARD S' E S' SONO

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

NOTAZIONE ORIGINALE — NOTAZIONE TENSORIALE