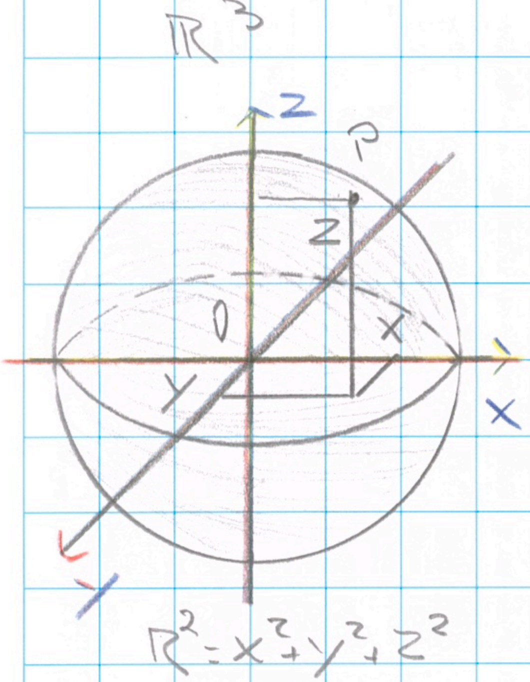
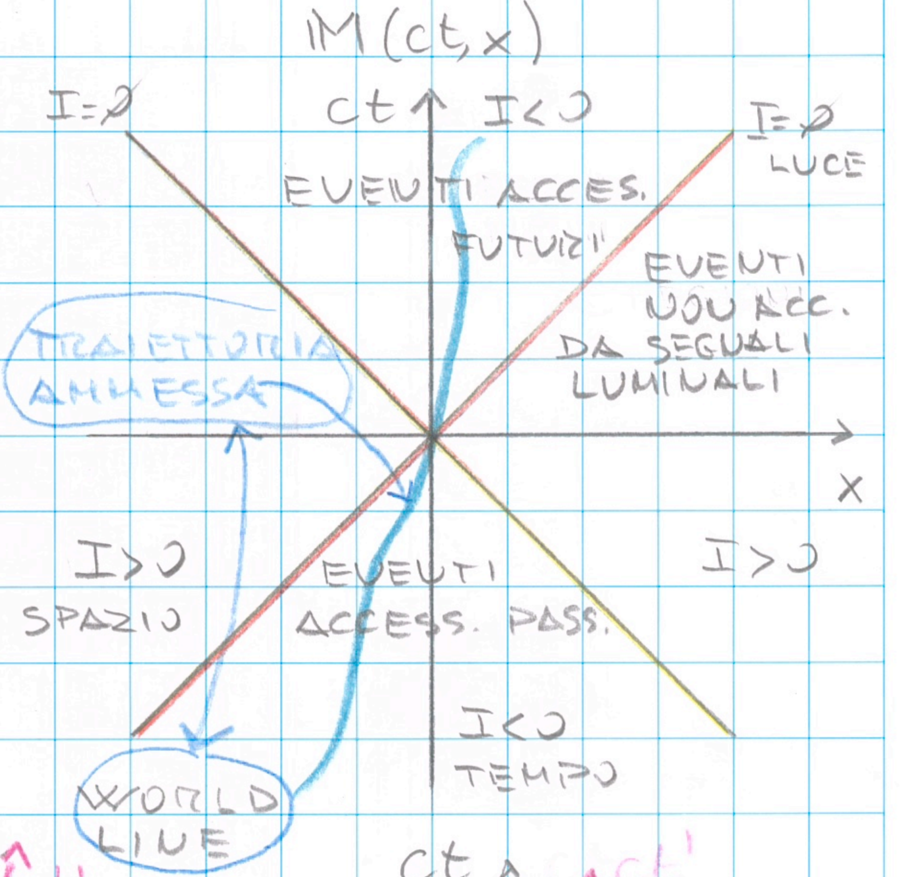
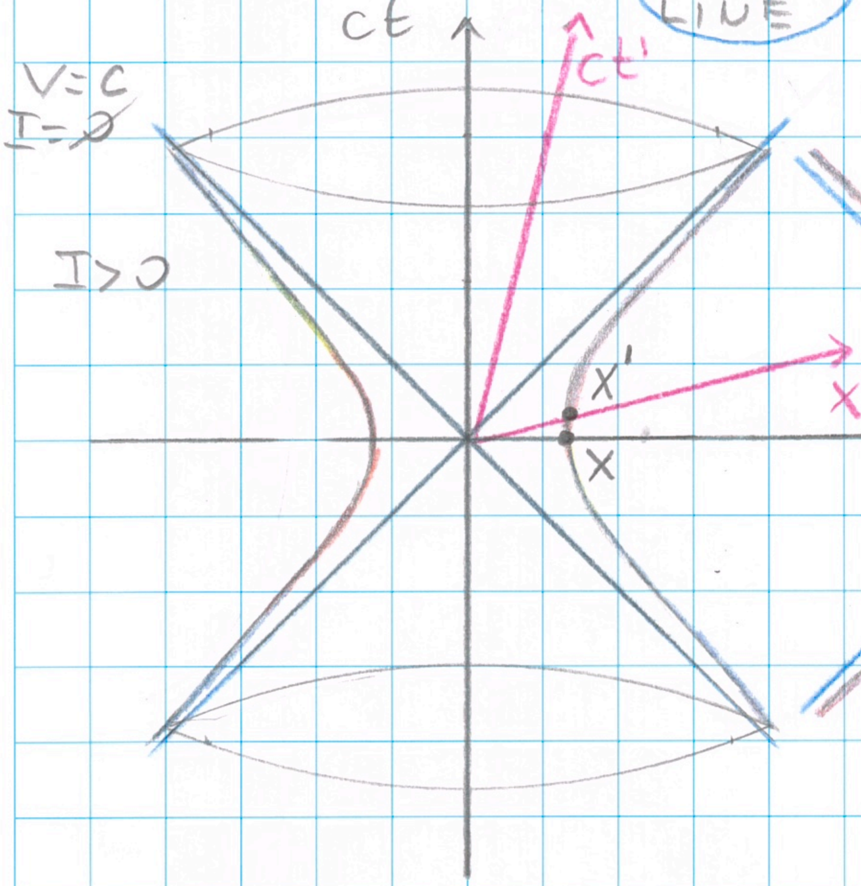
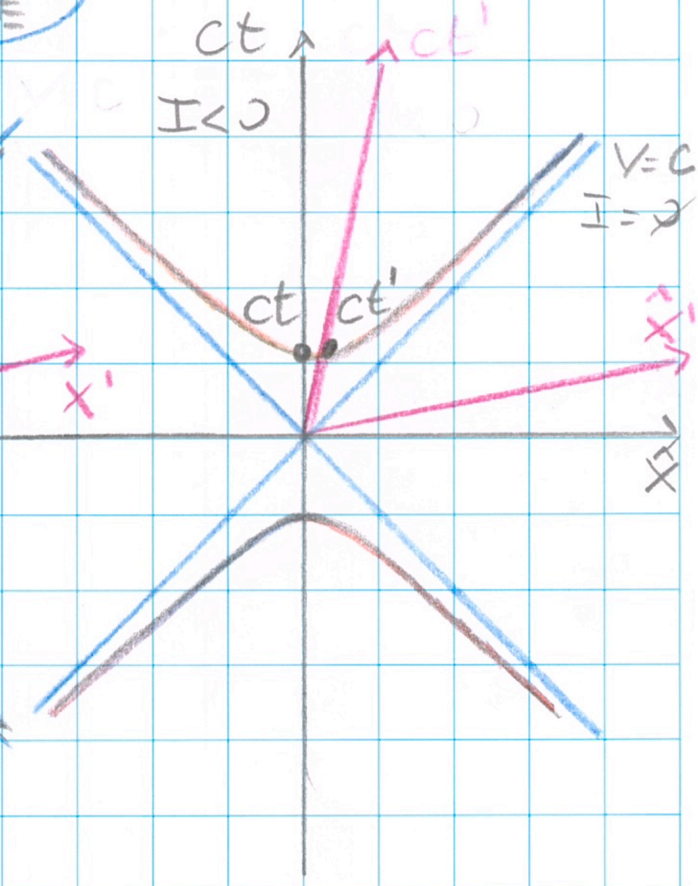








UN MODO PIÙ DIRETTO PER INDICARE LO SPAZIO-TEM-
PO E LE SUE DIMENSIONI SPAZIALI È, IN ANALOGIA
CON $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^{1,n}$ ($\mathbb{R}^{1+n}$) DOVE 1 INDICA LA DIMENSIONE
TEMPORALE E $n = 1, 2, 3$ INDICA LE DIMENSIO

NI SPAZIALI, PER ESEMPIO $\mathbb{R}^{1,1}$ INDICA (ct, x) $\mathbb{R}^{1,2}$ (ct, x, y) E $\mathbb{R}^{1,3}$ (ct, x, y, z). NATURALMENTE LO SPAZIO-TEMPO $\mathbb{M}$ E' $\mathbb{R}^{1,3}$ (VEDI PAG. 18)

ORA ANALIZZIAMO I SEGUENTI CASI

$I<0$ (TIPO TEMPO) SONO DUE IPERBOLOIDI DENTRO IL CONO-LUCE OTTENUTI DALLA ROTAZIONE ATTORNO ct

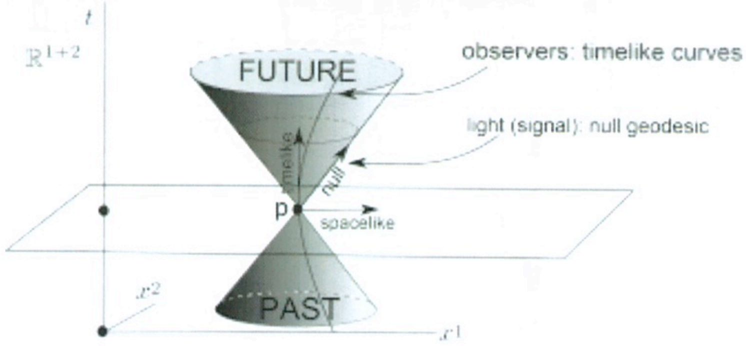
$I>0$ (TIPO SPAZIO) E' UN IPERBOLOIDE DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE ct.

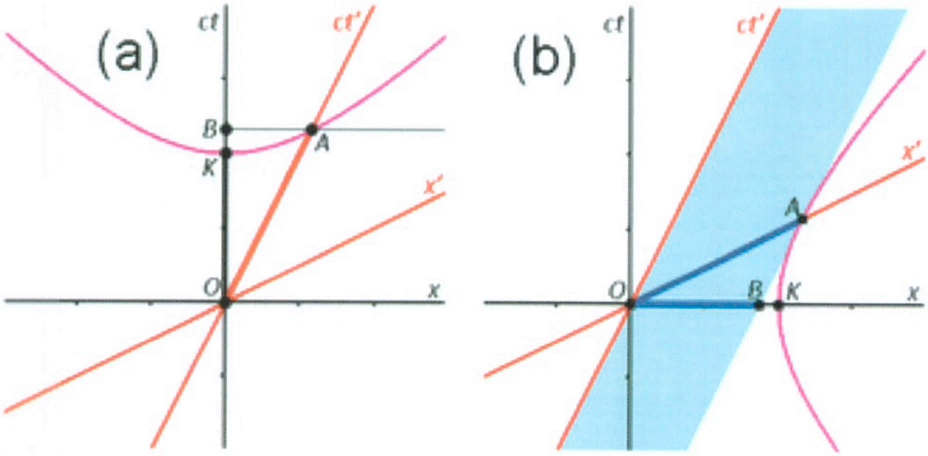
DA QUESTI IPERBOLOIDI SI PUO' OTTENERE UNA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ DELLE COORDINATE DA $S' \to S''$ O VICEVERSA. NELLE FIGURE DELLA PAGINA PRECEDENTE E IN QUELLE SEGUENTI, S' E S'' SONO IN CONFIGURAZIONE STANDARD.

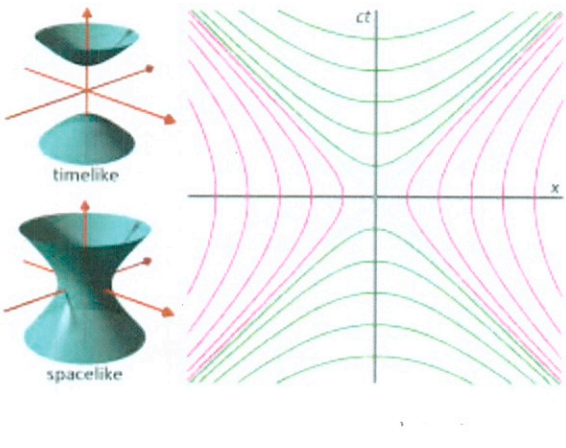
- ESEMPIO CON S' E S'' IN CONFIGURAZIONE STANDARD PER PASSARE DA $(ct, x) \to (ct', x')$ LE COORDINATE (ct', x') SARANNO SULLA STESSA IPERBOLE DATO CHE I E' LORENTZ INVARIANTE COME SI EVINCE DALLO SCHEMA RIPORTATO NELLE PAGINE SUCESSIVE.

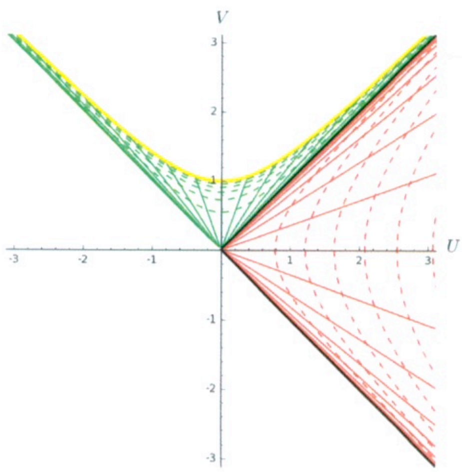
- OSSERVAZIONI
  - NON ESITONO T.L. CHE PERMETTONO DI PASSARE DAGLI IPERBOLOIDI TIPO-TEMPO SUPERIORI A QUELLI INFERIORI E VICEVERSA.
  - NON ESISTONO T.L CHE PERMETTONO DI PASSARE DA IPERBOLOIDI TIPO TEMPO A IPERBOLOIDI TIPO SPAZIO E VICEVERSA
  - PER $I<\emptyset$ L'ORDINE TEMPORALE DEGLI EVENTI E' ASSOLUTO E NON PUO' ESSERE INVERTITO
  - PER $I>\emptyset$ L'ORDINE TEMPORALE

DEGLI EVENTI DIPENDE DAL S. di R. NEL QUALE SONO OSSERVATI E PERTANTO VIOLA IL PRINCIPIO CAUSA-EFFETTO. GLI EVENTI ALL'INTERNO DEGLI IPERBOLOIDI TIPO TEMPO SONO SEMPRE CONSISTENTI CON IL PRINCIPIO CAUSA-EFFETTO.





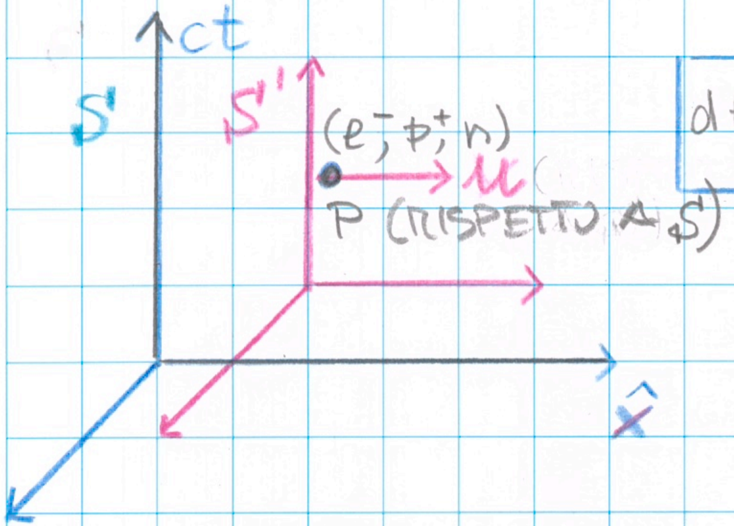




LEZIONE #29 CENNI DI MECCANICA RELATIVISTICA. PRIMA DI ENTRARE NEL MERITO DI QUESTO ARGOMENTO TROVO UTILE FARE UNA RIFLESSIONE RELATIVA AL FATTO CHE CI SONO GRANDEZZE FISICHE COME PER ESEMPIO IL VETTORE $\bar{J}$, A CUI AVEVAMO ACCENNATO A PAG. 22 DI QUESTI APPUNTI LA CUI DIVERGENZA, TRAMITE LA RELAZIONE DI CONTINUITÀ $\bar{\nabla}\circ J = -\partial_t \rho$ È LEGATA ALLA DENSITÀ DI CARICA $\rho(t,x,y,z)$. IN $\mathbb{R}^3$ L'EQUAZIONE RICHIEDE UN OPERATORE DIFFERENZIALE PER LO SPAZIO $(\bar{\nabla}\circ)$ E UNO PER IL TEMPO ∂_t. TUTTAVIA, IN UNO SPAZIO $\mathbb{R}^{1,3}$ IN LINEA DI PRINCIPIO POTREMMO TROVARE UN OPERATORE DIFFERENZIALE CHE AGISCE SIA SULLO SPAZIO (x,y,z) SIA SUL TEMPO E QUINDI INDICIZZARLO CON LA LETTERA μ $(\partial_\mu = \partial_t, \bar{\nabla})$ E POI TRASFORMARE $\bar{J}$, CHE POTREBBE DIPENDERE DALLO SPAZIO E DAL TEMPO, IN UN 4-VETTORE J^μ. QUESTA "RATIO PROCEDENDI" CI PORTERÀ A UNA FORMULAZIONE RELATIVISTICA ESPLICITA DELLA E.D. ESPRESSA CON IL FORMALISMO TENSORIALE IN $\mathbb{R}^{1,3}$.

TEMPO PROPRIO - VELOCITÀ PROPRIA. QUANDO CI MUOVIAMO LUNGO UNA TRAIETTORIA AMMESSA (WORLD-LINE) NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^{1,3}$ $(\mathbb{M})$ CON UNA VELOCITÀ ORDINARIA $\bar{u}$ IN S' UN OROLOGIO

IN S' E' PIÙ LENTO RISPETTO A QUELLO IN S'.



$$\boxed{dt' = dt/\gamma_u = \sqrt{1-\beta_u^2}\, dt}$$

DOVE $\gamma_u \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$

SE S' E S' SONO IN CONFIGURAZIONE STANDARD E P E' SOLIDALE A S' (VEDI FIGURA) POSSIAMO DIMOSTRARE LA RELAZIONE NEL MODO SEGUENTE: $dt = \gamma(dt' + v\Delta x'/c^2)$, MA DATO CHE P E' SOLIDALE A S', CHE A SUA VOLTA SI STA MUOVENDO SU UNA TRAIETTORIA AMMESSA, $\Rightarrow \Delta x' = 0 \Rightarrow dt' = dt/\gamma_u$

IL TEMPO REGISTRATO DA UN OROLOGIO SOLIDALE CON P (dt') LO DEFINIAMO TEMPO PROPRIO E LO INDICHIAMO CON $\tau \equiv t' \Rightarrow dt' \equiv d\tau$ DA CUI LA RELAZIONE $\boxed{d\tau = \sqrt{1-\beta_u^2}\, dt}$

$\Downarrow$ INTERVALLO DI TEMPO PROPRIO

RICORDIAMO CHE NELLA RELAZIONE

$d\tau = dt/\gamma_u$

(MISURATO SOLIDALE CON P) (MISURATO SOLIDALE CO S' (PER ES. LAB.)).

• $c\tau$ E' LORENTZ INVARIANTE. DIMOSTRAZIONE

COME ABBIAMO VISTO GLI INTERVALLI I SONO GRANDEZZE LORENTZ-INVARIANTI DATO CHE

RISULTANO DA PRODOTTO SCALARE DI 4-VETTORI

$\Delta x_\mu \circ \Delta x^\mu = \Delta x^\mu \circ \Delta x_\mu \Rightarrow$ L'INTERVALLO CALCOLATO IN S' $I_S = \Delta S^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = (\Delta S')^2 \Rightarrow$

$= -(c\Delta \tau)^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$ MA CON P SOLIDALE $\Delta S'$ $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = \emptyset \Rightarrow$

$\Delta S^2 = (\Delta S')^2 = c^2 \Delta \tau^2 \Rightarrow$ $c\Delta\tau$ E' RELATIVISTICAMENTE INVARIANTE.

- GRANDEZZE RELATIVISTICAMENTE INVARIANTI (ALCUNE) LE GRANDEZZE FISICHE CHE RIMANGONO INVARIATE RISPETTO A TUTTI I S.d.R INERZIALI SECONDO LA RELATIVITÀ SPECIALE SONO
  - c (VELOCITÀ DELLA LUCE)
  - INTERVALLO TRA GLI EVENTI $I = -(c\Delta t)^2 + (\Delta \bar{r})^2$
  - MASSA A RIPOSO (O MASSA PROPRIA).
- OSSERVAZIONE LE RELAZIONI TRA GRANDEZZE FISICHE RELATIVISTICAMENTE INVARIANTI CHE SI POSSONO DESCRIVERE TRAMITE EQS. SONO DETTE "FORME INVARIANTI".

DALLA DEFINIZIONE DI TEMPO PROPRIO τ POSSIAMO DEDURRE QUELLA DI VELOCITÀ PROPRIA NEL MODO SEGUENTE. LA VELOCITÀ ORDINARIA DI UNA PARTICELLA E' UN VETTORE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA E RISPETTO A UN S.d.R. CARTESIANO S HA COMPONENTI $d\bar{l}/dt = \bar{u} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$

LE VELOCITÀ ORDINARIE (CHE DIREMO ANCHE SPAZIALI) NON SI TRASFORMANO CON LE EQS. TRASFORMATE DI L.. TUTTAVIA, POSSIAMO DEFINIRE

IN RELATIVITÀ SPECIALE UN 4-VETTORE VELOCITÀ FORMA INVARIANTE. PER COSTRUIRE QUESTO 4-VETTORE FORMA INVARIANTE E LE CUI COMPONENTI SPAZIALI DEFINISCO NO LA VELOCITÀ PROPRIA, CONSIDERIAMO UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE SU UNA TRAIETTORIA AMMESSA, i.e. NELLO SPAZIO $I \leq 0$ IN $\mathbb{R}^{1,3}$. ESSENDO τ INVARIANTE LO POSSIAMO USARE COME PARAMETRO. IL 4-VETTORE VELOCITÀ È DEFINITO COME IL RAPPORTO TRA IL 4-VETTORE POSIZIONE IN $\mathbb{R}^{1,3}$, x^μ RISPETTO AL TEMPO PROPRIO

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) \equiv \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau}\right)$$

PER CALCOLARE LE 4-COMPONENTI RICORDIAMO CHE $dt = \gamma\, d\tau \Rightarrow$ IN UNITÀ $ct \equiv x^0 \equiv ct = c\gamma_u \tau$

QUINDI $c\gamma_u \tau$ DA CUI LA COORDIN. η^0 DI η^μ RISULTA

$\eta^0 = \dfrac{dx^0}{d\tau} = \dfrac{c\gamma_u \tau}{d\tau} = c\gamma_u$ LE COMPONENTI SPAZIALI DI η^μ (CON $\mu = 0,1,2,3$) SONO DATE DA

$\mu \equiv i$ $\eta^i \Rightarrow \dfrac{dx^i}{d\tau}$ CON $\dfrac{dx^0}{d\tau} = c\gamma_u \Rightarrow d\tau = \dfrac{dx^0}{c\gamma_u}$

$\eta^i = \dfrac{dx^i}{dx^0} c\gamma_u$ CON $x^0 \equiv ct \Rightarrow \eta^i = \dfrac{dx^i}{\cancel{c}dt}\cancel{c}\gamma_u = \gamma_u \dfrac{dx^i}{dt}$

$\Rightarrow$ LE COMPONENTI SPAZIALI SONO DATE DA

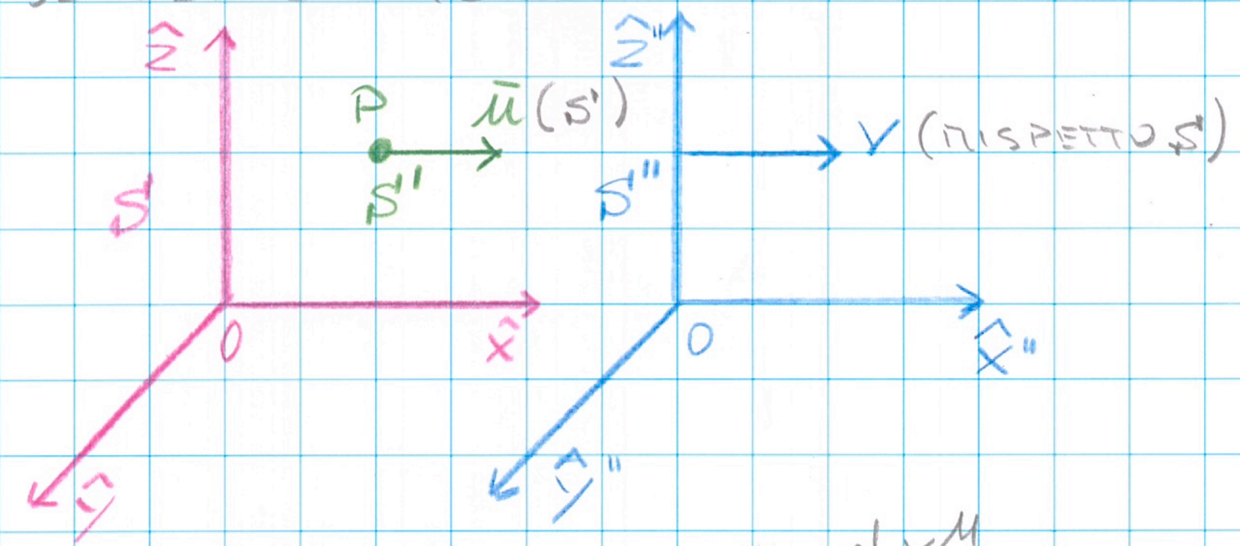
$\eta^i = \gamma_u \dfrac{dx^i}{dt}$ DOVE $\dfrac{dx^i}{dt}$ SONO LE COMPONENTI (x, y, z) DELLA VELOCITÀ ORDINARIA $\bar{u}$

$$\eta^\mu \equiv (\underbrace{\eta^0}_{\text{COMPONENTE TEMPORALE}}, \underbrace{\eta^1, \eta^2, \eta^3}_{\text{COMPONENTE SPAZIALE}}) \equiv (\eta^0, \bar{\eta}) \equiv (\gamma_u c, \bar{\eta}) \quad \text{CON}$$

$$\eta^i = \gamma_u u^i \Rightarrow (\gamma_u c, \gamma_u u^i)$$

$$\eta^\mu \equiv \gamma_u (c, \bar{u})$$

VEDIAMO ORA COME SI TRASFORMA IL 4-VETTORE η^μ. PER FARE QUESTO CALCOLO CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SCHEMA



DALLA DEFINIZIONE DI $\eta^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ OSSERVIAMO

CHE IL DIFFERENZIALE DEL 4-VETTORE x^μ SI TRASFORMA, MENTRE IL TEMPO PROPRIO RESTA INVARIATO (E' UN'INVARIANTE). QUINDI LE TRASFORMATE DA S' A S'' IN CONFIGURAZIONE STANDARD CON VELOCITÀ RELATIVA V SONO DATE DA

$$\begin{cases} (\eta'')^0 = \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) \\ (\eta'')^1 = \gamma(\eta^1 - \beta\eta^0) \\ (\eta'')^2 = \eta^2 \\ (\eta'')^3 = \eta^3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\eta'')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\nu}$$

DOVE $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ = È IL TENSORE DI LORENTZ IN CONFIGURAZIONE STANDARD (BOOST $\hat{x}$)

NEL FORMALISMO DELL'ALGEBRA LINEARE η^{μ} SI TRASFORMA COME

$$(\eta'')^{\mu} = \begin{vmatrix} (\eta'')^0 \\ (\eta'')^1 \\ (\eta'')^2 \\ (\eta'')^3 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) \\ \gamma(\eta^1 - \beta\eta^0) \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{vmatrix}$$

η^{μ} È DETTO 4-VETTORE VELOCITÀ PROPRIA O 4-VELOCITÀ

IN CONTRASTO LE REGOLE DI TRASFORMAZIONE DELLA VELOCITÀ ORDINARIA SI TRASFORMANO IN MODO PIÙ COMPLESSO DATO CHE $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ E QUINDI SI DEVE TRASFORMARE SIA LA COOR. x^i SIA t

$$(u'')_x = \frac{dx''}{dt} = \frac{u_x - V}{(1 - V u_x / c^2)}$$

$$(u'')_y = \frac{dy''}{dt} = \frac{u_y}{\gamma(1 - V u_x / c^2)}$$

$$(u'')_z = \frac{dz''}{dt} = \frac{u_z}{\gamma(1 - V u_x / c^2)}$$