QUANTITÀ DI MOTO E ENERGIA RELATIVISTICA

LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DELLA MECCANICA NEWTONIANA È VIOLATA QUANDO UNA PARTICELLA MASSIVA VIAGGIA A UNA VELOCITÀ PROSSIMA A QUELLA DELLA LUCE. QUESTO È UN FATTO SPERIMENTALE BEN NOTO. LE DEVIAZIONI DAL COMPORTAMENTO PREDETTO DINAMICA DI N.

$$\boxed{\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}}$$

SONO TANTO PIÙ GRANDI QUANTO PIÙ $v \to c$. DA UN PUNTO DI VISTA TEORICO LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA VIOLA IL PRINCIPIO RELATIVISTICO DI C COME VELOCITÀ LIMITE POICHÉ UNA $\bar{F}$ COSTANTE APPLICATA A m PORTEREBBE A UN INCREMENTO INFINITO DI V. GLI ESPERIMENTI INDICANO CHE LA RELAZIONE CORRETTA È

$$\boxed{\frac{d(m\gamma v)}{dt} = \bar{F}}$$

CHE COME VEDREMO È LA COMPONENTE SPAZIALE DEL 4-VETTORE NOTO COME FORZA DI MINKOWSKI. PER IL CASO DEL MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO E.M. LA RELAZIONE RELATIVISTICA FU USATA PER LA PRIMA VOLTA DA PLANCK CHE NE VERIFICÒ LA COVARIANZA RISPETTO ALLE RELAZIONI RELATIVISTICHE. TUTTAVIA, IN QUESTO CONTESTO, AVENDO INTRODOTTO IL τ E η^μ TORNA NATURALE DEFINIR UN 4-VETTORE MOMENTO, FORMALIZZANDO PRIMA LA RELAZIONE RELATIVISTICA DELLA FORZA IN MODO CONSISTENTE CON I FORMALISMI

UTILIZZATI FINORA $\Rightarrow \bar{p} = m\bar{v}$ (MECCANICA NEWTONIANA) $\bar{p} = m\bar{\eta}$ DOVE $\bar{\eta}$ È LA COMPONENTE SPAZIALE DI $\eta^\mu = (\eta^0, \bar{\eta})$, OVVERO LA COMPONENTE SPAZIALE DELLA VELOCITÀ PROPRIA CHE COME ABBIAMO VISTO RISULTA $\eta^i = \gamma_u u^i$ CON $i = x, y, z$. QUESTA DEFINIZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO, OLTRE CHE ESSERE CONSISTENTE CON GLI ESPERIMENTI È ANCHE CONSISTENTE CON IL PRINCIPIO DELLA RELATIVITÀ DOVE SI RICHIEDE CHE LE LEGGI DELLA FISICA SIANO LE STESSE IN TUTTI I S.d.R INERZIALI. ORA PROVIAMO A RICAVARE IL 4-VETTORE $p^\mu = m\eta^\mu = m(\eta^0, \bar{\eta})$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$

COMPON. TEM. → COMPON. SPA

LA COMPONENTE $p^0 = m\eta^0$ DOVE $\eta^0 = \gamma_u c \Rightarrow$ $p^0 = m\gamma_u c$. EINSTEIN CHIAMÒ m MASSA A RIPOSO (RICORDIAMO CHE m È LORENTZ INVARIANTE) E $\boxed{\gamma_u m}$ MASSA RELATIVISTICA. NELLA FISICA CORRENTE SI PREFERISCE DEFINIRE L'ENERGIA RELATIVISTICA, INVECE DELLA MASSA RELATIVISTICA E QUINDI ESPRIMERE p^0 IN TERMINI DI ENERGIA. ANCHE A QUESTO SCOPO CALCOLIAMO L'ENERGIA CINETICA RELATIVISTICA PARTENDO DALLA DEFINIZIONE DI LAVORO

$W = \int_{u_0}^{u_1} m u\, du = \int_{u_0}^{u_1} u\, dp$ PER RENDERE QUESTA RELAZIONE RELATIVISTICA USIAMO $dp = d(\gamma_u m u)$ OTTENENDO UN INTEGRALE CHE RISOLVEREMO

PER PARTI $\Rightarrow$ $E_k = \left[\gamma_u m u^2\right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} \gamma_u m u \, du$. PER IL SECONDO TERMINE USIAMO UN'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE $m\int_{u_0}^{u_1} \gamma_u u \, du = m\int_{u_0}^{u_1} \frac{u}{\sqrt{1-(u/c)^2}} du$

PONIAMO $s = 1 - \frac{u^2}{c^2} \Rightarrow ds = -\frac{2u}{c^2} du \Rightarrow$

$$m\int_{u_0}^{u_1} \gamma_u u \, du = -\frac{c^2 m}{2}\int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = -c^2 m \sqrt{s} + \text{cost}$$

$\left(\int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\sqrt{s} + \text{cost}\right)$ DA CUI SOSTITUENDO $s = 1 - \frac{u^2}{c^2}$

$$E_k = \left| \gamma_u m u^2 + mc^2 \frac{1}{\gamma_u} \right|_{u_0}^{u_1} = \left| \frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-u^2/c^2} \right|_{u_0}^{u_1} =$$

$$= \left| \frac{mu^2 + mc^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right|_{u_0}^{u_1} = \left| \frac{\cancel{mu^2} + mc^2 - \cancel{mu^2}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right|_{u_0}^{u_1} = \left| \gamma_u mc^2 \right|_{u_0}^{u_1}$$

DA CUI PONENDO $u_0 = 0$

$E_k = mc^2\left[\gamma_u - 1\right]$ IL TERMINE $\boxed{mc^2}$ E' RELATIVO A $u_0 = \varnothing \Rightarrow$ PARTICELLA FERMA $\Rightarrow mc^2\gamma_u$ E' L'ENERGIA TOTALE $\Rightarrow$ $E_{TOT} = mc^2\gamma_u = E_k + mc^2$

DALLA ENERGIA TOTALE RICAVIAMO IL TERMINE $p^0 = m\gamma_u c$ ESPRESSO IN TERMINI DI ENERGIA TOTALE $\Rightarrow$ $E_{TOT} = E = c p^0 \Rightarrow$

$\boxed{p^0 = E/c} \Rightarrow p^\mu \equiv \left(E/c, \bar{p}\right) \Rightarrow p^\mu \equiv \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right)$

$\equiv \left(E/c, p_x, p_y, p_z\right)$ CON $\bar{p} = m\bar{\eta} = \gamma_u m \bar{u} = m_{REL}\,\bar{u}$.

RIASSUMENDO LA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA IN RELATIVITÀ SPECIALE È DATA

$$\boxed{E_k + E_{RIP} = E_{TOT}}$$

$$\boxed{mc^2(\gamma_u - 1) + mc^2 = \gamma_u mc^2}$$

IN PARTICOLARE OSSERVIAMO CHE

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - 1\right)$$

PER $u \ll c$ ESPANDENDO IL TERMINE SOTTO RADICE IN POTENZE DI u^2/c^2 SI OTTIENE

$$E_k = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^2} + \dots \Rightarrow E_k \cong \frac{1}{2}mu^2$$

$\bar{p} = m\bar{u} \Rightarrow E_k \cong \frac{p^2}{2m}$. DI NUOVO PER $u \ll c$ RECUPERIAMO LA DINAMICA NEWTONIANA. È ANCHE UN FATTO SPERIMENTALE CHE $\bar{p} = m\bar{\eta}$ E $E = \gamma_u mc^2$ SI CONSERVANO IN OGNI SISTEMA CHIUSO. ANCHE LA MASSA REL. SI CONSERVA DATO CHE È EQUIVALENTE ALLA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA $E = \gamma_u mc^2 = m_{REL}c^2$ (CON $m_{REL} = m\gamma_u$) $\Rightarrow m_{REL} = E/c^2$. NON SI CONSERVA LA MASSA A RIPOSO. LA CONVERSIONE DELLA MASSA IN ENERGIA È DI FATTO LA CONVERSIONE DELLA MASSA A RIPOSO IN ENERGIA CINETICA.

- OSSERVAZIONE. NOTIAMO LA DIFFERENZA TRA GRANDEZZE LORENTZ INVARIANT E GRANDEZZE CHE SI CONSERVANO:
- m_{RIP} È LORENTZ INVARIANTE MA NON SI CONSERVA

- L'ENERGIA TOTALE SI CONSERVA MA NON È LORENTZ INVARIANTE
- CARICA ELETTRICA È LORENTZ INVARIANTE E SI CONSERVA
- RELAZIONE MOMENTO-ENERGIA UNA RELAZIONE IMPORTANTE TRA MOMENTO E ENERGIA SI OTTIENE DAL CALCOLO DEL PRODOTTO SCALARE

$$p^\mu \cdot p_\mu = p_\mu \cdot p^\mu = -(p^0)^2 + \underbrace{(\bar{p}\cdot\bar{p})^2}_{\text{COMP. SPAZ.}} = \boxed{-\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p^2}$$

MA $p^\mu \cdot p_\mu = m\eta^\mu \cdot m\eta_\mu = m^2(\eta^\mu \cdot \eta_\mu) =$

$$m^2\left[-(\eta^0)^2 + \eta^2\right] = m^2\left[-(\gamma^2 c^2) + \gamma^2 u^2\right] = m^2\gamma^2\left[u^2 - c^2\right]$$

$$= -m^2 \frac{1}{1 - u^2/c^2}(c^2 - u^2) = -m^2c^2 \frac{(c^2-u^2)}{(c^2-u^2)} = \boxed{-m^2c^2}$$

$$\Rightarrow -\left(E/c\right)^2 + p^2 = -m^2c^2 \Rightarrow \boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4}$$

DOVE E È L'ENERGIA TOTALE $\Rightarrow E = E_k + mc^2$

$$(E_k + mc^2)^2 - p^2c^2 = m^2c^4 : E_k^2 + 2E_k mc^2 + \cancel{m^2c^4} - p^2c^2 = \cancel{m^2c^4} \Rightarrow \boxed{E_k^2 + 2E_k mc^2 = p^2c^2}$$

CHE PER $u << c$

$$\Rightarrow E_k^2 << 2E_k mc^2 \Rightarrow E_k \simeq \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

- OSSERVAZIONE LA RELAZIONE $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ SI PRESTA A UNA INTERPRETAZIONE MOLTO IMPORTANTE DATO CHE ANCHE PARTICELLE CON MASSA Ø HANNO MOMENTO E ENERGIA E QUESTA È UN'ALTRA PECULIARITÀ DELLA TEORIA RELATIVISTICA

PONENDO $m=0$ OTTENIAMO $E=pc$. QUESTA RELAZIONE CI È NOTA DATO CHE $p=E/c$ È IL TERMINE p^0 DEL 4-VETTORE p^μ. È ANCHE INTERESSANTE NOTARE CHE IN FISICA NEWTONIANA DALLA RELAZIONE ENERGIA-MOMENTO $E=\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ PER $m \to 0$ $E \to \infty$, OVVERO OTTENIAMO UNA SINGOLARITÀ. INVECE POSSIAMO CHIEDERCI COME POSSIAMO INTERPRETARE QUESTO CASO NEL CONTESTO RELATIVISTICO. CONSIDERIAMO $p^\mu = \left(E/c, \bar{p}\right)$

$\bar{p}$: COMPONENTI SPAZIALI DEL MOMENTO RELAT.

$\bar{p} = \gamma m \bar{u}$ CHE PER $m=0 \Rightarrow \bar{p}=0$. CONCLUDIAMO CHE SECONDO LA RELATIVITÀ POSSONO ESISTERE PARTICELLE A MASSA NULLA CON MOMENTO LINEARE ESPRESSO DAL 4-VETTORE p^μ NON NULLO PER QUANTO RIGUARDA LA COMPONENTE $p^0 = E/c$ RISULTA $\neq 0$. MA QUESTO DOBBIAMO RICONCILIARLO CON IL FATTO CHE $p^0 = m\eta^0 = m\gamma_u c$ DA CUI OTTENIAMO CHE $E/c = m\gamma_u c \Rightarrow$ $E = m\gamma_u c^2$ CHE È L'ENERGIA TOTALE. PER $m=0$ L'UNICA POSSIBILITÀ DI AVERE $E \neq 0$ È CHE PER $E = m\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}c^2$ $u=c$. ESISTONO TALI PARTICELLE? LA RISPOSTA È POSITIVA. PER ESEMPIO IL FOTONE, MA L'UNICA CONDIZIONE PER ESISTERE È CHE LA LORO VELOCITÀ SIA c.

TUTTO QUESTO SI RICONCILIA CON LA TEORIA QUANTISTICA DOVE LA QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO E.M. DEFINISCE COME QUANTO DI ENERGIA E.M. IL PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER LA FREQUENZA DELLA RADIAZIONE $E = h\nu = \hbar\omega$ DOVE $h \cong 6.626 \times 10^{-34}$ J/s E' NOTA COME COST. DI PLANCK ($\hbar = h/2\pi$). EGUAGLIANDO $E = pc$ CON $E = h\nu$ OTTENIAMO $p = h\nu/c = \hbar\omega/c$.

SI OSSERVI CHE $E = pc$ E' LA RELAZIONE TRA LA DENSITÀ DI ENERGIA E LA DENSITÀ DI IMPULSO DEL CAMPO E.M. E RICORDANDO CHE NELLO SPAZIO LIBERO $\omega/k = c$ DA OTTENIAMO $p = \hbar k$

VALE LA PENA SOTTOLINEARE CHE QUESTA RELAZIONE RISULTA COME SINTESI DI UNA RELAZIONE RELATIVISTICA ($p = E/c$ CHE E' LA COMPONENTE $\mu = 0$ DEL 4-MOMENTO), UNA QUANTISTICA ($E = \hbar\omega$) E UNA DI E.D. CLASSICA ($\omega/k = c$)

(2) CONS. ENERGIA

$$E^{*}_{TOT} = \gamma_{u^*} M c^2 = Mc^2 = \frac{5}{2} mc^2$$

$$\Rightarrow M = \frac{5}{2} m \neq 2m \qquad \gamma_{u^*} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u^*}{c}\right)^2}}$$

~~IN UNA INTERPRETAZIONE MACROSCOPICA LA DIFF. DI ENERGIA SI DISSIPA COME CALORE.~~

$$u^* = 0 \Rightarrow \gamma_{u^*} = 1$$

CINEMATICA RELATIVISTICA ASSOCIATA AL PROCESSO

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

PIONE$^+$ DECADE IN UN MUONE$^+$ E UN NEUTRINO$_\mu$

LA MASSA A RIPOSO DEL π^+ E'

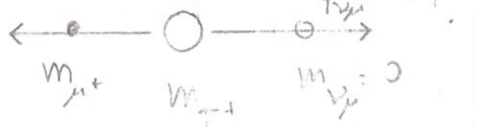
$m_{\pi^+} = 139.57\ MeV/c^2$ E IL TEMPO DI

DECADIMENTO $\tau_{\pi^+} = 26.033 \times 10^{-9} s$

MASSA A RIPOSO DEL MUONE $m_{\mu^+} = 105.66\ \frac{MeV}{c^2}$

MASSA A RIPOSO DEL ν_μ: $m_{\nu_\mu} = 0$ (ASSOLUTA)

$$\bar{p}_{\mu^+} = -p\hat{x} \qquad \bar{p}_{\pi^+} = 0 \qquad \bar{p}_{\nu_\mu} = +p\hat{x}$$



CONS. ENERGIA CONS. MOM.

PRIMA $E_{TOT} = m_{\pi^+} c^2$, $\bar{p}_{TOT} = 0$

DOPO* $E^*_{TOT} = E_{\mu^+} + E_{\nu_\mu} = m_{\pi^+} c^2$ $\bar{p}^*_{TOT} = \bar{p}_{\mu^+} + \bar{p}_{\nu_\mu} = 0$

$\Rightarrow \bar{p}_{\mu^+} = -\bar{p}_{\nu_\mu} = -\bar{p}^*$

ORA APPLICHIAMO LA RELAZIONE ~~...~~ TRA

~~...~~ MOMENTO E ENERGIA

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

PER ν_μ $E^2_{\nu_\mu} = p^2_{\nu_\mu} c^2 \Rightarrow E_{\nu_\mu} = |p_{\nu_\mu}| c$ $(m_{\nu_\mu} = 0)$

MENTRE $p_{\nu_\mu} = |\bar{p}_{\nu_\mu}| = p_{\mu^+} = |\bar{p}_{\mu^+}|$

$$E^2_{\mu^+} = p^2_{\mu^+} c^2 + m^2_{\mu^+} c^4 \Rightarrow p^2_{\mu^+} c^2 = E^2_{\mu^+} - m^2_{\mu^+} c^4$$

$$p_{\mu^+} c = \sqrt{E^2_{\mu^+} - m^2_{\mu^+} c^4} \Rightarrow p_{\mu^+} = |\bar{p}_{\mu^+}| = p_{\nu_\mu} = |\bar{p}_{\nu_\mu}| =$$

$$\sqrt{E^2_{\mu^+} - m^2_{\mu^+} c^4} \Big/ c$$

ALLORA L'ENERGIA TOTALE DOPO IL DECADIMEN-

TO E' $E^*_{TOT} = E_{\mu^+} + E_{\nu_\mu} = E_{\mu^+} + p_{\nu_\mu} c$

$$E^*_{TOT} = E_{\mu^+} + \sqrt{E_\mu^2 + m_{\mu^+}^2 c^4} = m_{\pi^+} c^2$$

PER IL PRINCIPIO DI CONS.

$$E_{\mu^+} + \sqrt{E_\mu^2 - m_{\mu^+}^2 c^4} = m_{\pi^+} c^2$$

$m_\pi c^2 - E_\mu = \sqrt{\;}$

$m_\pi^2 c^4 + E_\mu^2 - 2 m_\pi c^2 E_\mu = E_\mu^2 - m_\mu c^4$

$$\left(E_{\mu^+}^2 - m_{\mu^+}^2 c^4\right) = \left(m_{\pi^+} c^2 - E_{\mu^+}\right)^2 =$$

$$\cancel{E_{\mu^+}^2} - m_{\mu^+}^2 c^4 = m_{\pi^+}^2 c^4 - 2 m_{\pi^+} c^2 E_{\mu^+} + \cancel{E_{\mu^+}^2}$$

$$\boxed{2 m_{\pi^+} c^2 E_{\mu^+} = m_{\pi^+}^2 c^4 + m_{\mu^+}^2 c^4}$$

$$E_{\mu^+} = \frac{c^4 \left(m_{\pi^+}^2 + m_{\mu^+}^2\right)}{2 c^2 \; m_{\pi^+}} \qquad \frac{c^2}{2} \frac{\left(m_{\pi^+}^2 + m_{\mu^+}^2\right)}{m_{\pi^+}}$$

- IN RELATIVISTIC COLLISIONS

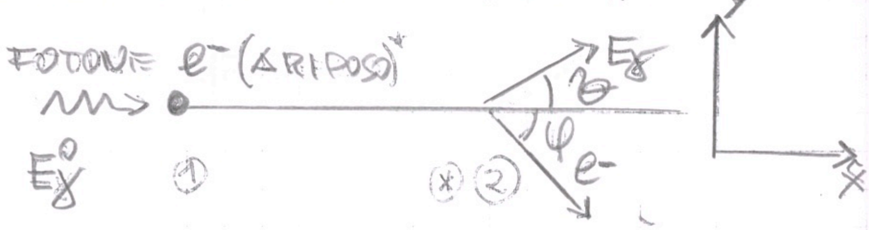
  IL MOMENTO RIFERITO ALLE COOR. SPAZIALI $\bar{p}\,(p^1, p^2, p^3)$ E L'ENERGIA TOTALE SONO SEMPRE CONSERVATE IN UN SISTEMA CHIUSO, MA LA MASSA TOTALE E L'ENERGIA CINETICA TOTALE NON SONO, IN GENERALE, CONSERVATE.

- UN PROCESSO RELATIVISTICO DI COLLISIONE PUO' ESSERE ELASTICO O ANELASTICO

IN UN PROCESSO ELASTICO L'ENERGIA CINETICA TOTALE E' CONSERVATA E LA MASSA TOTALE E' CONSERVATA, VICE VERSO IN UN PROCESSO ANELASTICO.

SCATTERING COMPTON

E' UN PROCESSO D'URTO RELATIVISTICO ELASTICO TRA UN e^- E UN $h\nu$



* IL CALCOLO SI FA NEL SdR DELL'e^- APPLICANDO LA CONS. DELL'ENERGIA E DEL MOMENTO

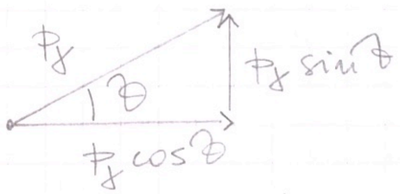
MOMENTO TRASVERSO $\perp$ ($\hat{y}$)

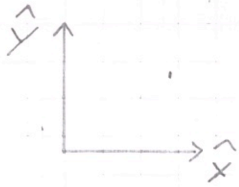
$$p_{\perp TOT} = 0 = p^*_{\perp TOT}$$

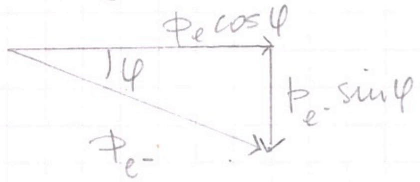
$$p_{\perp TOT} = p_{\perp\gamma} + p_{\perp e^-} = 0$$

$$p^*_{\perp TOT} = p^*_{\perp\gamma} + p^*_{\perp e^-} = 0 \Rightarrow \underset{+\hat{y}}{p^*_{\perp\gamma}} = \underset{-\hat{y}}{-p_{\perp e^-}}$$

DOPO L'URTO ABBIAMO







$-p_{\perp e^-}(-\hat{y})$

CONS. MOMENTO $\perp (\hat{y})$

DATO CHE $p_{\perp\gamma} = -p_{\perp e^-} \Rightarrow p_\gamma \sin\theta = p_{e^-} \sin\varphi$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad m_\gamma = 0 \Rightarrow E_\gamma^2 = p_\gamma^2 c^2$$

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \Rightarrow \boxed{\frac{E_\gamma}{c} \sin\theta = p_{e^-} \sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = \left(\frac{E_\gamma}{c\, p_{e^-}}\right) \sin\theta$$

CONS. MOMENTO $/\!/ (\hat{x})$

① $p_{/\!/TOT} = \frac{E_\gamma^0}{c}$ ($p_{e^-} = 0 \Leftarrow e^-$ È FERMO NEL SdR SCELTO)

②

$$p^*_{/\!/TOT} = p^*_{/\!/\gamma} + p^*_{/\!/e^-} = p_\gamma \cos\theta + p_{e^-} \cos\varphi$$

MA $\underset{①}{p_{/\!/TOT}} = \underset{②}{p^*_{/\!/TOT}} \Rightarrow \frac{E_\gamma^0}{c} = p_\gamma \cos\theta + p_{e^-} \cos\varphi$

ALCUNE RIF

CONSIDERIAM

$\bar{p} = \frac{m \bar{u}}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$

$E^2 - p^2c^2 = m^2$

SE CONSIDE

MASSA 0 (

$\bar{p}$ ED E

SCRITTE SO

TERZA RELA

RELAZIONE

QUESTA POTR

DIZIONE SE

LA NON ESIS

TUTTAVIA,

DI MASSA =

AVERE DI

MA $\sin\varphi = \left(\frac{E_\gamma}{p_e c}\right)\sin\theta$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{E_\gamma}{p_e c}\right)^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{E_\gamma^0}{c} = p_\gamma\cos\theta + p_e\cos\varphi$$

$$\frac{E_\gamma^0}{c} = p_\gamma\cos\theta + p_e\sqrt{1-\left(\frac{E_\gamma}{p_e c}\right)^2\sin^2\theta}$$

$$E_\gamma^0 = p_\gamma c\cos\theta + p_e c\sqrt{1-\left(\frac{E_\gamma}{p_e c}\right)^2\sin^2\theta}$$

$$E_\gamma^0 - E_\gamma\cos\theta = p_e c\sqrt{1-\left(\frac{E_\gamma}{p_e c}\right)^2\sin^2\theta}$$

$$\left(E_\gamma^0 - E_\gamma\cos\theta\right)^2 = (p_e c)^2\cdot\left[1-\left(\frac{E_\gamma}{p_e c}\right)^2\sin^2\theta\right]$$

$$\left(E_\gamma^0 - E_\gamma\cos\theta\right)^2 = (p_e c)^2 - E_\gamma^2\sin^2\theta$$

$$(p_e c)^2 = \left(E_\gamma^0 - E_\gamma\cos\theta\right)^2 + E_\gamma^2\sin^2\theta$$

$$(p_e c)^2 = \left(E_\gamma^0\right)^2 + \left(E_\gamma\right)^2 - 2E_\gamma^0 E_\gamma\cos\theta$$

$$E_\gamma^0 + m_e c^2 = E_\gamma + E_e = E_\gamma + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}$$

1 ENERGIA PRIMA

2 ENERGIA DOPO

$$E_\gamma^0 + m_e c^2 = E_\gamma + \sqrt{(E_\gamma^0)^2 + (E_\gamma)^2 - 2E_\gamma^0 E_\gamma \cos\theta + m_e^2 c^4}$$

SI ELEVA AL ^{2} IL TRINOMIO

$$E_\gamma = \frac{1}{[(1-\cos\theta)/m_e c^2 + 1/E_\gamma^0]}$$

$$E_\gamma^0 = h\nu^0 = hc/\lambda_\gamma^0$$

$$E_\gamma = h\nu^* = hc/\lambda_\gamma^*$$

LUNGHEZZA D'ONDA COMPTON DELL'e^-

$$\lambda_\gamma^* = \lambda_\gamma^0 + \left(\frac{hc}{m_e c^2}\right)(1-\cos\theta)$$

$$\lambda_\gamma^* = \lambda_\gamma^0 + \lambda_e(1-\cos\theta)$$

$$E_\gamma = \frac{E_\gamma^0 m_e c^2}{(1-\cos\theta)E_\gamma^0 + m_e c^2} = \frac{hc}{\lambda_\gamma^*}$$

$$\lambda_\gamma^* = \frac{hc \cdot (1-\cos\theta)E_\gamma^0 + m_e c^2 hc}{E_\gamma^0 m_e c^2}$$

$$= \frac{h\cancel{c}(1-\cos\theta)\cancel{E_\gamma^0}}{\cancel{E_\gamma^0} m_e c^2} + \frac{\cancel{m_e c^2}}{E_\gamma^0 \cancel{m_e c^2}} hc$$

$$= \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) + \lambda_\gamma^0 \frac{hc}{hc}$$