TUTTAVIA, PRIMA DI DEFINIRE L'ELEMENTO DI LINEA E LA MATRICE METRICA DELLO SPAZIO DI MINKOWSKI È NECESSARIO INTRODURRE ALCUNE DEFINIZIONI E REGOLE ALGEBRICHE OLTRE CHE LA NOTAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ NEL FORMALISMO DELLO SPAZIO-TEMPO.

GLI ELEMENTI DELLO SPAZIO TEMPO SONO DUNQUE DEI VETTORI 4-D. QUESTI LI INDICHEREMO CON $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

- USEREMO LE LETTERE GRECHE PER GLI INDICI SPAZIO-TEMPORALI (μ, ν, α, β etc.) E QUELLE LATINE PER LE DIMENSIONI SPAZIALI ($i, j, k; a, b \dots$). PER CONVENZIONE x^0 = COMP. TEMP. E $x^{1,2,3}$ = COMPONENTI SPAZIALI.

UN'ALTRA CONVENZIONE CHE ADOTTEREMO È DALLA POSIZIONE DELL'INDICE:

x_μ = VETTORE COVARIANTE ; x^μ = VETTORE CONTROVARIANTE.

$$x_\mu = (-x^0, x^1, x^2, x^3) = (-ct, x, y, z)$$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

SPOSTARE L'INDICE $x^\mu \to x_\mu$ E VICEVERSA $\Rightarrow$ UN'INVERSIONE TEMPORALE $\Rightarrow$ LA COORD. x^0 CAMBIA DI SEGNO. IN SEGUITO NOI USEREMO LE TRASFORMAZIONI TRA 4-VETTORI x^μ. LE T.L. TRA S' E S' IN CONFIGURAZIONE STANDARD SONO:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

NOTAZIONE ORIGINALE | NOTAZIONE TENSORIALE

QUESTA NOTAZIONE SI PUÒ ANCHE RAPPRESENTARE IN FORMA MATRICIALE

MATRICE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ (T.L.)

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

QUESTO SI USA ANCHE SCRIVERE IN UNA FORMA COMPATTA COME SEGUE

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^\nu$$

RIGA

COLONNA

DOVE $\mu = 0, 1, 2, 3$ E Λ = MATRICE T.L. $\Rightarrow$

$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda$ $\mu \leftrightarrow$ RIGA, $\nu \leftrightarrow$ COLONNA

$$\Lambda \equiv \begin{vmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{vmatrix}$$

ELEMENTI DIAGONALI

ORA SCRIVIAMO IN MODO ESPLICITO LA Σ!

$$x'^0 = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{0}{}_{\nu} x^\nu = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 + \Lambda^0{}_2 x^2 + \Lambda^0{}_3 x^3$$
$$= \underline{\gamma (x^0 - \beta x^1)}$$

$$x'^1 = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{1}{}_{\nu} x^\nu = \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 + \Lambda^1{}_2 x^2 + \Lambda^1{}_3 x^3$$
$$= \underline{\gamma (x^1 - \beta x^0)}$$

$$x'^2 = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{2}{}_{\nu} x^\nu = \Lambda^2{}_0 x^0 + \Lambda^2{}_1 x^1 + \Lambda^2{}_2 x^2 + \Lambda^2{}_3 x^3$$
$$= \underline{x^2}$$

$$x'^3 = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{3}{}_{\nu} x^\nu = \Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3$$
$$= \underline{x^3}$$

IN UNA ANNOTAZIONE ABBREVIATA, INTRODOTTA DA EINSTEIN, SI OMETTE $\sum$ $\Rightarrow$ $x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$

- ALGEBRA CON ELEMENTI 4-VETTORIALI. QUI RIPORTIAMO ALCUNE OPERAZIONI ALGEBRICHE CON 4-VETTORI
- PROPRIETÀ DI LINEARITÀ SIMILI A QUELLE DEI VETTORI EUCLIDEI IN $\mathbb{R}^3$.

$$A^{\mu} + B^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3) + (B^0, B^1, B^2, B^3)$$
$$= (A^0 + B^0, A^1 + B^1, A^2 + B^2, A^3 + B^3)$$

$$\lambda A_{\mu} = \lambda (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\lambda A^0, \lambda A^1, \lambda A^2, \lambda A^3)$$

$$A_{\mu} + (-B_{\mu}) = (A^0, A^1, A^2, A^3) + (-1)(B^0, B^1, B^2, B^3)$$
$$= (A^0 - B^0, A^1 - B^1, A^2 - B^2, A^3 - B^3)$$

- PRODOTTO SCALARE. IL PRODOTTO SCALARE TRA 4-VETTORI È MOLTO IMPORTANTE IN RELATIVITÀ SPECIALE PERCHÉ È LORENTZ-INVARIANTE. QUESTO IMPLICA CHE UNA GRANDEZZA FISICA CHE RISULTA DA UN PRODOTTO SCALARE TRA 4-VETTORI IL SUO VALORE È INDIPENDENTE DAL S. d. R INERZIALE SCELTO E QUESTO CI DÀ LA LIBERTÀ DI SCEGLIERE IL PIÙ CONVENIENTE. LA DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE (PRODOTTO INTERNO) TRA DUE 4-VETTORI È SIMILE A QUELLA DI PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI EUCLI-

DEI ECCETTO CHE ESSO È SEMPRE TRA UN 4-VETTORE COVARIANTE $(A_\mu \equiv A_0, A_1, A_2, A_3)$ E UN 4-VETTORE CONTROVARIANTE $(B^\mu \equiv -B^0, B^1, B^2, B^3) \Rightarrow$

$$A \circ B \equiv A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu \Rightarrow A \circ B = -A_0 B^0 + (A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3)$$

IN UNA NOTAZIONE MATRICIALE LA METRICA DI UN PRODOTTO SCALARE TRA 4-VETTORI È DATA DA

$$g^i_j = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A \circ B = (A_0 A_1 A_2 A_3)\, g^i_j \begin{vmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix}$$

- LORENTZ-INVARIANZA DEL PRODOTTO SCALARE (INTERNO TRA 4-VETTORI). QUESTO IMPLICA TRASFORMARE SECONDO LE T.L. $A \to A'$ E $B \to B'$ E DIMMOSTRARE CHE $A \circ B = A' \circ B'$. ASSUMIAMO S E S' IN CONFIGURAZIONE STANDARD.

$A_0 \to \gamma(A_0 - \beta A_1) = A_0'$ N.B. LE ALTRE COORD. NON SI TRAS. PERCHÈ SIAMO IN UNA CONF. STANDARD

$A_1 \to \gamma(A_1 - \beta A_0) = A_1'$

$B^0 \to \gamma(B^0 - \beta B^1) = B^{0'}$

$B^1 \to \gamma(B^1 - \beta B^0) = B^{1'}$

$A_2 = A_2'$, $A_3 = A_3'$; $B^2 = B^{2'}$, $B^3 = B^{3'}$. $\Rightarrow$

$$\underset{\text{COVARIANTE}}{A'} \circ \underset{\text{CONTROVARIANTE}}{B'} = \gamma(A_0 - \beta A_1)(-1)\gamma(B^0 - \beta B^1) +$$

$$+ [\gamma(A_1 - \beta A_0)\gamma(B^1 - \beta B^0) + A_2 B^2 + A_3 B^3)] =$$

$$-\gamma^2(1-\beta^2) A_0 B^0 + \gamma^2(1-\beta^2) A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 =$$

$$-A_0 B^0 + (A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3) = A \circ B$$

DOVE SI È USATA L'UGUAGLIANZA $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$

- ESERCIZIO: DIMOSTRARE $\gamma^2(1-\beta^2)=1$

IL PRODOTTO SCALARE TRA 4-VETTORI SI RAPPRESENTA ANCHE CON LA SEGUENTE NOTAZIONE

$\sum_{\mu=0}^{3} A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$ DOVE OMETTENDO IL SIMBOLO DI $\sum$ ABBIAMO $A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$

- OSSERVAZIONE QUESTA NOTAZIONE GENERICA EQUIVALE ALLA NOTAZIONE CHE ABBIAMO USATO E USEREMO PER IL CASO SPECIFICO DI 4-VETTORI RELATIVISTICI $A_\mu \equiv X_\mu (X_0, X_1, X_2, X_3)$, $A^\mu \equiv (-X^0, X_1, X_2, X_3)$; $B_\mu \equiv (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)$, $B^\mu \equiv (-Y^0, Y^1, Y^2, Y^3)$.

E' QUINDI INTERESSANTE IL PARALLELO TRA UNA ROTAZIONE $R_{z,\theta}$ IN $\mathbb{R}^3$ E LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ NELLO SPAZIO-TEMPO.

$$\begin{vmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x\cos\theta + a_y\sin\theta \\ -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta \\ a_z \end{vmatrix}$$

$a'^i = R_{z\theta}\, a^i$. NEL CASO SPECIFICO DELLE T.L NELLO SPAZIO TEMPO AVREMO

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\mu$$

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\mu}$$

1 CALCOLARE COME SI TRASFORMA IL 4-VETTORE x^μ UTILIZZANDO LA MATRICE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ DA $S \to S'$ CON UN BOOST-$\hat{y}$ E UN BOOST-$\hat{z}$

2 - FARE LO STESSO CALCOLO DI (1) PER UN BOOST-$\vec{r}(x,y,z)$

DA QUANTO VISTO IN PRECEDENZA NOTIAMO CHE ESISTONO DELLE SIMILITUDINI FORMALI TRA LE T.L. DA $S \to S'$ CON LE TRASFORMAZIONI DELLE COORDINATE DOVUTE ALLE ROTAZIONI ATTORNO AGLI ASSI DI UN S.d.R CARTESIANO NELLO SPAZIO EUCLIDEO. PER RENDERE QUESTO PARALLELISMO PIÙ CHIARO INTRODUCIAMO IL PARAMETRO RAPIDITÀ ξ DEFINITO COME $\xi \equiv \tanh^{-1}\beta = \tanh^{-1}(v/c) \Rightarrow$ $\tanh\xi \equiv \beta = v/c$ DOVE $-1 \leq \beta < 1 \Rightarrow -\infty \leq \xi < +\infty$.

DATO CHE $\tanh\xi = \dfrac{\sinh\xi}{\cosh\xi}$ E $\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\xi}} = \frac{\cosh\xi}{\sqrt{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi}} = \cosh\xi$$

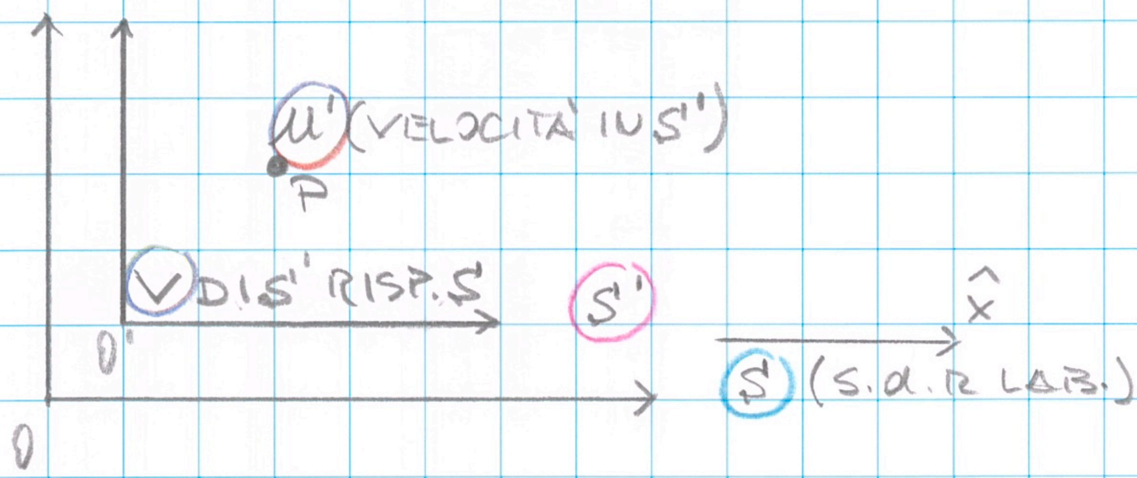
$$\Rightarrow \gamma\beta = \cosh\xi\tanh\xi = \cosh\xi \cdot \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi} = \sinh\xi$$

SE RISCRIVIAMO LA MATRICE DI LORENTZ E L'EQ. DI TRASFORMAZIONE PER UNA CONFIGURAZIONE STANDARD $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ OTTENIAMO PER $\Lambda^\mu{}_\nu$

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ DOVE

LA $R_{z,\theta}$ E'
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

L'INTRODUZIONE DEL PARAMETRO RAPIDITÀ TORNA UTILE PER LA REGOLA DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ DI EINSTEIN



MECCANICA NEWTONIANA (TRAS. DI GALILEI)

$u = u' + V$

↳ VELOCITÀ RELATIVA AL SUOLO

MECCANICA RELATIVISTICA

$$x' = \gamma(x - vt) = u't' \; ; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$(x - vt) = \frac{u't'}{\gamma} = \frac{u'\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}{\gamma} = u'\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{(u'+v)t}{(1 + u'v/c^2)}$$

, SE u È LA VELOCITÀ DI P RISPETTO AL LAB. ALLORA LA COOR. SPAZIALE DI P IN S È $x = ut$ DA CUI EGUAGLIANDO CON OTTENIAMO

$$\boxed{u = \frac{u' + V}{1 + u'V/c^2}}$$

OPPURE

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}}$$

. QUESTO RISULTATO È NOTO COME TEOREMA DI EINSTEIN E PIÙ AVANTI LO VEDREMO IN FORMA PIÙ GENERALIZZATA.

OTTENIAMO $u'/c = \dfrac{u/c - v/c}{1 - u\,v/c^2} \Rightarrow$

$$\beta'_{u'} = \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta}$$

CHE CON $\beta_u = \tanh \varrho_u$ E $\beta'_{u'} = \tanh \varrho_{u'}$

$\beta = \tanh \varrho$ $\rightarrow$ $\tanh \varrho_{u'} = \dfrac{\tanh \varrho_u - \tanh \varrho}{1 - \tanh \varrho_u \tanh \varrho}$ CHE DALLA

TRIGONOMETRIA DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE DÀ

$$\tanh \varrho_{u'} = \tanh(\varrho_u - \varrho) \Rightarrow \boxed{\varrho_{u'} = \varrho_u - \varrho}$$

. QUESTO RISULTATO È IMPORTANTE PERCHÉ DIMOSTRA CHE SULLA BASE DELLE T.L. LE RAPIDITÀ SONO ADITIVE, CIÒ CHE NON SONO LE VELOCITÀ. QUESTE ULTIME INVECE SONO ADITIVE NELLA MECCANICA NEWTONIANA COME CONSEGUENZA DELLE TRAS. DI G..

- INVARIANZA DELL'INTERVALLO SPAZIO-TEMPO

SI DEFINISCE INTERVALLO SPAZIO-TEMPO RELATIVISTICO LA DIFFERENZA TRA LE COORDINATE X^μ_A E X^μ_B DEI 4-VETTORI DI DUE EVENTI A E B

$$\Delta X^\mu = X^\mu_A - X^\mu_B$$

$$X^\mu_A = \begin{vmatrix} X^0_A \\ X^1_A \\ X^2_A \\ X^3_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ct \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix} \; ; \; X^\mu_B = \begin{vmatrix} X^0_B \\ X^1_B \\ X^2_B \\ X^3_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ct \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix}$$

COME PER LA GEOMETRIA EUCLIDEA IL PRODOTTO