LE COMPONENTI SPAZIALI DI K^{μ} SONO POSTE IN RELAZIONE ALLA FORZA ORDINARIA DA

$$\vec{K} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma_u \vec{F}$$

, MENTRE

$$K^0 \equiv \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}$$

, A PARTE $1/c$ E' LA POTENZA IMPRESSA ALLA PARTICELLA

$$K^{\mu} \equiv \begin{vmatrix} K^0 \\ K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{vmatrix} \equiv \begin{matrix} K^0 = dp^0/d\tau = \frac{1}{c}\, dE/d\tau \\ K^1 = dp^1/d\tau = \gamma_u F^1 \\ K^2 = dp^2/d\tau = \gamma_u F^2 \\ K^3 = dp^3/d\tau = \gamma_u F^3 \end{matrix}$$

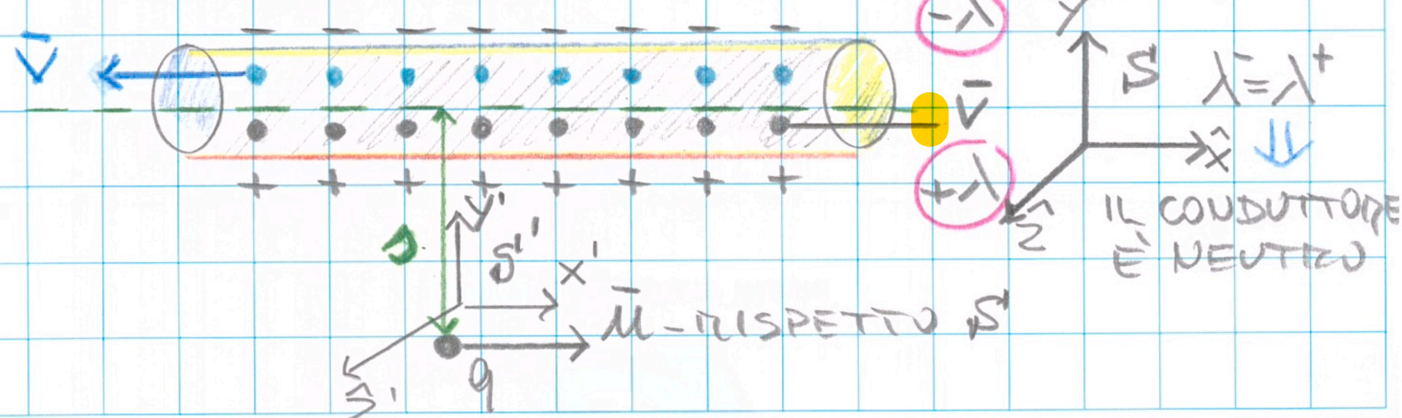
- LEZIONE #30
- ELETTRODINAMICA RELATIVISTICA

INTRODUCIAMO QUESTO ARGOMENTO DIMOSTRANDO CHE IL MAGNETISMO E' INTERPRETABILE COME L'EFFETTO RELATIVISTICO DI CARICHE IN MOVIMENTO. QUESTO SIGNIFICA CHE TUTTA L'ELETTRODINAMICA PUO' ESSERE DEDOTTA POSTULANDO LA SOLA ESISTENZA DEL MONOPOLO ELETTRICO CHE PUO' ASSUMERE CARICHE UGUALI E OPPOSTE.

QUINDI PASSEREMO, USANDO ANALOGIE FENOMENOLOGICHE, ALLA TRASFORMAZIONE DEI CAMPI QUANDO SI PASSA DA UN S.d.R INERZIALE S A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE S' IN CONFIGURAZIONE STANDARD. QUESTO LO POSSIAMO FARE AVENDO DIMOSTRATO CHE LE EQS. DI MAXWELL

E LA FORZA DI LORENTZ SONO LORENTZ INVARIANTI.
QUINDI PASSEREMO ALLA COSTRUZIONE DEL TENSORE DI CAMPO E DEL SUO DUALE LE CUI DERIVATE PARZIALI RISPETTO ALLE COORDINATE x^{μ} CI PERMETTERANNO DI RICAVARE LE EQS. DI MAXWELL. NATURALMENTE, PER FORMULARE L'ED. CON IL FORMALISMO RELATIVISTICO ESISTONO ANCHE PROCEDIMENTI PIÙ RIGOROSI PER QUANTO CONCERNE GLI ASPETTI MATEMATICI, (VEDI PER ESEMPIO CAP. XVIII DEL PANOFSKY-PHILLIPS - J.D. JACKSON CAP. 11 - V. BARONE CAP. IX, A. ZANGWILL CAP. XXII), TUTTAVIA NOI SEGUIREMO L'APPROCCIO RIPORTATO NEL TESTO DI D. GRIFFITHS CONSIDERANDOLO COME BASE DI PARTENZA PER CHI DEI MIEI "25 STUDENTI" SI VOLESSE ADDENTRARE NELLA STRUTTURA GEOMETRICO-ANALITICA DELLA TEORIA CLASSICA DEI CAMPI (NEL QUAL CASO CONSIGLIO IL TESTO DI E. GOURGOULHON - SPECIAL RELATIVITY IN GENERAL FRAMES FROM PARTICLES TO ASTROPHYSICS - SPRINGER) E QUINDI ALLA Q.F.T. (QUANTUM FIELD THEORY).

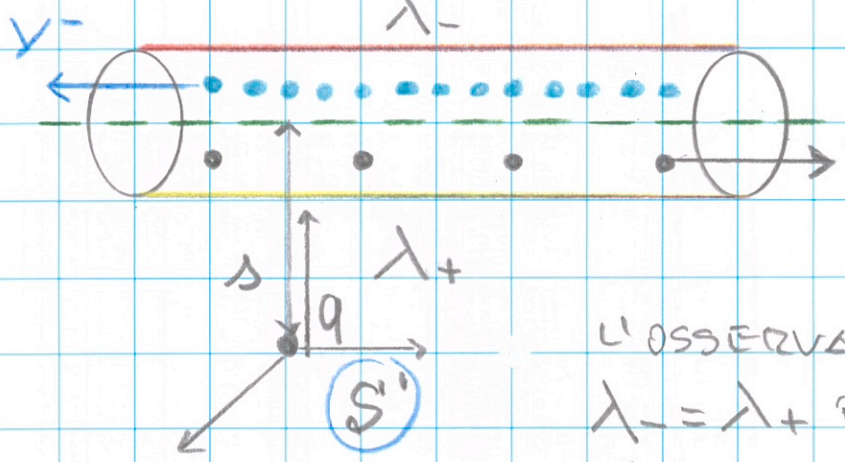
- MAGNETISMO COME FENOMENO RELATIVISTICO

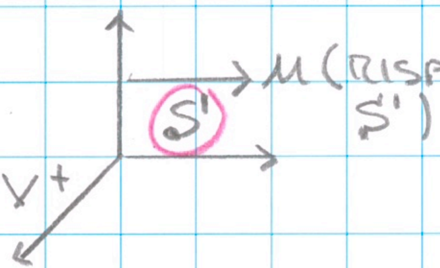


• OSSERVAZIONE NELLA FIGURA PRECEDENTE S È SOLIDALE AL FILO, S' È SOLIDALE ALLA CARICA $q \Rightarrow$ S E S' SONO IN CONFIGURAZIONE STANDARD CON VELOCITÀ RELATIVA $\bar{u}$.

• LA CORRENTE CHE SCORRE IN UN CONDUTTORE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATA COME UN MOTO DI CARICHE DI SEGNO OPPOSTO IN DIREZIONI OPPOSTE. NATURALMENTE IL SISTEMA RIMANE ELETTRICAMENTE NEUTRO PER UN OSSERVATORE SOLIDALE CON IL CONDUTTORE E UNA CARICA q NELLO SPAZIO CIRCOSTANTE E FERMA RISPETTO AL CONDUTTORE NON È SOGGETTA A ALCUNA FORZA [$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$ DOVE $\bar{E} = 0$ E $\bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{F} = \emptyset$]. SE $|\bar{v}| = v$ È LA VELOCITÀ CON CUI SI MUOVONO LE CARICHE NEL CONDUTTORE E $|\lambda|$ È LA LORO DENSITÀ LINEARE (SUPPONIAMO LE CARICHE UN CONTINUO) $\Rightarrow I = 2\lambda v$ ESSENDO $\lambda^+ = \lambda^-$ PER PRESERVARE LA NEUTRALITÀ. TUTTAVIA, SE q È IN MOTO RISPETTO A S (CONDUTTORE) IL CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$ GENERATO DALLA CORRENTE I INTERAGISCE CON LA CARICA $q \Rightarrow \bar{F} = q(\bar{u} \times B)$ QUESTO È QUELLO CHE CHIAMIAMO COMPONENTE MAGNETICA DELLA FORZA DI LORENTZ DOVE IL CAMPO MAGNETICO È INTRODOTTO DATO CHE S NON VEDE INTERAZIONI DI TIPO ELETTRICO DATO CHE TUTTO È NEUTRO. TUTTAVIA, L'OSSERVATORE S' (SOLIDALE CON LA CARICA q) NON VEDE IL SISTEMA NEUTRO DATO CHE È LE CARICHE SONO

IN MOTO RELATIVO RISPETTO A S'





L'OSSERVATORE S' NON VEDE $\lambda_- = \lambda_+$ PER EFFETTO DEL MOTO RELATIVO LE VELOCITÀ COMPOSTE SECONDO LA REGOLA DI EINSTEIN RISULTANO $V^{\pm} = \dfrac{V \mp U}{1 \mp VU/c^2}$

E QUINDI VEDE $V^- > V^+$ INFATTI $V^+ = \dfrac{(V-U)c^2}{(c^2 - VU)}$ E $V^- = \dfrac{(V+U)c^2}{(1+VU)}$. VERIFICHIAMO

$$V^- > V^+ \Rightarrow (V+U)c^2 \cdot (c^2 - VU) > (V-U)c^2 \cdot (1+VU)$$

$$\cancel{c^4 V} + c^4 U - c^2 V^2 U - \cancel{c^2 V U^2} > \cancel{c^4 V} - c^4 U + c^2 V^2 U - \cancel{c^2 V U^2}$$

$2c^4 \cancel{U} > 2c^2 V^2 \cancel{U}$. PER QUESTO MOTIVO S' NON OSSERVA IL CONDUTTORE NEUTRO, MA CARICO. LA CORRENTE DELLE CARICHE (−) $I^{(-)} = 2\lambda_0 V^- > I^{(+)} = 2\lambda_0 V^+$ COME SE IL CONDUTTORE PORTASSE UNA CARICA NEGATIVA NETTA. IN GENERALE SE λ_0 È LA DENSITÀ DI CARICA PROPRIA $\lambda = \gamma \lambda_0$ CON $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(V \mp U)^2 (1 \pm VU/c^2)^{-2}}}}$$

DOVE V VA CALCOLATA SECONDO LA COMPOSIZIONE RELATIVISTICA DELLE VELOCITÀ.

$$\Rightarrow \gamma_v^{\pm} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 \mp uv)^2 - c^2(v \mp u)^2}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}} =$$

$$= \frac{\cancel{c^2}(1 \mp uv/c^2)}{\cancel{c^2}\sqrt{(1 - v^2/c^2)\cdot(1 - u^2/c^2)}} = \gamma_v \frac{1 \mp uv/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}$$ QUINDI SOSTIT.

OTTENIAMO $\lambda_{TOT} = \lambda^+ + \lambda^- = \lambda_0(\gamma^+ - \gamma^-)$ (DERIVA DAL − DELLE CARICHE NEG.) $\Rightarrow \lambda_{TOT} = \dfrac{-2\lambda uv}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

• <u>OSSERVAZIONE</u>: IN TERMINI PIÙ ESPLICITI QUESTO EFFETTO E' DOVUTO AL FATTO CHE LA $\lambda^{\pm} = Q/L^{\pm}$ RISPETTO ALL'OSSERVATORE SOLIDALE CON LA CARICA ESTERNA q L^- E' PIÙ CONTRATTO RISPETTO A L MENTRE L^+ E' DILATATO $\Rightarrow$ Q E' SEMPRE LA STESSA <u>MA LA DENSITÀ LINEARE DI CARICA NO</u>. QUINDI LA CARICA q VEDE UN CAMPO CHE E' DATO DA $|\vec{E}| = \dfrac{\lambda_{TOT}}{2\pi\varepsilon_0 s}$ $\Rightarrow$ SU q AGISCE UNA FORZA IL CUI MODULO E' DATO DA

$$|\vec{F}'| = q|\vec{E}| = -\frac{\lambda v}{\pi\varepsilon_0 c^2 s} \cdot qu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}_{=\gamma_u}$$. QUESTO E' IL MODULO DELLA FORZA IN S'. IN S RISULTA $F' = \gamma F$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{\gamma_u} F' = -\frac{\lambda v}{\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{qu}{s}; \quad c^2 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1} \Rightarrow$$

$$F = -qu\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right)$$ DOVE SI E' POSTO $I = \lambda v$ ED

ESSENDO F IL MODULO DELLA FORZA COMPLESSIVA

(CONDUTTORE CARICA) LA FORZA CHE IL CONDUTTORE ESERCITA SULLA CARICA È $1/2\ F = F_L$. NEL TERMINE POSTO (---) RICONOSCIAMO L'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO ALLA DISTANZA s DA UN FILO PERCORSO DA UNA CORRENTE I DA CUI LA COMPONENTE MAGNETICA DELLA FORZA DI LORENTZ $F_L = -q(u)(\bar{B})$

• PROBLEMA. DEDURRE DIREZIONE E VERSO ISTANTANEI DELLA FORZA ESERCITATA SULLA CARICA q DALLA CORRENTE CHE SCORRE NEL FILO SEGUENDO IL FORMALISMO RELATIVISTICO ESPOSTO SOPRA.

• TRASFORMAZIONE DEI CAMPI

AFFRONTIAMO QUESTO PROBLEMA PRIMA CON UN APPROCCIO MATEMATICO FORMALE E POI CON DEGLI ESPERIMENTI IDEALI PER CAPIRE LA FENOMENOLOGIA SOTTESA. COME ABBIAMO VISTO NELL'ESEMPIO PRECEDENTE OSSERVATORI SOLIDALI CON DIFFERENTI S.d.R. INERZIALI POSSONO ESSERE IN DISACCORDO SULL'ORIGINE DEI FENOMENI E.D. OSSERVATI, DATO CHE I CONCETTI DI CAMPO $\bar{E}$ E CAMPO $\bar{B}$ (FORZA ELETTRICA E FORZA MAGNETICA) SONO DIPENDENTI DALL'OSSERVATORE. QUESTA OSSERVAZIONE RISOLVE DIRETTAMENTE LA QUESTIONE SOLLEVATA DA EINSTEIN CIRCA L'ASSIMMETRIA MANIFESTA DELLE LEGGI DI FARADAY. IN ULTIMA SINTESI CIÒ CHE È DIVERSO PER I DUE OSSERVATORI SONO LA DENSITÀ DI CARICA E DI CORRENTE. GIOVA QUI RICORDARE CHE DATA UN CONFIGURAZIONE STANDARD TRA DUE S.d.R. INERZIALI S E S' SOLO LE

COMPONENTI // AL MOTO RELATIVO SI TRASFORMANO MENTRE QUELLE $\perp$ NON SI TRASFORMANO, QUINDI GIOVA SCOMPORRE LE GRANDEZZE VETTORIALI IN QUESTIONE IN COMPONENTI // E COMPONENTI $\perp$. IN GENERALE SE $\bar{C}$ E' UN VETTORE CHE CHE POSSIAMO SCOMPORRE NELLE SUE COMPONENTI // E $\perp$ $(\bar{C}=\bar{C}_{/\!/}+\bar{C}_{\perp})$ RISPETTO ALLA VELOCITÀ $\bar{V}$ CON CUI SI MUOVE UN S.d.R INERZIALE S' RISPETTO A S (DOVE POSSIAMO ANNOTARE $\bar{V}=c\bar{\beta}$) ALLORA DIMOSTREREMO LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI DEI CAMPI

(1) $\begin{cases} E'_x = E_x \\ B'_x = B_x \end{cases}$ (2) $\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \end{cases}$ (3) $\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{cases}$

UNA VOLTA DIMOSTRATE QUESTE RELAZIONI DIMOSTRANO CHE L'IDEA DEI CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ PRE-RELATIVISTICA, OVVERO DI CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ DISTINTI E' SUPERATA DALLA FORMULAZIONE RELATIVISTICA DELLA E.D..

SI NOTI CHE IL PASSAGGIO DA UN S.d.R S A S' E VICEVERSA MESCOLA I CAMPI.

- OSSERVAZIONE SI NOTI CHE CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ NULLI IN UN S.d.R LO SONO ANCHE IN TUTTI GLI ALTRI.

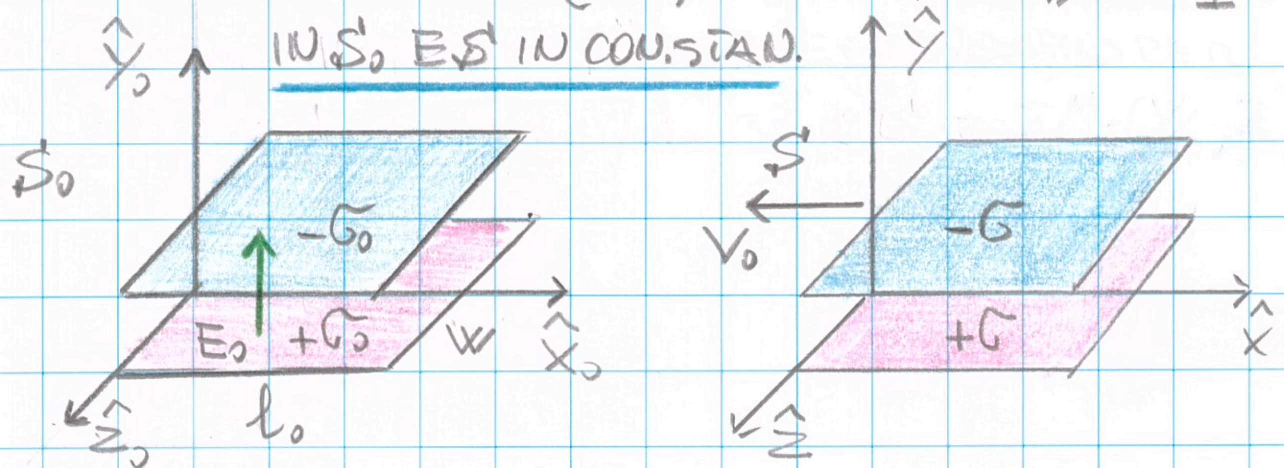
- NOTIAMO CHE LE TRASFORMAZIONI DEI CAMPI LE POSSIAMO DIVIDERE IN 3 BLOCCHI DI EQ. LINEARMENTE DIPENDENTI. SE RICAVIAMO LE RELAZIONI DEL BLOCCO (1) E (2) POSSIAMO DEDURRE QUELLE DEL BLOCCO (3).

LA LOGICA CHE STIAMO SEGUENDO QUI CONSISTE NEL RICAVARE COME SI TRASFORMANO I CAMPI E QUINDI

COSTRUIRE IL TENSORE DI CAMPO E IL SUO DUALE DAI QUALI RICAVARE LE RELAZIONI FONDAMENTALI DELLA E.D.. TUTTAVIA, SI PUO' PROCEDERE ANCHE RICAVANDO PRIMA I TENSORI DI CAMPO E POI RICAVARE COME SI TRASFORMANO I CAMPI. RITENGO QUESTA SECONDA PROCEDURA FORMALMENTE PIÙ OSTICA E IMPEGNATIVA PER CUI ADOTTIAMO LA PRIMA PROCEDURA DI DERIVAZIONE.

PER FARE QUESTO UTILIZZIAMO I SEGUENTI ESEMPI.

1 SI CONSIDERI UN CONDENSATORE CON LE PIASTRE PARALLELE AL PIANO (x, z) E SI VALUTI $\bar{E}_{/\!/}$ E $\bar{E}_{\perp}$ IN S_0 E S IN CON.STAN.

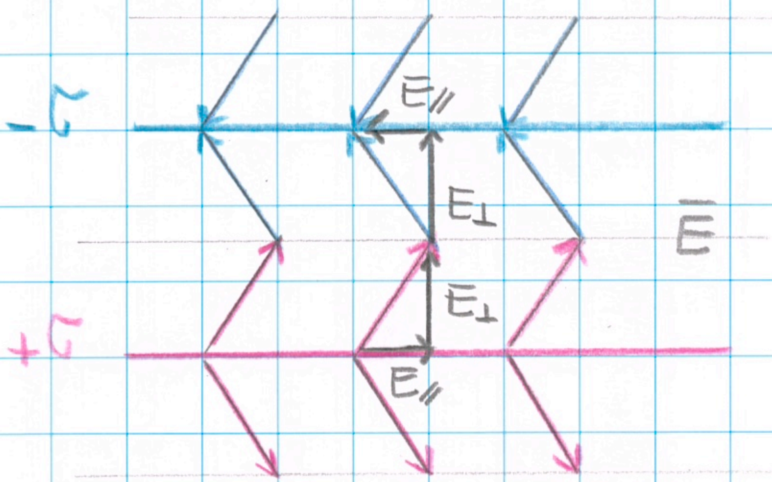


VOGLIAMO ORA CALCOLARE COME SI TRASFORMA IL CAMPO $\bar{E}$ MISURATO IN S_0 NEL SISTEMA S. IN S_0 IL CONDENSATORE E' FERMO E IL CAMPO E_0 E' $/\!/ \hat{y}_0$ $\Rightarrow$

$\bar{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \hat{y}$. LA CARICA TOTALE E' INVARIANTE COSÌ COME w ($\perp$ A $\bar{V}_0$) MA l_0 SI CONTRAE DI UN FATTORE $\frac{1}{\gamma_0} = \sqrt{1-(V_0/c)^2} \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{w\, l_0/\gamma_0}$

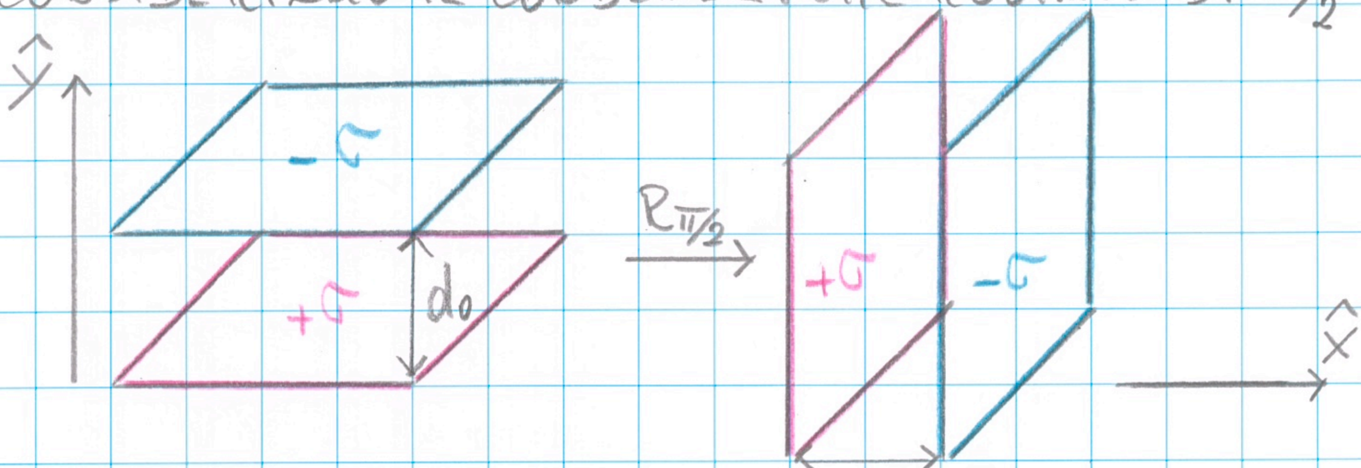
$\sigma_0 = \frac{Q}{w\, l_0} \Rightarrow \sigma_0 \cancel{w\, l_0} = \sigma \cancel{w\, l_0} \frac{1}{\gamma_0} \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \gamma_0$

$\Rightarrow$ LA COMPONENTE $\perp$ DI $E^{\perp} = \gamma_0 E_0^{\perp}$. NEL CASO IPOTETICO CHE SI OSSERVI UN'EFFETTO DI TRASCINAMENTO DEL CAMPO OSSERVIAMO LA SEGUENTE FIGURA



COME SI NOTA LE COMPONENTI // ALLE PIASTRE SI ANNULLANO MENTRE QUELLE $\perp$ SI SOMMANO.

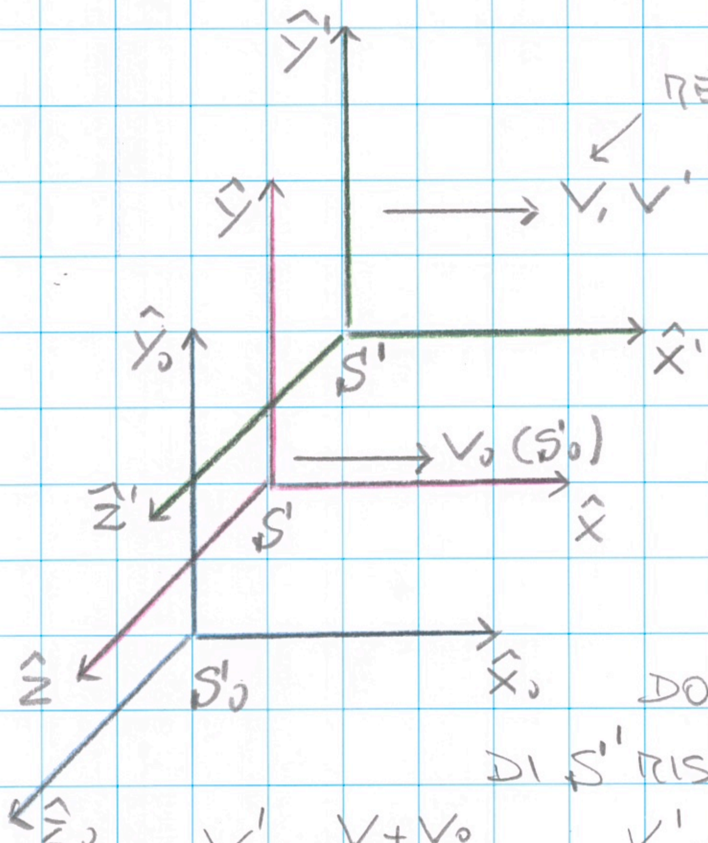
PER CALCOLARE LA COMPONENTE // DEL CAMPO CONSIDERIAMO IL CONDENSATORE RUOTATO DI $\pi/2$



IN QUESTA CONFIGURAZIONE E' LA DISTANZA TRA LE PIASTRE CHE SI CONTRAE, MA IL CAMPO DI UN CONDENSATORE NON DIPENDE DA d, $\Rightarrow \underset{S}{E^{\parallel}} = \underset{S_0}{E_0^{\parallel}} \Rightarrow$

NATURALMENTE QUESTE RELAZIONI NON COMPLETANO LA TRASFORMAZIONE DEI CAMPI DATO CHE UN OSSERVATORE VEDE DELLE CARICHE IN MOTO SI

RENDE NECESSARIO CONSIDERARE OLTRE CHE IL CAMPO $E_y = \sigma/\varepsilon_0$ ANCHE IL CAMPO MAGNETICO DOVUTO ALLE CORRENTI SUPERFICIALI $\bar{K}_\pm = \mp \sigma v_0 \hat{x}$. DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA IL CAMPO MAGNETICO GENERATO DA QUESTE CORRENTI È DIRETTO COME $-\hat{z}$ E IL SUO MODULO È DATO DALLA LEGGE DI AMPÈRE $B_z = -\mu_0 \sigma v_0$. SE ORA CONSIDERIAMO UN TERZO S.d.R. S' IN CONF. STANDARD CON I PRIMI DUE E CHE VIAGGIA A $\bar{v}$ RISPETTO A S VERSO DESTRA



ALLORA I CAMPI SAREBBERO

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \quad B'_z = -\mu_0 \sigma' v'$$

DOVE v' È LA VELOCITÀ DI S' RISPETTO A S_0. $\Rightarrow$

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + v v_0 / c^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad \sigma' = \gamma' \sigma_0$$

ORA DOBBIAMO ESPRIMERE $\bar{E}'$ E $\bar{B}'$ IN TERMINI DI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ (RISPETTO A S). PER FARE QUESTA TRAS. RICORDIAMO CHE $\sigma = \gamma_0 \sigma_0$ E $\sigma' = \gamma' \sigma_0 \Rightarrow \sigma' = \frac{\gamma'}{\gamma_0} \sigma \Rightarrow$

$E'_y = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$; $B'_z = -\left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \mu_0 \sigma v'$. D'ALTRA PARTE

$$\gamma'/\gamma_0 = \sqrt{1-V_0^2/c^2}\Big/\sqrt{1-V'^2/c^2} = \frac{1+VV_0/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \gamma\left(1+\frac{VV_0}{c^2}\right)$$

CON $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow E'_y = \gamma\left(1+\dfrac{VV_0}{c^2}\right)\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} =$

$$= \gamma\left(1+\varepsilon_0\mu_0 V V_0\right)\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma\Big(E_y + \underbrace{(\mu_0 V_0 \sigma)}_{B_z}V\Big) = \gamma\left(E_y - VB_z\right)$$

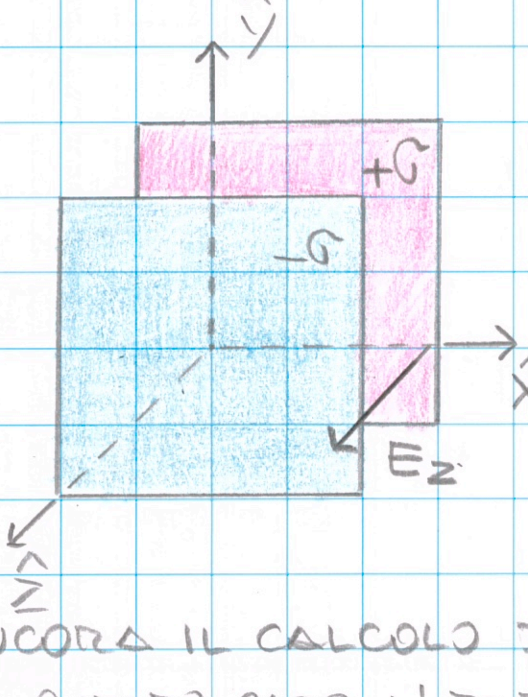
MENTRE $B'_z = -\gamma\left(1+\dfrac{VV_0}{c^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{VV_0}{c^2}}\right)(V+V_0)\mu_0\sigma =$

$$= \gamma\left(B_z - V\mu_0\sigma\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right) = \gamma\left(B_z - V\mu_0\varepsilon_0 E_y\right) = \gamma\left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \dfrac{V}{c^2}E_y\right)\end{cases}}$$

PER CALCOLARE LE COME SI TRASFORMANO E_z E B_y USIAMO LO STESSO PROCEDIMENTO MA CON LE PIASTRE DEL CONDENSATORE // AL PIANO (x,y) COSÌ OTTENIAMO PARTENDO DA

$E_z = \sigma/\varepsilon_0$, $B_y = \mu_0\sigma V_0$

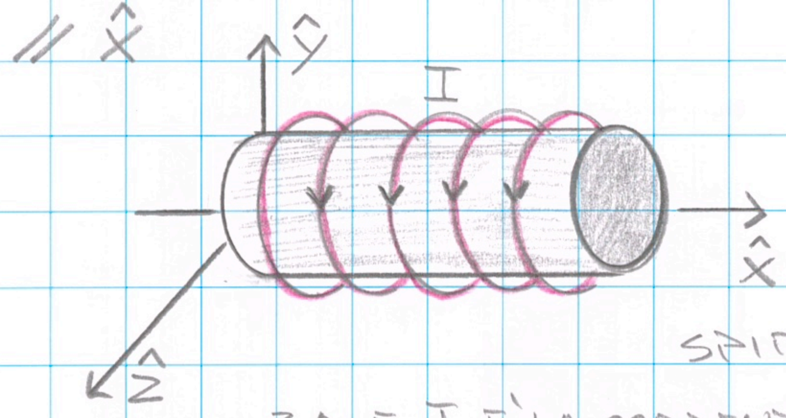


$$E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right)$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z\right)$$

MENTRE AVEVAMO GIÀ VISTO CHE $E'_x = E_x$. TUTTAVIA, MANCA ANCORA IL CALCOLO DI COME SI TRASFORMA B_x. IN QUESTO CASO L'ESEMPIO DEL CONDENSATORE NON È UTILE POICHÉ IN QUALSIASI CONFIGURAZIONE NON CI DÀ COMPONENTI DI B_x.

PER QUESTO RICORRIAMO A UN SOLENOIDE CON L'ASSE $// \hat{x}$



SE CONSIDERIAMO UN SOLENOIDE COME IN FIGURA $B_x = \mu_0 n I$ DOVE n È IL NUMERO DI SPIRE PER UNITÀ DI LUNGHEZZA E I È LA CORRENTE. IN S' LA LUNGHEZZA SI CONTRAE $\Rightarrow$ n AUMENTA $n' = \gamma n$. D'ALTRA

IN S' IN S

PARTE IL TEMPO SI DILATA, L'OROLOGIO IN S' (SOLIDALE CON IL SOLENOIDE È PIÙ LENTO $\Rightarrow I' = \frac{1}{\gamma} I \Rightarrow$
$B'_x = \mu_0 \cancel{\gamma} n \cdot \frac{I}{\cancel{\gamma}} = B_x$. CON QUESTO ABBIAMO DIMOSTRATO LE RELAZIONI DI PAG. 1, 2, 3 DI PAG. 400.