

Crisi della meccanica classica e avvento della meccanica quantistica

Roberto Valandro

Università degli Studi di Trieste - Dipartimento di Fisica
Corso di Laurea in Fisica
Il Anno II Semestre

[Ref: G.Sartori, “Lezioni di Meccanica Quantistica”, Ed. Libreria Cortina Padova;
S. Forte e L. Rottoli, “Fisica Quantistica”, Ed. Zanichelli]

Introduzione - Stato delle cose

Interazione tra teoria ed esperimento:

- ✧ Necessità di andare oltre una teoria ben affermata inizia quando tale teoria non spiega qualche esperimento.
- ✧ In questo caso, necessario cercare una nuova teoria, che predica anche risultati già verificati della vecchia teoria.
- ✧ La nuova teoria predice anche fenomeni non ancora osservati, che devono essere testati in laboratorio.

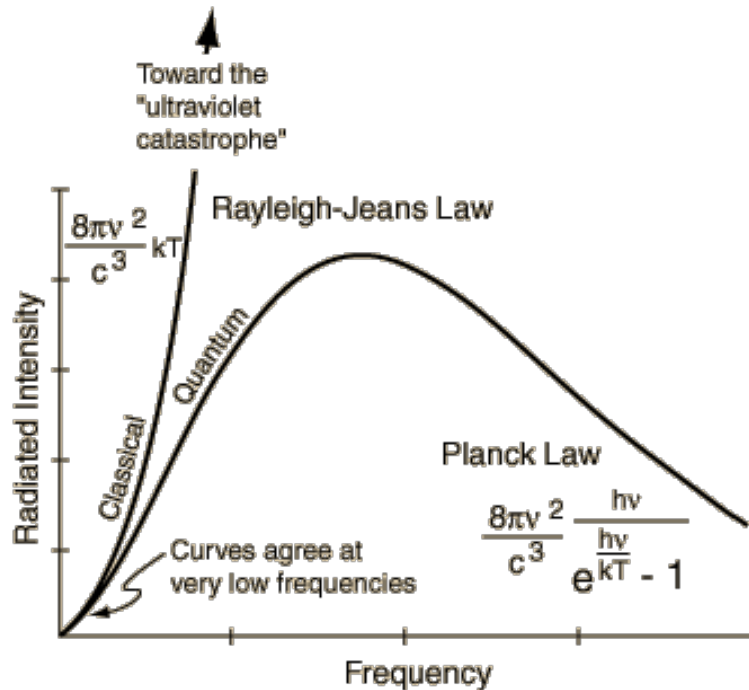
Situazione alla fine del IXX sec

- 1) C'erano tre teorie che funzionavano: meccanica Newtoniana, meccanica statistica/termodinamica e l'elettromagnetismo di Maxwell.
- 2) C'era una chiara distinzione tra particelle e onde.
Esperimenti di diffrazione da cristalli provarono la natura ondulatoria dei raggi-X; la natura particellare dell'elettrone da esperimento di Thomson.

I problemi iniziano quando nuovi fenomeni non possono essere spiegati dalle teorie vigenti.

Irraggiamento del corpo nero

- **Corpo nero**: assorbe totalità della radiazione che riceve.
- La **distribuzione spettrale** dell'irraggiamento elettromagnetico del corpo nero era stata misurata a fine 1800 e risultata insanabilmente **in disaccordo con le previsioni teoriche della termodinamica statistica** (catastrofe ultravioletta).



Irraggiamento del corpo nero

Nel 1900 *Planck* ottiene una curva corretta di emissione, assumendo che gli **scambi di energia fra materia e radiazione potessero avvenire solo per quantità discrete e indivisibili (*quanti*)**:

$$E_\nu = h\nu$$

- La costante h (*costante di Planck*) ha le dimensioni di un'azione:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571800(13) \times 10^{34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

- Sembrava resuscitare vecchia teoria corpuscolare della luce: spiegazione di Planck fu male accolta all'inizio.

Effetto fotoelettrico

All'inizio del 1900 si sapeva sperimentalmente che se la luce (visibile o UV) incide su un metallo alcalino, causa **emissione di elettroni**:

- ▶ **Energia cinetica** di e^- espulsi è **indipendente da intensità** della radiazione incidente.
- ▶ Energia cinetica di e^- **dipende da frequenza ν** della radiazione incidente: quando $\nu < \nu_{\text{soglia}}$ il fenomeno non si manifesta; sopra la soglia, l'energia cinetica è $\propto \nu$.
- ▶ L'emissione inizia dall'istante in cui la radiazione colpisce la superficie metallica (Meyer-Gerlach, 1994).

Per la teoria classica, qualitativamente e^- assorbono con continuità energia dalla radiazione incidente fino a raggiungere energia cinetica maggiore alla barriera di potenziale che li intrappola nel metallo. Ma:

- 1) perché con sufficiente intensità di radiazione non si riesce ad estrarre, indipendentemente da ν ?
- 2) perché energia di e^- espulsi non aumenta con intensità di radiazione?

Effetto fotoelettrico

Nel 1905 A. Einstein suggerisce che :

- 1) Fascio di luce monocromatico a frequenza ν è formato da **corpuscoli d'energia $h\nu$ detti fotoni**.
- 2) Interazione della luce con la materia consiste in processi di **assorbimento ed emissione di interi fotoni**: scambi di energia solo per quantità *discrete*.
- 3) Detto W lavoro necessario ad estrarre e^- dal metallo, energia cinetica dopo espulsione è

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W \quad \text{dove } h \text{ è cost di Planck}$$

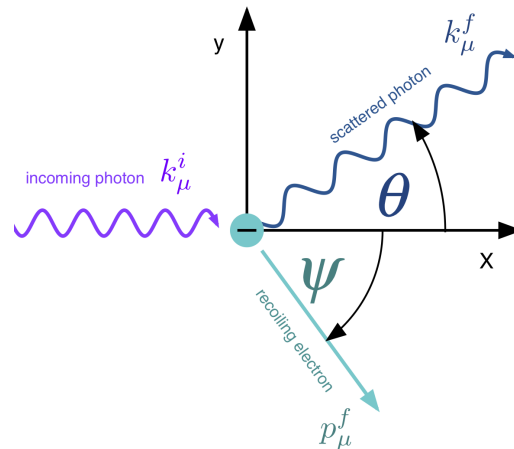
Spiegato

- Effetto soglia.
- Energia cinetica $\propto \nu$.
- Intensità radiazione \propto numero di e^- espulsi.

Effetto Compton

Nel 1924 Compton esegue misure su diffusione di raggi-X da e^- liberi (o debolmente legati) e rileva

$$\lambda_{\text{diffusa}} - \lambda_{\text{incidente}} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$



Tale formula si giustifica, in meccanica relativistica, se si assume **urto elastico fra e^- e fotone**, corpuscolo di massa nulla ed energia $h\nu$.

Ricordiamo $m^2 c^4 = E^2 - \vec{k}^2 c^2$ che per $m = 0$:

$$|\vec{k}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Effetto Compton

Allora da leggi di conservazione di energia e quantità di moto:

$$\begin{cases} \vec{k}^i = \vec{k}^f + \vec{p}^f \\ m_e c^2 + c|\vec{k}^i| = \sqrt{|c\vec{p}^f|^2 + (m_e c^2)^2} + c|\vec{k}^f| \end{cases}$$

Dalla prima eq si ricava

$$|\vec{p}^f|^2 = |\vec{k}^i|^2 + |\vec{k}^f|^2 - 2\vec{k}^i \cdot \vec{k}^f = |\vec{k}^i|^2 + |\vec{k}^f|^2 - 2|\vec{k}^i||\vec{k}^f| \cos \theta$$

Sapendo che per i fotoni $|\vec{k}| = \frac{h\nu}{c}$, otteniamo

$$|c\vec{p}^f|^2 = (h\nu^i)^2 + (h\nu^f)^2 - 2h^2\nu^i\nu^f \cos \theta$$

Mettendo nella seconda eq e svolgendo i conti e usando $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\nu^f = \frac{\nu^i}{1 + \frac{h\nu^i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad \longleftrightarrow \quad \lambda^f = \lambda^i + \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

Effetto Compton

$$\nu^f = \frac{\nu^i}{1 + \frac{h\nu^i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad \longleftrightarrow \quad \lambda^f = \lambda^i + \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

Disaccordo con teoria classica di Lorentz:

- ▶ e^- assorbe radiazione e la riemette con stessa ν nel sistema di riferimento dell' e^- a riposo.
- ▶ Emissione in tutte le direzioni (momento nullo), mentre radiazione incidente trasferisce con continuità parte del proprio impulso a e^- .
- ▶ Questo accelera in direzione della radiazione incidente e per effetto Doppler frequenze emesse da elettrone appaiono in sistema di riferimento del laboratorio diverse da frequenza incidente.
- ▶ Ma effetto diventerebbe arbitrariamente piccolo per intensità sufficientemente basse della luce incidente, indipendentemente da λ .

Dualità onda-corpuscolo

- ▶ A livello macroscopico la teoria ondulatoria era ok, ma a livello microscopico si manifestava una natura corpuscolare.
- ▶ Visibile con esperimento di interferenza. **Luce su schermo localmente produce chiazze di assorbimento**, ma in un tempo 'lungo' si vedono semplicemente delle frange.
- ▶ L'annerimento è proporzionale all'intensità della luce incidente, ma anche al numero di fotoni che arrivano, cioè alla **probabilità che il fotone arrivi là**. Cioè

$$\text{Intensità} \propto \text{probabilità}$$

Dualità onda-corpuscolo:

La **distribuzione statistica** dei fotoni nello spazio segue un comportamento **ondulatorio**, mentre il modo di **scambiare energia e impulso** all'atto della rivelazione è **corpuscolare**.

Nota: leggi di conservazione di quantità di moto ed energia, che dipendono dalle proprietà di simmetria dello spazio e del tempo, rimangono valide.

Onde di materia

Abbiamo visto che la luce ha natura sia ondulatoria che particellare.

De Broglie (1923), fede nell'universalità, formula l'ipotesi che le **particelle materiali possano manifestare comportamento ondulatorio**

↪ a una particella di energia E e impulso \vec{p} andava associata un'onda piana monocromatica

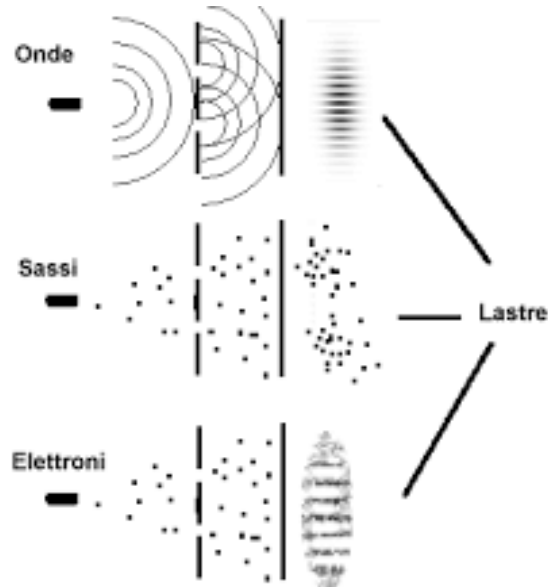
$$\Psi_t(\vec{x}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}$$

t.c. $E = h\nu = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, per cui

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{h}{|\vec{p}|}$$

- Grano di polvere: $d = 1\mu m$, $v = 1mm/s$, $m = 10^{-25}kg \Rightarrow \lambda = 6.6 \cdot 10^{-6}A$.
- Elettrone: $m_e = 0.9 \cdot 10^{-30}kg$ accelerato da $V \geq 100V \Rightarrow \lambda \sim \lambda_{\text{raggi-X}}$ (stessi fenomeni di diffrazione).

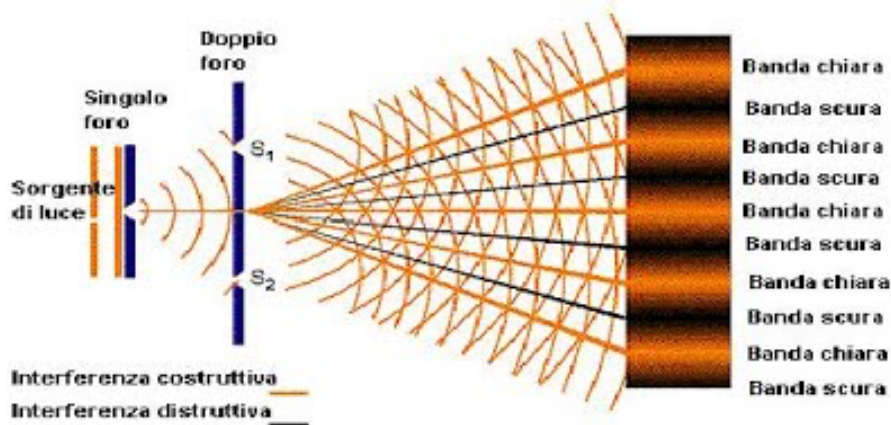
Fenditure di Young



L'esperimento viene compiuto in tre casi

- A) Sorgente emette onde sferiche classiche (per es. superficie liquido).
- B) Sorgente emette corpuscoli classici in direzioni causali.
- C) Sorgente emette particelle quantistiche (per es. elettroni, con opportuna distanza tra le fenditure).

Fenditure di Young. A) onde classiche



Ampiezza d'onda $A_1(x)$, $A_2(x)$, A_{1+2} , con relazione

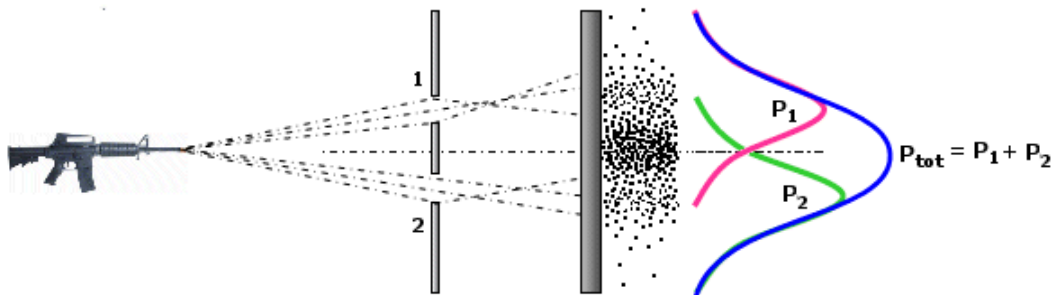
$$A_{1+2}(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

Intensità è data da modulo quadro, $I = |A|^2$ e $A = |A|e^{i\theta}$:

$$I_{1+2}(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)I_2(x)} \cos(\theta_1(x) - \theta_2(x))$$

- ▶ Energia arriva in maniera continua sullo schermo.
- ▶ Fenomeni di interferenza.

Fenditure di Young. B) corpuscoli

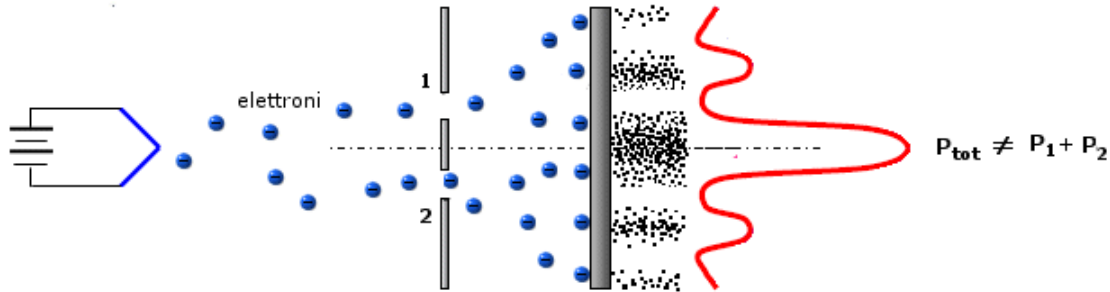


- * Corpuscoli emessi in direzioni casuali.
- * Se chiudiamo uno dei due fori, distribuzione data da $p_1(x)$ o $p_2(x)$.
- * Se entrambe fenditure aperte, distribuzione è

$$p_{tot}(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

- ▶ Energia arriva sullo schermo in maniera localizzata.
- ▶ Non ci sono fenomeni di interferenza.

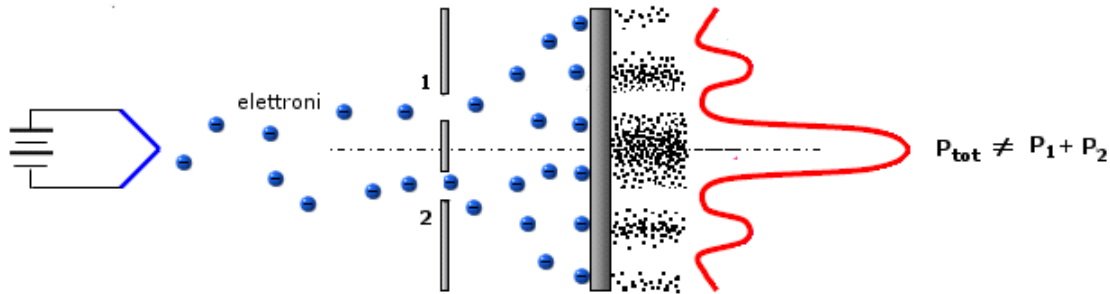
Fenditure di Young. C) elettroni



Si osservano frange di interferenza, anche se energia localizzata.

- 1) Se **ostruisco entrambe fenditure**, nessun segnale sullo schermo \Rightarrow **le particelle passano necessariamente per qualche fenditura**.
- 2) Quando **apro una sola fenditura**, se la sorgente non è troppo intensa, particelle provocano **scariche singole** e danno **distribuzione statistica simile al caso B)**. Si può affermare che **particelle passano per la fenditura aperta** (sorgente di elettroni vicino a fenditura).

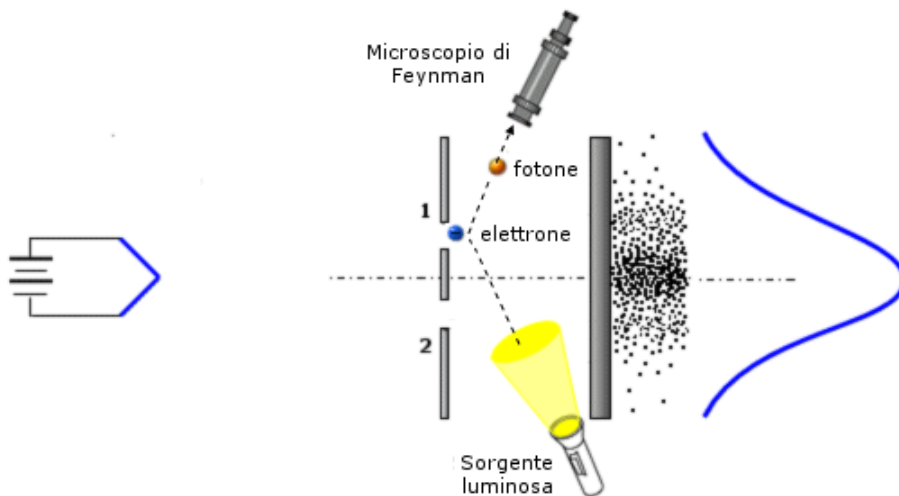
Fenditure di Young. C) elettroni



Si osservano frange di interferenza, anche se energia localizzata.

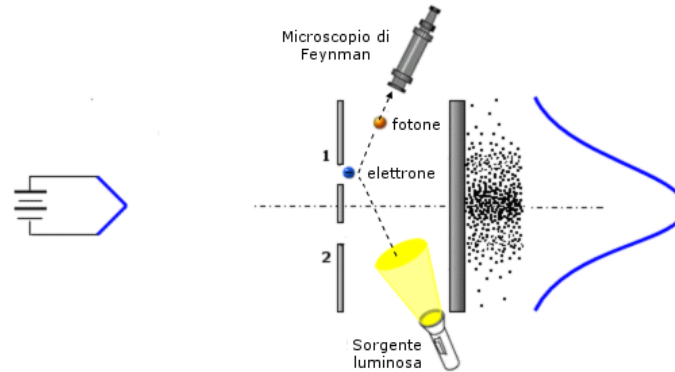
- 3a) Quando **entrambe fenditure aperte**, ancora **singole scariche**, ma **distribuzione statistica come caso A)**. C'è interazione tra elettroni?
- 3b) Si **riduce intensità sorgente finché particelle emesse una alla volta** (**no interazione tra elettroni**). Questo non modifica frange interferenza. Se ne deduce che **le particelle interagiscono con lo schermo in modo corpuscolare ma si distribuiscono secondo legge statistica tipicamente ondulatoria**.

Fenditure di Young. C) elettroni



- 4a) Se quando le fenditure sono entrambe aperte **si cerca di stabilire attraverso quale passa** (sorgente di fotoni in prossimità di una fenditura), ogni **fenomeno di interferenza viene annullato**, e ritrovo distribuzione del caso B).

Fenditure di Young. C) elettroni



4b) Riduco energia trasportata da fascio di fotoni, ma:

- o riduciamo intensità, ma allora pochi elettroni vengono colpiti (e non sappiamo posizione dei più),
- o riduciamo ν , aumentando λ , ma si peggiora la definizione delle particelle viste fino a perdere info di quale fenditura siano passate.

Non è possibile stabilire la traiettoria di una percentuale rilevante di particelle che arrivano sullo schermo, senza alterare la figura di interferenza.

Esperimento compiuto da Zehinger inizio XXI sec, con molecole di fullerene (C_{60})

F fenditure di Young. Conclusioni (I)

Stessi risultati se esperimento fatto con elettroni o fotoni. Ottenuti stessi aspetti di comportamento quantistico:

- *Dualità onda-corpuscolo*: materia e radiazione presentano sia aspetti corpuscolari (localizzazione e quantizzazione degli scambi di energia e impulso) che ondulatori (interferenza nelle distribuzioni statistiche delle particelle nello spazio). Gli aspetti di corpuscolo e onda sono complementari (si manifestano in alternativa a seconda di come il sistema viene sollecitato).
- *Principio di indeterminazione di Heisenberg*: È impossibile determinare simultaneamente e con esattezza posizione e componente dell'impulso lungo stesso asse di riferimento: 'variabili dinamiche incompatibili'.
- *Effetti di misure sugli stati di una particella*: Misura altera stato di una particella quantistica e non è possibile eliminare la perturbazione senza perdere le informazioni ottenibili dalla misura stessa.

Fenditure di Young. Conclusioni (II)

Ripetizione dell'esperimento porta sempre alla stessa distribuzione di probabilità: quindi **la probabilità è governata da una legge fisica**. Tuttavia in ogni evento **il punto in cui la particella viene rilevata è casuale**. Siamo quindi portati a concludere che ciò che caratterizza lo stato del sistema è la distribuzione dei possibili risultati della misura.

Quindi:

- I sistemi quantistici hanno comportamento intrinsecamente **casuale**: non possiamo determinare a priori quale sia risultato della misura; solo la distribuzione di probabilità dei risultati è una proprietà fisica del sistema.
- I sistemi sono caratterizzati da uno **stato**, che permette di calcolare la probabilità dei risultati delle misure.
- Lo stato del sistema si comporta come un'**onda**: sistemi composti da sottosistemi (due fenditure) soddisfano principio di sovrapposizione.

Fenditure di Young. Conclusioni (III)

Torniamo sulla **misura** (sistema interagisce con un apparato di misura):

- Quando si esegue una misura del sistema, il suo stato cambia “**collassando**”; finché il collasso non avviene, le diverse alternative interferiscono, ma dopo aver eseguito misura l’interferenza scompare.
- Lo **stato del sistema** rappresenta **l’informazione che noi abbiamo su di esso**. Quando osserviamo quale evento si è realizzato, l’informazione che abbiamo sul sistema cambia: avviene il collasso.
- Nel caso delle fenditure, possiamo predire probabilità che la singola particella colpisca un dato punto x dello schermo; questa probabilità è determinata dallo stato del sistema. Quando andiamo a misurare attraverso quale fenditura passa, **cambiamo stato del sistema** e infatti otteniamo una diversa distribuzione sullo schermo.

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

Esperimento: fascio di luce, formato da onde piane polarizzate (che avanzano nel verso positivo di asse z), viene fatto passare attraverso un analizzatore di polarizzazione A , che trasmette onde polarizzate lungo x , mentre assorbe quelle polarizzate lungo y .

- Ampiezza del campo elettrico incidente è

$$\vec{E}_{\text{in}} = \vec{\epsilon} e^{j(kz - \omega t)}$$

con $\vec{\epsilon}$ è polarizzazione che giace nel piano $x y$ (e $||\vec{\epsilon}||^2 \propto I_{\text{in}}$):

$$\vec{\epsilon} = \epsilon (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$$

- L'ampiezza del campo trasmesso è

$$\vec{E}_{\text{tr}} = \epsilon \cos \theta \vec{e}_x$$

per cui l'intensità del fascio trasmesso è

$$I_{\text{tr}} = \epsilon^2 \cos^2 \theta = I_{\text{in}} \cos^2 \theta$$

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

Cerchiamo di descrivere il fenomeno secondo la **meccanica quantistica**, considerando fascio di fotoni.

- ▶ Fotoni che passano l'analizzatore, raccolti da rivelatore posto dietro analizzatore.

- ▶ Per ogni singolo fotone ci sono due possibilità
 - 1) L'intero fotone **attraversa** l'analizzatore e il rivelatore registra l'arrivo di un intero fotone (risultato di misura pari a 1).
 - 2) L'intero fotone **viene assorbito** dall'analizzatore e il rivelatore non dà segnali (risultato misura pari a 0).

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

- ▶ Non è possibile a priori prevedere quali fotoni passano (tutti preparati allo stesso modo), ma possiamo dire che dopo un numero sufficientemente alto di passaggi, la frazione che passa sarà determinata da legge classica (**probabilità \propto intensità**):

$$\lim_{N_{\text{in}} \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{tr}}}{N_{\text{in}}} = \cos^2 \theta$$

- ▶ Un fotone polarizzato lungo asse x (o y) ha probabilità 1 (o 0) di essere trasmesso (**unici casi in cui risultato misura è predicibile con certezza** dalla conoscenza dello stato iniziale).

Se mettiamo su linea del fascio analizzatore B , pure orientato lungo x , esso vedrà uscire da A fascio di fotoni polarizzati lungo x .

⇒ Lo **stato** di ogni fotone viene drasticamente **modificato dalla misura**.

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

Estraiamo dall'esperimento i seguenti insegnamenti di carattere generale:

- 1) Lo strumento di misura dà uno spettro di possibili **valori (quantizzati) per la quantità misurata**, che chiameremo **autovalori**.
- 2) Ad ogni autovalore corrisponde un **autostato** del sistema, uno stato nel quale la misura della variabile dinamica dà con certezza come risultato l'autovalore corrispondente.
- 3) Gli autostati sono determinati dallo strumento di misura.
- 4) La misura modifica lo stato del sistema.
- 5) **Le sole previsioni che si possono fare sul risultato sono di tipo probabilistico**. Non è quindi lecito affermare che una variabile dinamica ha o aveva un certo valore, ma solo che una misura della variabile dinamica ha dato un certo risultato. **I valori delle variabili dinamiche non sono attributi dello stato, ma piuttosto potenzialità realizzate all'atto della misura**.
- 6) La probabilità di ottenere uno degli autovalori è il quadrato della componente del versore rappresentativo dello stato prima della misura nella direzione del versore rappresentativo dell'autostato corrispondente all'autovalore del risultato di misura: **regola di decomposizione spettrale**.

Misure di polarizzazione-decomposizione spettrale

È necessario rinunciare a una teoria che consenta di determinare gli stati dei sistemi fisici assegnando i valori di un insieme di variabili dinamiche fondamentali del sistema (p_h, q_h) .

Bisognerà accontentarsi di una teoria nella quale gli **stati** di un sistema sono **determinati dalla conoscenza delle distribuzioni statistiche dei possibili risultati di misure di un insieme di variabili dinamiche fondamentali del sistema.**

Onde di materia

Lo **stato** del sistema è dato da distribuzione di probabilità dei risultati di possibili misure, cioè da intensità di un'onda, ovvero dalla sua ampiezza Ψ .

il valore dell'**intensità dell'onda** associata a una particella è in ogni punto proporzionale alla **densità di probabilità** di trovare la particella in quel punto.

Prendiamo un'onda monocromatica $\Psi_t(\mathbf{x}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

- ▶ Si propaga in direzione \vec{k} , con lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$.
- ▶ I piani di fase costante $\varphi \equiv \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(k)t = \text{cost}$:
 - * sono $\perp \vec{k}$,
 - * si propagano con velocità di fase $v_\varphi = \frac{\omega(k)}{|\vec{k}|}$.

Difficile conciliare quest'onda con le proprietà di localizzazione del corpuscolo. Infatti

$$\left| e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \right| = 1 \quad \text{dovunque.}$$

Onde di materia

Rinunciamo all'idea che il corpuscolo abbia energia e impulso perfettamente definiti (così da trovare un compromesso e mantenere localizzazione):

Usiamo una **sovrapposizione lineare di onde piane di frequenze molte prossime a una fissata ν_0 : pacchetto d'onda** t.c.

- 1) supporto ad un certo istante t_0 contenuto in regione dello spazio arbitrariamente piccola;
- 2) per tempi limitati, regione R_t in cui funzione d'onda $\neq 0$ è piccola;
- 3) per sistema unidimensionale, la larghezza di R_t inversamente proporzionale alla larghezza dello spettro di valori k .

Definiamo

$$\Psi_t(\vec{x}) = \int d^3k \phi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(k)t)} \quad (1)$$

- ◇ Misura di integrazione $d^3k = dk_1 dk_2 dk_3$ è elemento di volume nello spazio tridimensionale delle componenti del vettore \vec{k} .
- ◇ $\phi(\vec{k})$ funzione complessa che pesa per ogni \vec{k} il contributo della relativa onda piana.
- ◇ Affinchè (1) sia ben definita, bisogna che $\int d^3k |\phi(\vec{k})|^2 < \infty$ (L^2).
- ◇ $\omega(k)$ è la frequenza proporzionale all'energia trasportata dall'onda piana.

Pacchetto d'onda

Esaminiamo funzione d'onda all'istante $t = 0$

$$\psi_0(\vec{x}) = \int d^3k \phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

- Con le ipotesi precedenti, l'integrale converge e definisce una **funzione $\psi_0(\vec{x})$ modulo quadro sommabile (L^2)**.
- La **trasformata di Fourier** è invertibile:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \psi_0(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

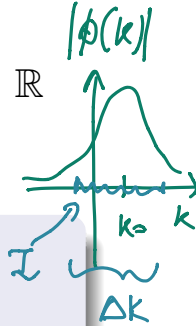
possiamo sempre scegliere $\phi(\vec{k})$ tale che $\psi_0(\vec{x})$ abbia supporto limitato (e di misura non-nulla).

- Per ragioni di regolarità, anche ψ_t (per tempi brevi) ha supporto limitato.

Pacchetto d'onda in 1 dimensione

Mettiamoci per semplicità in una dimensione, $\phi(k) = |\phi(k)| e^{i\alpha(k)}$:

$$\Psi_t(x) = \int_{\mathcal{I}} dk |\phi(k)| e^{i\varphi(k,x)} \quad \text{dove} \quad \varphi(k,x) = kx - \omega(k)t + \alpha(k) \in \mathbb{R}$$



Supponiamo che $|\phi(k)|$ abbia picco pronunciato in un intervallo \mathcal{I} di larghezza Δk centrato in k_0 e praticamente nullo fuori.

- ▶ *Re* e *Im* dell'integrando proporzionali a $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$
- ▶ Se numero di oscillazioni di integrando in \mathcal{I} è elevato, i contributi positivi e negativi si compensano \Rightarrow integrale ~ 0 .
- ▶ Se φ varia poco in \mathcal{I} , allora interferenza costruttiva. Questo si realizza per tutti i punti x t.c.

$$|\Delta\varphi| \lesssim \frac{\pi}{2} \approx 1 \quad (\text{variazione di } \varphi \text{ in } \mathcal{I})$$

Cioè, espandendo attorno a k_0

$$|\Delta\varphi| \approx |\varphi'(k_0)|\Delta k \approx |x - \omega'(k_0)t + \alpha'(k_0)|\Delta k \lesssim 1$$

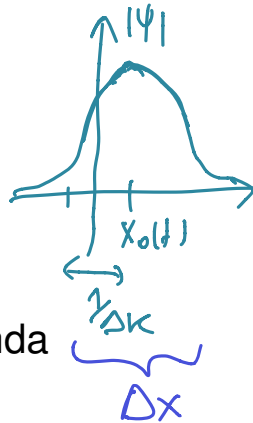
Pacchetto d'onda in 1 dimensione

Abbiamo detto $\Psi_t(x)$ diversa da zero per x t.c.

$$|\Delta\varphi| \approx |\varphi'(k_0)|\Delta k \approx |x - \omega'(k_0)t + \alpha'(k_0)|\Delta k \lesssim 1$$

Al tempo t , il valore di x per cui il modulo dell'integrale assume valore massimo, è il valore che rende stazionaria $\varphi(k)$ in k_0

$$x_0(t) = \omega'(k_0)t - \alpha'(k_0) \quad \rightarrow \quad \text{centro del pacchetto d'onda}$$



- ▶ Sostituendo in eq sopra, ampiezza d'onda $\psi(x) \neq 0$ diversa da zero per x t.c.

$$\Delta k \cdot |x - x_0(t)| \lesssim 1$$

Quindi intervallo delle x dove $\psi_t(x) \neq 0$ è uguale o maggiore di $\frac{1}{\Delta k}$, cioè

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 1$$

- ▶ Il centro del pacchetto d'onda si muove di moto $x_0(t)$. Quindi velocità

$$v_g = \dot{x}_0(t) = \omega'(k_0)$$

che va identificata con velocità della particella, cioè $v = \frac{p}{m}$.

Pacchetto d'onda in 1 dimensione

Quindi

$$v_g = \omega'(k_0) = \frac{p}{m}$$

Ipotizziamo che l'impulso della particella sia proporzionale a k_0 :

$$p = \alpha k_0 \quad \Rightarrow \quad \omega'(k_0) = \frac{\alpha k_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega(k_0) = \frac{1}{\alpha} \frac{p^2}{2m}$$

Se vogliamo che energia della particella, $E = \frac{p^2}{2m}$ sia, come per i fotoni, $E = \hbar\omega(k_0)$, si deve assumere che $\alpha = \hbar$ e quindi

$$p = \hbar k$$

Equazione di Schrödinger

Vogliamo trovare equazione differenziale di cui $\Psi_t(\vec{x})$ è soluzione.

Chiamiamo $\Psi_t(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x}, t)$

Finora abbiamo visto che $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$ e $\omega(k) = \frac{E}{\hbar} = \frac{\vec{p}^2}{2m\hbar}$.

Definiamo $\Phi(\vec{p}) \equiv \hbar^3 \phi\left(\frac{\vec{p}}{\hbar}\right)$. Quindi

$$\psi(\vec{x}, t) = \int d^3p \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}$$

Deriviamo rispetto a t :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \int d^3p E \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar} = \int d^3p \frac{\vec{p}^2}{2m} \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}$$

Calcoliamo il laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = \int d^3p \left(-\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} \right) \Phi(\vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar}$$

Quindi l'equazione cercata è $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t)$.

Equazione di Schrödinger

Abbiamo utilizzato relazione per la particella libera, cioè $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Per una particella in un campo di forze con potenziale $V(\vec{x})$ abbiamo

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

Allora l'equazione per la funzione d'onda diventa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t)$$

Questa è detta **equazione di Schrödinger**.