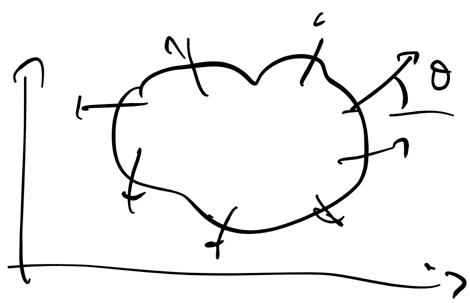
SISTEMI DINAMICI

26 maggio 2021

Piano delle fasi

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

- $I_\gamma(f)$: $f = (P, Q)$

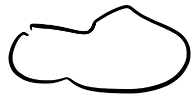
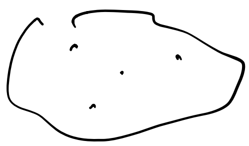


$\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$I_\gamma(f) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma \frac{P\,dQ - Q\,dP}{P^2 + Q^2}$$

→ invarianti per deformazioni

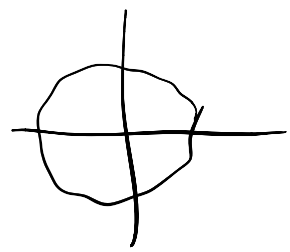
-  → $I_\gamma(f) = 0$
-  → $I_\gamma(f) = \sum_i I_{x_i}(f)$

- $I_\gamma(f) = +1$
  γ orbita periodica

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 = P(x,y) \\ \dot{y} = 2xy = Q(x,y) \end{cases}$$

punto critico $(0,0)$



$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$$I_C(f) = \frac{1}{2\pi}\oint_C d\theta$$

$P(x,y) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$Q(x,y) = 2\cos\theta\sin\theta$

$$dP(x,y) = -4\cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$dQ(x,y) = 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$I_c(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P\,dQ - Q\,dP}{Q^2+P^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 8\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 + (2\cos\theta\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\, \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 + 4\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 + 4\cos^2\theta\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= +2$$

$$z = x+iy \longrightarrow \begin{cases} P = \mathrm{Re}\, z^2 \\ Q = \mathrm{Im}\, z^2 \end{cases}$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$T \quad \begin{cases} \dot{x} = \mathrm{Re}\, z^n \\ \dot{y} = \mathrm{Im}\, z^n \end{cases} \qquad I_\gamma(f) = +n$$

<u>Teorema</u> (Poincaré – Bendixon)

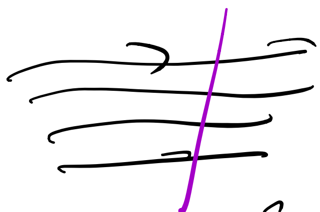
Sia φ_t un flusso in $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$

un sottoinsieme chiuso, limitato e invariante in avanti.

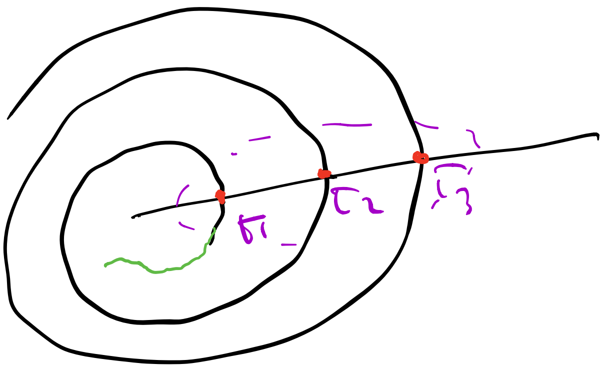
Allora $\forall x \in D$, l'insieme $\omega(x)$

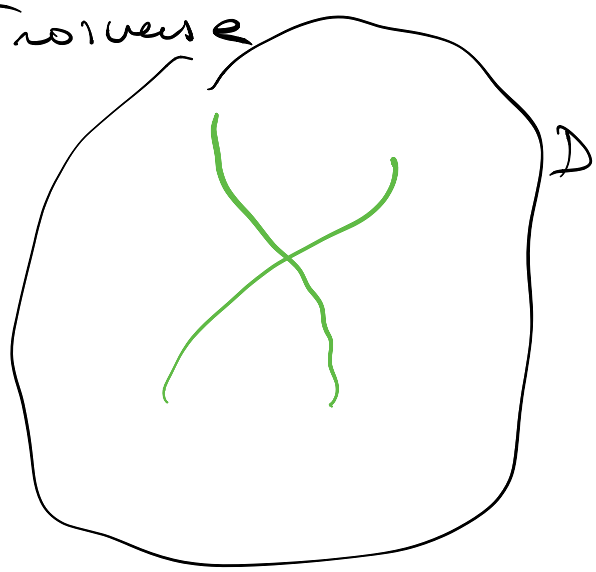
- o contiene un punto di equilibrio
- o è una traiettoria periodica

Idea principale



S sezione trasversa



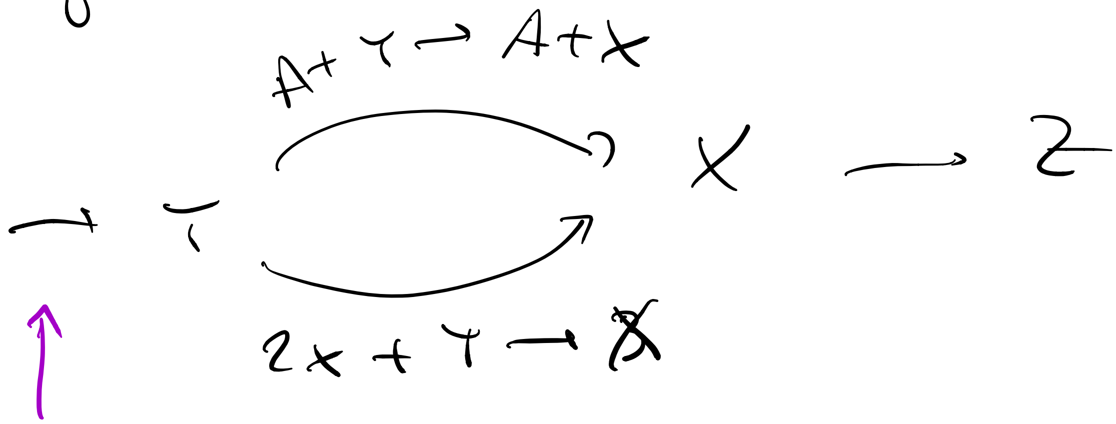


[$\mathbb{R}^2$]

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} = b - ay - x^2 y \end{cases} \qquad a > 0, \quad b = \frac{1}{2}$$

Modello semplificato della reazione di glicolisi



$A + Y \longrightarrow A + X$ rimuove $-ay$ a $\dot{y}$

aggiunge $+ay$ a $\dot{x}$

$2X + Y \longrightarrow 3X$

$$\dot{y} = -x^2 y$$
$$\dot{x} = +x^2 y$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} = \frac{1}{2} - ay - x^2 y \end{cases}$$

- Punti stazionari

$$\begin{cases} -x + ay + x^2 y = 0 \\ \frac{1}{2} - ay - x^2 y = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4a+1}\right)$$

· Stabilità

$$\text{Jac} = \begin{pmatrix} -1+2xy & x^2+a \\ -2xy & -(x^2+a) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jac}\Big|_{(x^*,y^*)} = \begin{pmatrix} -1+y^* & \frac{1}{2}\frac{1}{x^*} = \frac{1}{2y^*} \\ -y^* & -\frac{1}{2y^*} \end{pmatrix}$$

$$\det \text{Jac}\Big| = \frac{1}{2y^*} > 0$$

$$\text{Tr Jac} = -1+y^* - \frac{1}{2y^*} \quad \begin{matrix} <0 & \text{stabile} \\ >0 & \text{instabile} \end{matrix}$$

Voglio $\text{Tr Jac} > 0$

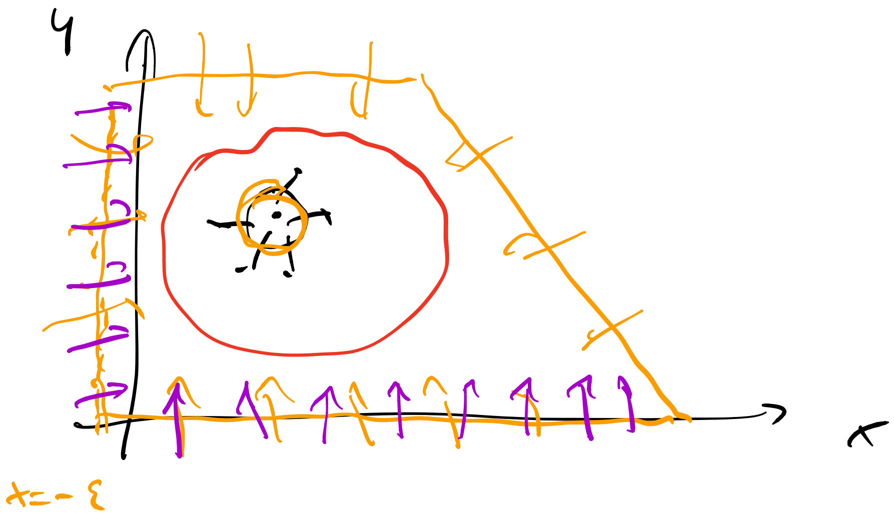
$$1 + \frac{1}{2y^*} - y^* < 0 \qquad y^* = \frac{2}{4a+1}$$

$$1 + \frac{4a+1}{4} - \frac{2}{4a+1} < 0$$

$$4(4a+1) + (4a+1)^2 - 8 = 16a^2 + 24a - 3 < 0$$

$$\hookrightarrow \quad 3 - 24a - 16a^2 > 0$$

Scelgo a piccolo $\rightarrow$ punto critico instabile.



$$\dot{x} = -x + ay + x^2 y$$
$$\dot{y} = \frac{1}{2} - ay - x^2 y$$

.) $y = 0 \longrightarrow \dot{y} = \frac{1}{2} > 0$

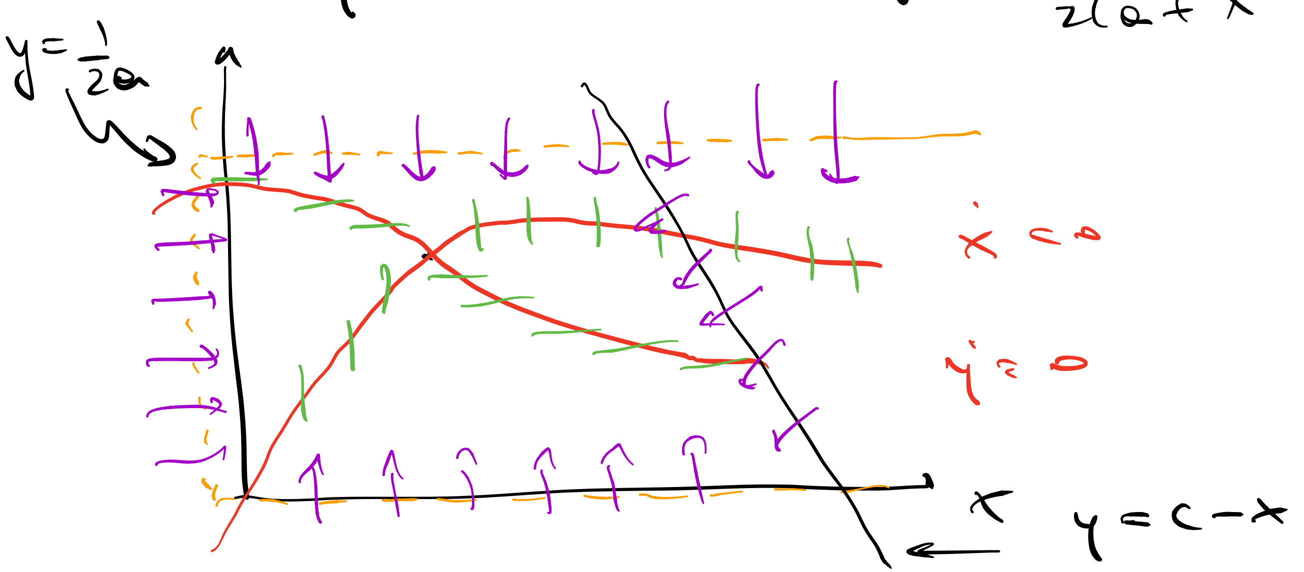
.) $x = -\varepsilon$ (>0) $\longrightarrow \dot{x} = \varepsilon + ay + \varepsilon^2 y$

$\dot{x} > 0$ se $y > 0$

.) isocline

$\dot{x} = 0 \longrightarrow y = \dfrac{x}{a + x^2}$ $\quad \dot{x} = 0$

$\dot{y} = 0 \longrightarrow y = \dfrac{1}{2(a + x^2)}$ $\quad \dot{y} = 0$



Si può vedere che $\dot{y}=0$: $y=\frac{1}{2(a+x^2)}$

ha un max a $y=\frac{1}{2a}$

Prendiamo $y=\frac{1}{2a}+\varepsilon$

$$\dot{y}=\frac{1}{2}-a\left(\frac{1}{2a}+\varepsilon\right)-x^2\left(\frac{1}{2a}+\varepsilon\right)=$$

$$=-a\varepsilon-\frac{x^2}{2a}-x^2\varepsilon<0$$

•) Notiamo

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+ay+x^2y\\ \dot{y}=\frac{1}{2}-ay-x^2y\end{cases}\longrightarrow\ \dot{x}+\dot{y}=-x+\frac{1}{2}$$

e quindi per $x>\frac{1}{2}$, $\dot{x}+\dot{y}<0$

Prendiamo una retta $x+y=c$

$F(x,y)=x+y-c \longrightarrow \dot{F}<0$ per $x>\frac{1}{2}$

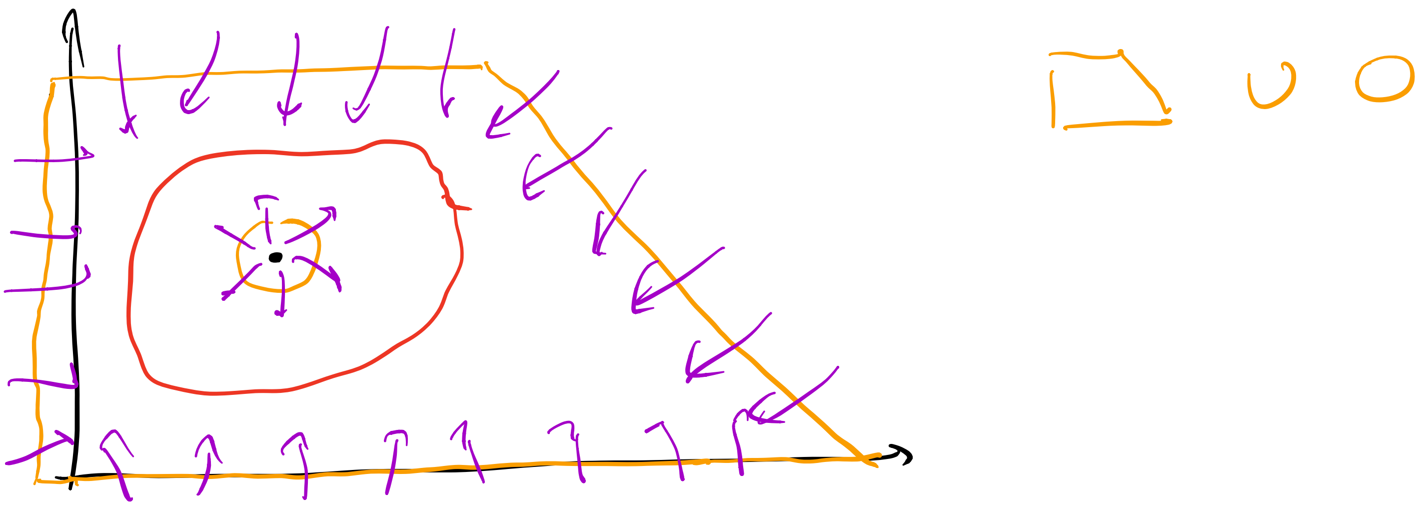
e quindi traiettorie sulla linea $x+y=c$ entrano in $\{(x,y)\mid F(x,y)<0\}$

Scegliamo c

$x + y = c$ interseca $y = \frac{1}{2a} + \varepsilon$

per $x = \frac{1}{2}$ $\qquad c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} + \varepsilon$

Allora



Slogan: non c'è caos in 2D

Dinamica caotica

Caos: sensitività rispetto ai dati iniziali

Transitività "vagare un po' ovunque"

<u>Def</u> Un flusso φ ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

su un insieme invariante X se

$\exists\ r$ finito tale che $\forall\, x \in X$

e $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\ y \in B_\varepsilon(x) \cap X$

tale che

$$|\varphi_\tau(x) - \varphi_\tau(y)| > r \quad \text{per qualche } \tau \geq 0$$

$\ulcorner$ $\dot{x} = Ax$, λ t.c. $Re(\lambda) > 0$

v autovettore

$$y = x + \varepsilon v$$

$$|\varphi_\tau(y) - \varphi_\tau(x)| \sim \varepsilon |v| e^{\lambda \tau}$$ $\lrcorner$

diremo che due orbite si separano esponenzialmente se

$$|\varphi_\tau(y) - \varphi_\tau(x)| \sim c\, e^{\lambda \tau}$$

<u>Def</u> Un flusso si dice topologicamente transitivo su un insieme invariante X se, dati: $U, V \subset X$

(aperti, non vuoti) $\exists\, \tau > 0$ tale

che $\varphi_\tau(U) \cap V \neq \emptyset$

<u>Def</u> Un flusso si dice caotico su un insieme invariante compatto $\bar{X}$ se

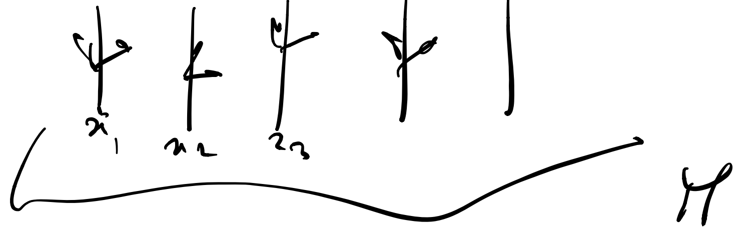
- è transitivo
- dipende in modo sensibile dalle condizioni iniziali

- questa def è preservata da coniugazione topologica

- φ su M $\leftarrow$ $x \in M$

  la struttura locale vicino a $x \in M$ è $T_x M$

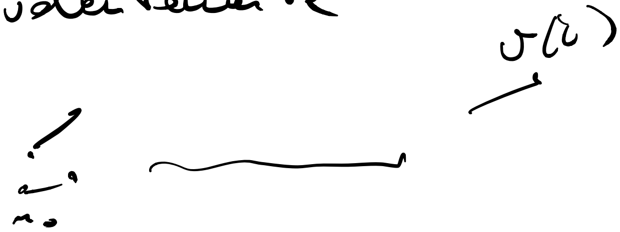
$$TM = \{ (x, v) : x \in M,\ v \in T_x M \}$$



$\varphi_\tau(x_0)$

$\varphi_\tau(x_0+\varepsilon v_0) \sim \varphi_\tau(x_0) + \varepsilon D_x \varphi_\tau(x_0)\, v_0 + \dots$

Equivalentemente



$$v(\tau) = D_x \varphi_\tau(x_0)\, v_0$$

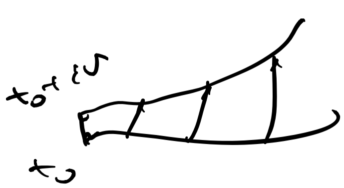
Vorremmo conoscere $v(\tau)$ al variare di τ — eq. diff per $v(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\varphi_\tau(x_0) + \varepsilon v(\tau)\right) \sim$$

$$f(\varphi_\tau(x_0)) + \varepsilon Df(\varphi_\tau(x_0))\, v(\tau) + \dots$$

↳ posso trovare eq diff per v

$$\dot v(\tau) = Df(\varphi_\tau(x_0))\, v(\tau)$$



l' eq. differenziale $\to$ è associata

a una matrice $\underline{\Phi}$ "matrice fondamentale"

$$\underline{\Phi} : T_x M \longrightarrow T_{\varphi_\tau(x)} M$$

quando è crescente $v(\tau)$

$$|\underline{\Phi}(\tau; x)\, v| \sim e^{\mu\tau} |v|$$

μ è detto esponente di Liapunov

dim $T_x M = n$ $\to$ n esponenti di Liapunov indipendenti!