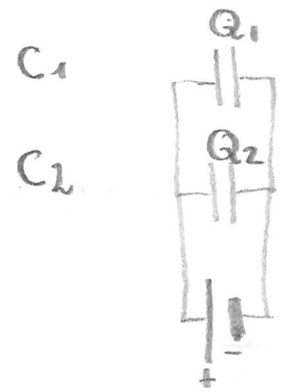
→ Condensatori in parallelo



$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ perché le armature dx (o sx) di C_1 e C_2 sono allo stesso pot.

Ceq deve accumulare $Q = Q_1 + Q_2$

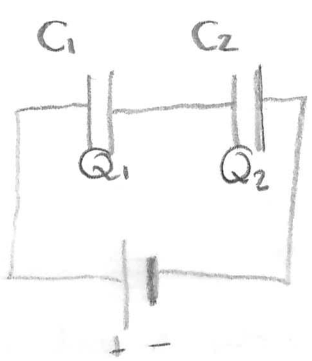
$$C_{eq} = Q/\Delta V = (Q_1 + Q_2)/\Delta V = Q_1/\Delta V + Q_2/\Delta V$$

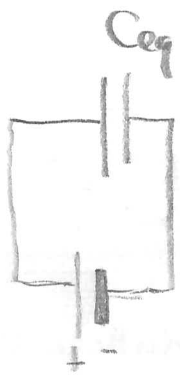
$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = C_1 \Delta V$$
$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = C_2 \Delta V$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

Per N condensatori in parallelo si ha $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N}$

→ Condensatori in serie





$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$

$Q_1 = Q_2 = Q$

perché l'armatura dx di C_1 e l'armatura sx di C_2 sono un conduttore neutro.

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \qquad \Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2}$$

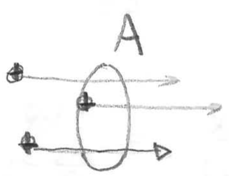
$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

e per N condensatori in serie $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$

→ Corrente elettrica continua

Si considera un moto di cariche elettriche (positive) che produce un flusso di carica netto attraverso una superficie A:



ΔQ è la quantità di carica che attraversa A in Δt

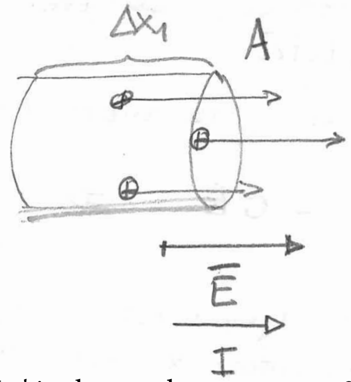
Definisco $I_m = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ intensità media di corrente elettrica

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{intensità di corrente elettrica}$$

L'unità SI per l'intensità di corrente elettrica è l'Ampere

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

I ha il verso del moto delle cariche positive ⊕, le quali si muovono spinte da un campo elettrico $\overline{E}$:



ATTENZIONE: per noi I non è un vettore; ma parliamo comunque di verso della corrente

NB: il modello che segue NON e' incluso nel programma 2020-2021 e viene lasciato come approfondimento

Sia n = numero di particelle cariche (positive) libere di muoversi per unità di volume

Δx_1 = tratto che ciascuna di queste particelle percorre in Δt

q = carica (qui assunta positiva) portata da ciascuna particella

v_d = velocità (costante) di deriva o di trascinamento con cui si muovono le particelle cariche; $v_d = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$

Allora: $\Delta Q = n\,\Delta x_1 A \cdot q$

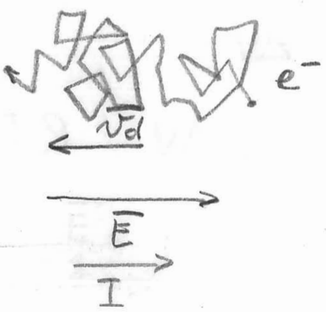
$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n\frac{\Delta x_1}{\Delta t}Aq = n v_d A q = I$$

Si definisce inoltre densità di corrente J:

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = n v_d q} \qquad (A)$$

In realtà nei conduttori:

- a muoversi sono gli e^-, che si muovono in verso opposto ad $\vec{E}$, ovvero dal potenziale più basso a quello più alto
- la v_d è il frutto di moltissime collisioni degli e^- liberi con gli atomi del conduttore



→ Leggi di Ohm. Nei conduttori in genere valgono:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \qquad (B)$$

conducibilità

densità di corrente considerata come vettore

$$\boxed{\vec{v}_d = \mu q \vec{E}} \qquad (C)$$

carica del portatore; per l'elettrone $q = -e$

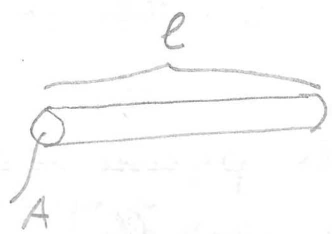
mobilità

Mettendo insieme queste equazioni (in modulo), dalla def. di J:

$$J = \frac{I}{A} \overset{(A)}{=} n v_d q \overset{(C)}{=} n \mu q^2 E \overset{(B)}{=} \sigma E \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = n \mu e^2}$$

Qui si ritorna al programma svolto

Le leggi di Ohm sono enunciate generalmente con riferimento al ΔV che si misura ai capi di un conduttore di sezione A e lunghezza ℓ:



1. $\boxed{\Delta V = R I}$

resistenza, si misura in Ohm

$$1\,\text{Ohm} = \frac{1\,V}{1\,A}$$

2. $\boxed{R = \rho \dfrac{\ell}{A}}$

resistività (o resistenza specifica)

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

coeff. termico di resistività.

(ulteriori approfondimenti)

Ricordando che per un campo $\vec{E}$ uniforme, $E = \dfrac{\Delta V}{\ell}$, si ha

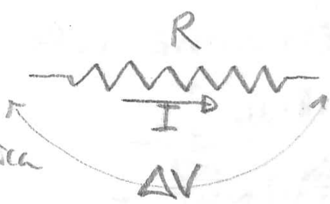
$$I = JA = \sigma E A = \sigma A \frac{\Delta V}{\ell}$$

$$\frac{\sigma A}{\ell} = \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{1}{\rho}}$$

confronto con 2.

programma svolto

→ Potenza trasferita ad un resistore (o resistenza)



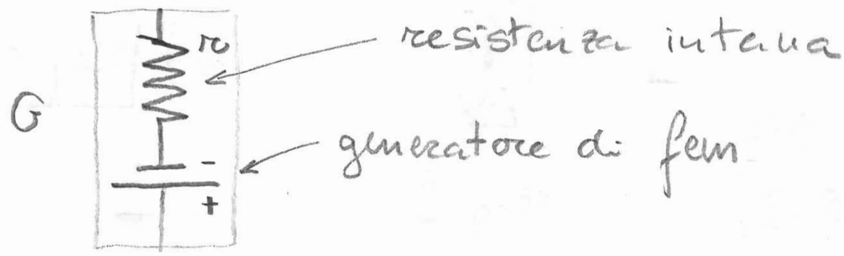
en. potenziale elettrica

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \, \Delta V}{\Delta t} = I \Delta V = R I^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

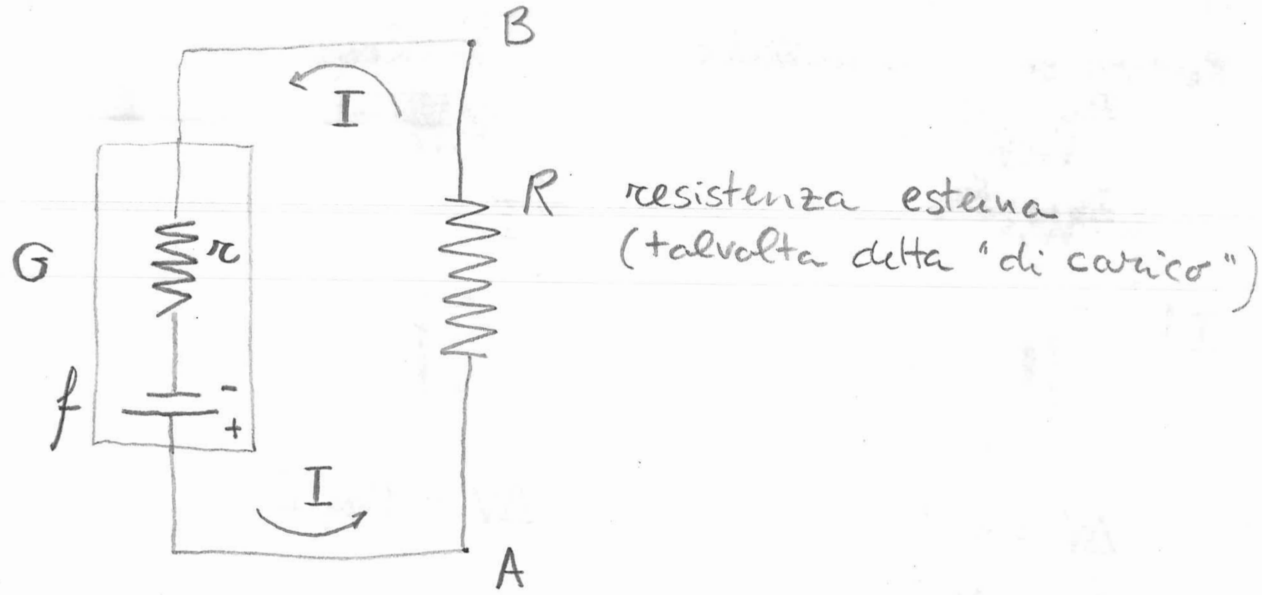
Circuiti in corrente continua

→ f.e.m (forza elettromotrice): lavoro (per unità di carica) che il generatore compie per far percorrere ad una carica positiva l'intero circuito. Simbolo f o $\mathcal{E}$.

- ⚠ non è una forza, si misura in $V = \frac{J}{C}$
- la fem coincide con la ddp che si può misurare ai capi del generatore quando questo NON eroga corrente.
- In effetti il generatore G può essere rappresentato così:



se uso il generatore G in un semplice circuito



$V_A - V_B = f - rI$ (passando per il generatore G)

$V_A - V_B = RI$ (passando attraverso R)

$f - rI = RI \qquad f = (r+R)I$

$$I = \frac{f}{r+R}$$

Riprendo:

$$f = (R+r)I$$

$$I = \frac{f}{R+r}$$

se $R \gg r$

$$f \cong RI = \Delta V$$

generatore di tensione
(la ddp. non dipende da I)

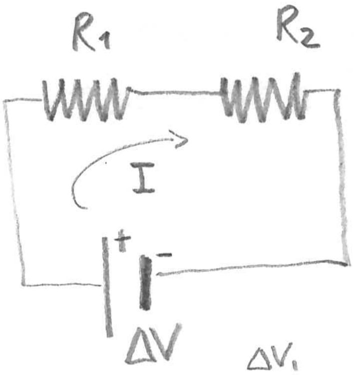
se $R \ll r$

$$I = \frac{f}{r}$$

generatore di corrente
(la I non dipende da ddp)

(da qui alla fine: argomenti in programma)

→ Resistenze in serie



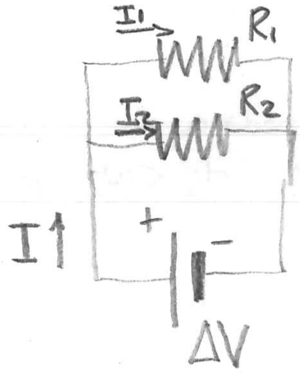
$$\Rightarrow \boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

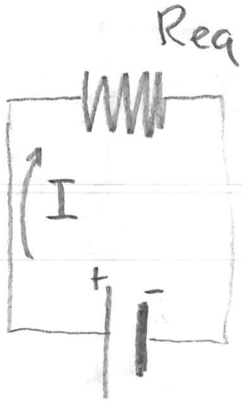
$$\Delta V = \underbrace{R_1 I_1}_{\Delta V_1} + \underbrace{R_2 I_2}_{\Delta V_2} = R_{eq} I$$

$$= (R_1 + R_2) I$$

poiché $I_1 = I_2 = I$

→ Resistenze in parallelo





$$\Delta V_1 = R_1 I_1$$

$$\Delta V_2 = R_2 I_2$$

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

$$\Delta V = R_{eq} I$$

$$I_1 + I_2 = I$$

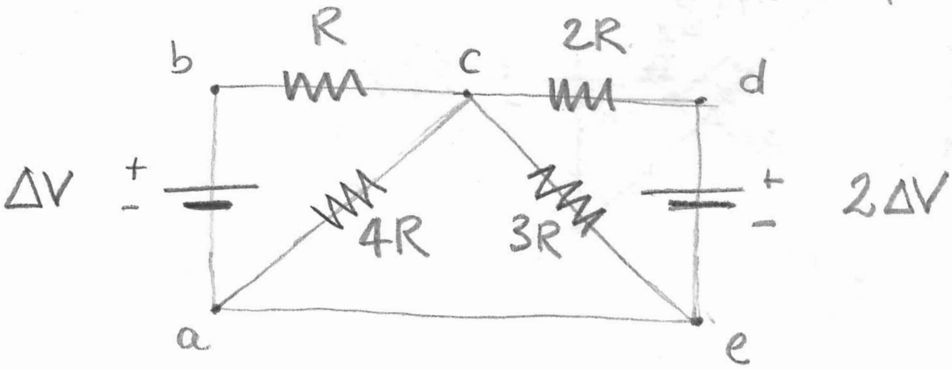
$$\frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

 Entrambe le formule generalizzabili a n resistori.

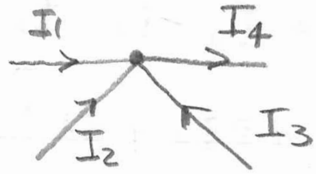
Leggi di Kirchoff

Consideriamo un circuito complicato a piacere



a, c, e (dove convergono più di 2 conduttori) sono detti **nodi**
i percorsi chiusi (ad es. abca, abcea, abcdea) sono detti **maglie**

① $\sum_{nodo} I = 0$

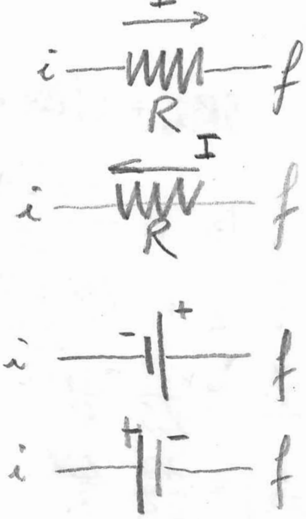


somma algebrica
+ se I entra nel nodo
- se I esce dal nodo

② $\sum_{maglia} \Delta V = 0$

somma algebrica, quindi nel ramo da i a f :

$i \rightarrow f$

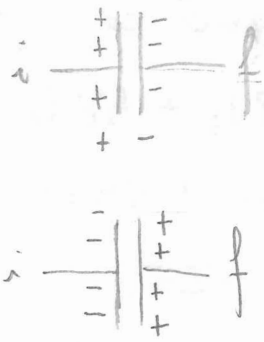


$-RI$

$+RI$

$+\Delta V$

$-\Delta V$



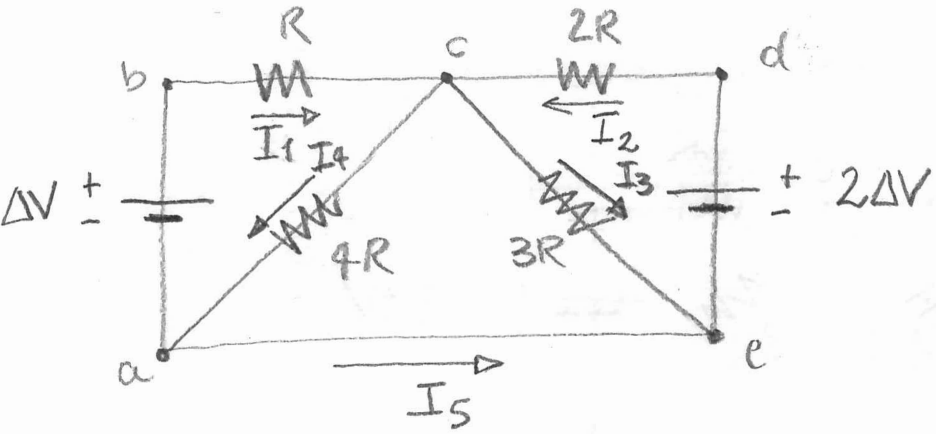
$-\frac{Q}{C}$

$+\frac{Q}{C}$

[Usando queste regole, nel circuito sopra, se $R = 1\,k\Omega$ e $\Delta V = 250\,V$, si trova una corrente di $50\,mA$ da $a \rightarrow e$]

soluzione a pag. seguente

Solutione circuito pag. precedente



$\Delta V = 250\ V$

$R = 1\ K\Omega$

$-I_1 + I_4 - I_5 = 0$ a
$-I_2 + I_3 + I_5 = 0$ e } 2 nodi

$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$ c (si ottiene sommando a ed e ed è pertanto inutile)

$\Delta V = RI_1 + 4RI_4$ abca
$2\Delta V = 2RI_2 + 3RI_3$ edce
$\Delta V = RI_1 - 2RI_2 + 2\Delta V$ abcdea } 3 maglie

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\ -I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ RI_1 + 4RI_4 = \Delta V \\ 2RI_2 + 3RI_3 = 2\Delta V \\ RI_1 - 2RI_2 = -\Delta V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_5 = -I_1 + I_4 \quad (**) \\ -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0 \qquad (*)\ I_4 = I_1 + I_2 - I_3 \\ RI_1 + 4R(I_1 + I_2 - I_3) = \Delta V \quad (I) \\ 2RI_2 + 3RI_3 = 2\Delta V \quad (II) \\ RI_1 - 2RI_2 = -\Delta V \quad (III) \end{cases}$$

Prosegue con le ultime 3...

$$\begin{cases} 5RI_1 + 4RI_2 - 4RI_3 = \Delta V \\ RI_1 + 3RI_3 = \Delta V \quad (II + III) \\ RI_1 - 2RI_2 = -\Delta V \end{cases} \qquad \begin{cases} 5RI_1 + 2(\Delta V + RI_1) - \frac{4}{3}(\Delta V - RI_1) = \Delta V \quad (a) \\ I_3 = \dfrac{\Delta V - RI_1}{3R} \quad (b) \\ I_2 = \dfrac{\Delta V + RI_1}{2R} \quad (c) \end{cases}$$

(a) $\left(7 + \frac{4}{3}\right) RI_1 = \left(\frac{4}{3} - 1\right)\Delta V$

$\frac{25}{3} RI_1 = \frac{1}{3}\Delta V$

$I_1 = \frac{1}{25}\frac{\Delta V}{R}$

(b) $I_3 = \frac{\Delta V}{3R}\left(1 - \frac{1}{25}\right) = \frac{8}{25}\frac{\Delta V}{R}$

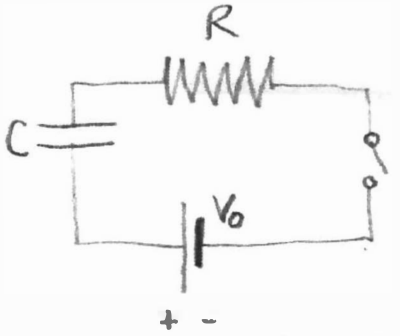
(c) $I_2 = \frac{\Delta V}{2R}\left(1 + \frac{1}{25}\right) = \frac{13}{25}\frac{\Delta V}{R}$

(*) $I_4 = \left(\frac{1}{25} + \frac{13}{25} - \frac{8}{25}\right)\frac{\Delta V}{R} = \frac{6}{25}\frac{\Delta V}{R}$

(**) $I_5 = \left(-\frac{1}{25} + \frac{6}{25}\right)\frac{\Delta V}{R} = \frac{1}{5}\frac{\Delta V}{R} = \frac{50 V}{1 K\Omega} = 50\ mA$

→ Circuito RC

carica



S (switch, interruttore)

si suppone inizialmente il condensatore scarico ed S aperto ($I = 0$)

Alla chiusura di S le cariche cominciano a fluire nel circuito, per accumularsi sul condensatore. Il processo termina $(I \to 0)$ quando sul condensatore si accumula la carica $Q = CV_0$.

Supponiamo che in un certo istante t della fase di carica la carica accumulata sul condensatore sia $q < Q$, e che circoli ancora una corrente I. [S chiuso a $t = 0$]

Allora, (II legge di Kirchoff)

$$V_0 - \frac{q}{C} - IR = 0$$

[tra parentesi, questa eq. vale anche nei casi limite di inizio/fine della carica del condensatore:

inizio	$q \to 0$	$V_0 \cong IR$	$I \cong I_0 \equiv \frac{V_0}{R}$
fine	$I \to 0$	$V_0 \cong \frac{q}{C}$	$q \to Q \equiv CV_0$

]

Tornando a t qualsiasi e ricordando $I = \frac{dq}{dt}$, si ha

$$V_0 - \frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = 0$$

(eq. differenziale di I° a variabili separabili)

>> a questo punto è solo matematica <<

...

$$\frac{dq}{dt} = \frac{CV_0 - q}{RC}$$

$$\frac{dq}{q - CV_0} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

integro e cambio nome alla variabile d'integrazione

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - CV_0} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\left(\frac{q - CV_0}{-CV_0}\right) = -\frac{1}{RC}\,t$$

$$-\frac{1}{CV_0}(q - CV_0) = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$-\frac{q}{Q} = e^{-\frac{t}{RC}} - 1$$

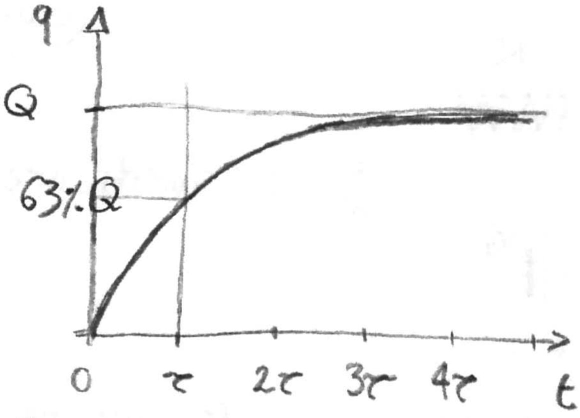
$$\boxed{q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

il calcolo non e' in programma, il risultato si'

Grafico della funzione

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

costante di tempo
$\tau \equiv RC$

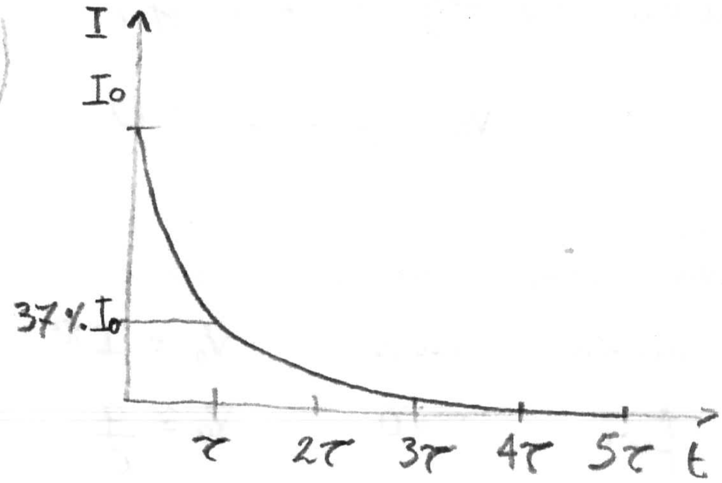


[nota: è bene sapere che:
$e^{-1} \cong 0.37$
$e^{-3} \cong 0.05$
$e^{-5} \cong 0.007$]

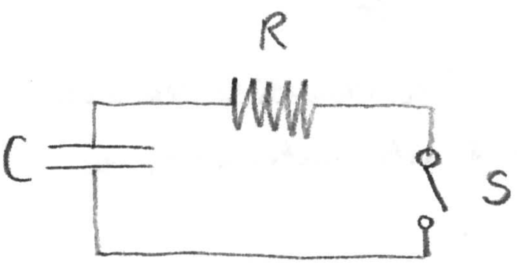
[altra nota:
analogo andamento per $V = \frac{q}{C}$
$$V(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$]

Inoltre ricordando $I = \frac{dq}{dt}$ si ottiene

$$I(t) = Q\left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right)$$
$$= \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$= I_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$$



Scarica



Inizialmente c'è carica $Q = V_0 C$
Non c'è il generatore di tensione!
Chiudo S a $t=0$.

Di nuovo mi riferisco al generico istante t in cui sul condensatore è rimasta $q < Q$. Dalla 2ª legge di Kirchoff:

$$-\frac{q}{C} - IR = 0$$

$$-\frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

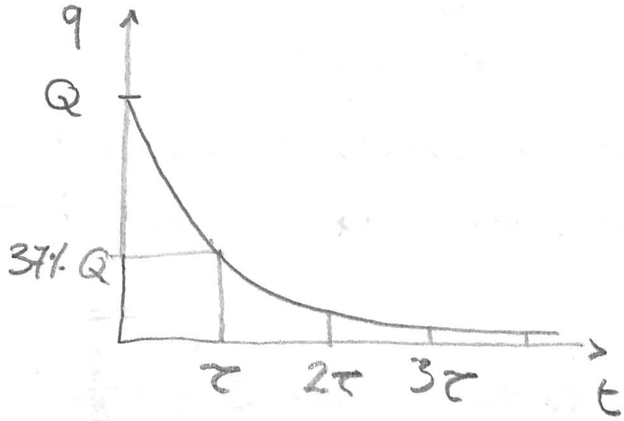
di nuovo il calcolo non e' in programma ma il risultato si'

$$\int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

si considera che per $t=0$, $q=Q$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q = Q\,e^{-\frac{t}{RC}}$$



e differenziando

$$I = \frac{dq}{dt} = Q\,e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{RC}\right)$$

$$= -I_0\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

la corrente gira nel verso opposto alla fase di carica ma con lo stesso andamento temporale

Infine calcoliamo la potenza trasferita alla resistenza al tempo t durante la scarica; in generale:

$$P = I\Delta V = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$ (vedi pag. 67)

Nel nostro caso:

$$P = R\left(-I_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 = RI_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}}$$

L'energia trasferita al resistore durante tutto il processo di scarica si può calcolare come:

$$U = \int_0^\infty P\,dt = \int_0^\infty RI_0^2 e^{-\frac{2t}{RC}}dt = RI_0^2\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$= RI_0^2\,\frac{RC}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}\,d\left(\frac{2t}{RC}\right) = RI_0^2\,\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}\cancel{R^2}\cancel{C}\,\frac{Q^2}{\cancel{R^2}C^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2}$$

Tale energia U era quindi presente nel condensatore carico.
Questo è un risultato generale: ogni volta che un condensatore di capacità C è carico con Q, esso racchiude una energia U