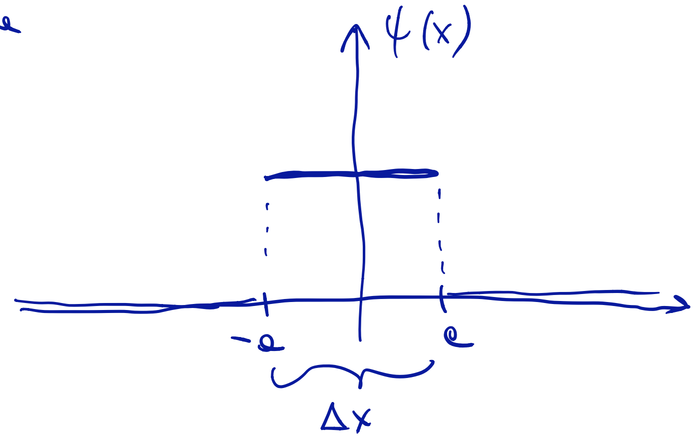
	Meccanica Classica (Hamilt.)	Meccanica Quantistica
Stato del SISTEMA	Pto $(\bar{p}, \bar{q})$ nello SPAZIO DELLE FASI T^*Q	E' caratterizzato dalla distribut. statistica dei risultati di misura. ↳ funzione d'onda $\psi(\bar{x})$
Evoluzione temporale	Funzioni $p_\ell(t)$, $q_\ell(t)$ che soddisfano eq. diff. $\dot{p}_\ell(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_\ell}(p(t), q(t), t)$ $\dot{q}_\ell(t) = \frac{\partial H}{\partial p_\ell}(p(t), q(t), t)$	$\psi(\bar{x}, t)$ che soddisf. Eq. di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\bar{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi(\bar{x}, t)$
Predizioni possibili	Noto lo stato iniziale $(\bar{p}_0, \bar{q}_0)$, si riesce a predire $\bar{p}$ e $\bar{q}$ per ogni ist. di tempo	Noto lo stato iniziale $\psi(\bar{x}, 0)$, si riesce a predire $\psi(\bar{x}, t)$ per ogni ist. di tempo ↓ Ho le distribuzioni statistiche dei possibili risultati di una misura.

(Per particella, in coord. cartesiane: $q \leftrightarrow x$ ← posizione; $p \leftrightarrow$ quantità di moto (momentum))

(In particolare $|\psi(\bar{x}, t)|^2$ fornisce la densità di probabil. di trovare la particella in $\bar{x}$.)

Esempio. Prendiamo la funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}} & \text{se } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



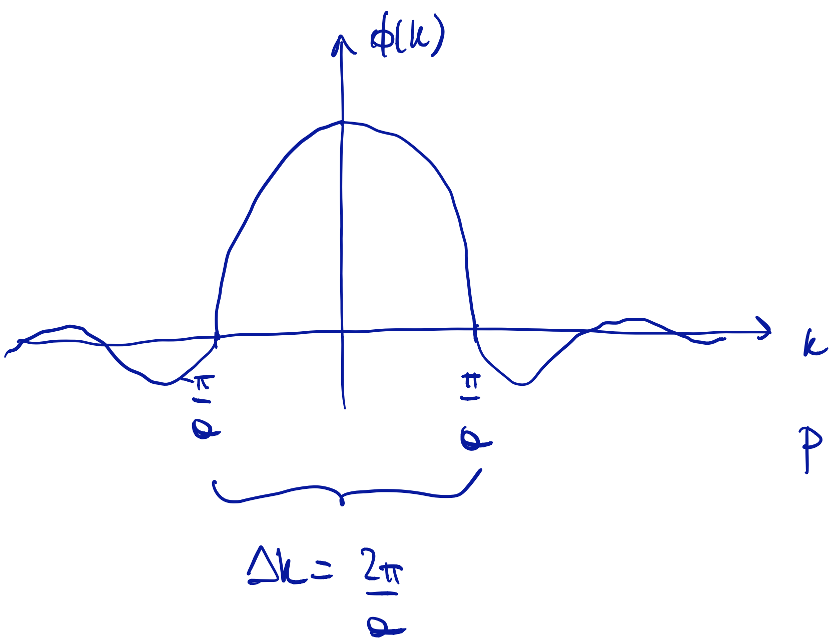
$\psi(x) \neq 0$ in intervallo $\Delta x = 2a$

($\rightarrow$ la particella si può trovare solo in $x \in [-a, a]$)

Quali onde piane contribuiscono al pacchetto d'onda $\psi(x)$?

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2a}} \left(\cos kx + \cancel{i \,\mathrm{sen}\, kx}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \, \frac{1}{k} \,\mathrm{sen}\, kx \Big|_{-a}^{a} = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \, \frac{\mathrm{sen}\, ka}{ka}$$



$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e^{-ikx}\, dk$$

$$\Delta x \cdot \Delta k \simeq 4\pi \gtrsim 1$$

$p \sim \hbar k$

- Dualità onda-corpuscolo suggerisce di introdurre una FUNZIONE D'ONDA a valori complessi che dia info sulla distrib. di probab. di misura della posizione $\psi(\bar{x})$.

- Vogliamo identificare $\psi(\bar{x})$ con lo STATO DEL SISTEMA.

Quali informazioni possiamo estrarre da $\psi(\bar{x})$?

(Ci restringiamo al caso di 1 grado di lib.)

- la probabilità che la particella si trovi in un intervallo Δ è data da

$$P(x \in \Delta) = \int_\Delta dx \, \underbrace{K|\psi(x)|^2}_{\text{densità di probabilità}}$$

La cost. K dev'essere t.c. la probab. totale è 1, cioè

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} K|\psi(x)|^2 dx}_{\text{affinché qto integrale converga}} = 1 \Rightarrow K^{-1} = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \equiv \|\psi\|^2$$

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$

Possiamo sceglierе ψ t.c. $\|\psi\|^2 = 1$

Una funz. d'onda di qto tipo è detta NORMALIZZATA

→ $\dfrac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|^2}$ mi dà la densità di probab. per la variabile x.

- Notiamo che $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ sono due funz. d'onda DIVERSE che forniscono la stessa dens. di prob. per X

↳ descrivono lo stesso stato o stati diversi?

cioè, data un'altra variabile dinamica, queste due funz. d'onda danno ancora la stessa dens. di probab. (per la nuova variab. dinamica)?

Essendo $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, possiamo esprimerla in funz. della sua trasf. di Fourier

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \, e^{ikx} \hat{\psi}(k)$$

$\uparrow$ onda piana monocromatica che trasporta impulso $p = \hbar k$

cambiamo variab. d'integraz.

$k = p/\hbar$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p) \qquad \text{dove} \quad \tilde{\psi}(p) \equiv \hat{\psi}\left(\frac{p}{\hbar}\right)$$

ψ è sovrapposizione di onde a impulso definito, con pesi $\tilde{\psi}(p)$

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\psi}(p)|^2 dp$$

funz. d'onda normalizzata

$\Downarrow$

$\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$

$\longrightarrow$ interpretiamo $|\tilde{\psi}(p)|^2$ come la densità di probab. della distribuz. degli impulsi

Poiché la trasf. di Fourier è biunivoca, è equivalente conoscere $\psi(x)$ o $\tilde{\psi}(p)$ per determinare lo stato del sist.

Si dice che $\tilde{\psi}(p)$ è la funz. d'onda in rappresentaz. p
" " " $\psi(x)$ " " " " " " x

- Possiamo formare alla domanda se $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ descrivono lo stesso stato.

↳ $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ hanno trasf. di Fourier DIVERSE

$\Rightarrow$ esse hanno la stessa distr. stat. per x, MA hanno diverse distr. stat. per p $\Rightarrow$ esse descrivono stati diversi

Rimangono due diversi tipi di ambiguità (cioè diverse funz. d'onda che descrivono lo stesso stato)

1) modificando la funz. d'onda in un INSIEME DI MISURA NULLA gli integrali del tipo $\int_\Delta |\psi(x)|^2 dx$ non cambiano

$\rightarrow$ stesse predizioni per le probab.

2) modificando la funz. d'onda per un fattore COSTANTE ($\neq 0$) la distrib. di probab. non cambia

$$P_\Delta = \frac{1}{\|\psi\|^2}\int_\Delta |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{\|\beta\psi\|^2}\int_\Delta |\beta\psi(x)|^2 dx$$

↳ relazione di equivalenza

$\psi_1 \sim \psi_2$ se $\exists \beta \neq 0$ t.c. $\psi_2(x) = \beta \psi_1(x)$

⇝ classi di equivalenza

$\hat{\psi} = \{ \beta \psi(x) \mid \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0 \}$ ⟷ STATO DEL sistema

Per lavorare con gli stati di solito si sceglie un rappresentante (x es. funz. d'onda normalizzata)

- Vogliamo che ψ si comporti come l' AMPIEZZA di un'onda (es. fenditure di Young) cioè che valga il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

→ combinaz. lineari di funz. d'onda è ancora una funz. d'onda

⇒ ψ deve appartenere a UNO SPAZIO VETTORIALE

⇝ $L^2(\mathbb{R})$ è in effetti uno sp. vett.

$L^2(\mathbb{R})$ è uno SPAZIO DI HILBERT : sp. vett. (a dim. infinita) con prodotto scalare HERMITIANO

$$(\psi, \phi) = \int dx\, \psi^*(x)\, \phi(x) = (\phi, \psi)^*$$

→ il prodotto scalare permette di def. una norma

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int dx\, |\psi(x)|^2$$

→ Lo STATO di un sistema quantistico è un VETTORE in uno SPAZIO DI HILBERT $\mathcal{H}$

spazio degli stati $\longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$

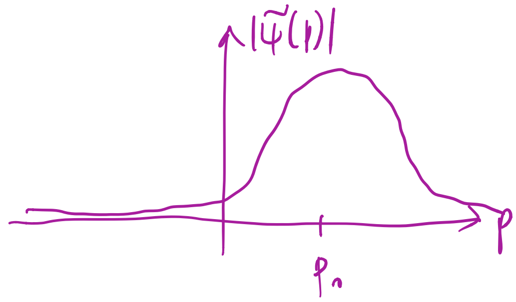
Esempio: PACCHETTO D'ONDA GAUSSIANO (1 grado di l.b.)

A $t=0$

$$\psi(x,0) = \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{ipx/\hbar} \, dp$$

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2}$$

Gaussiana centrata in p_0



$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, e^{-\xi^2} = \pi^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, e^{-\alpha(\xi+\beta)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \, e^{-\alpha\xi'^2} = \frac{1}{\alpha}\int d\varsigma \, e^{-\varsigma^2} = \frac{\pi^{1/2}}{\alpha}$$

$\xi' = \xi + \beta$ $\qquad$ $\alpha\xi' = \varsigma$

$$\psi(x,0) = \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{i(p-p_0)x/\hbar}$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}p'^2} e^{ip'x/\hbar}$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\, e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}\left(\underbrace{p'^2 - \frac{4\hbar i p' x}{a^2} - \frac{4\hbar^2x^2}{a^4}}_{\left(\underbrace{p' - \frac{2\hbar i x}{a^2}}_{\equiv p''}\right)^2} + \frac{4\hbar^2x^2}{a^4}\right)}$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2}(2\pi)^{3/4}} e^{ip_0x/\hbar} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp''\, e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}p''^2}\right)}_{\frac{2\hbar\pi^{1/2}}{a}} e^{-x^2/a^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{2\hbar}$$

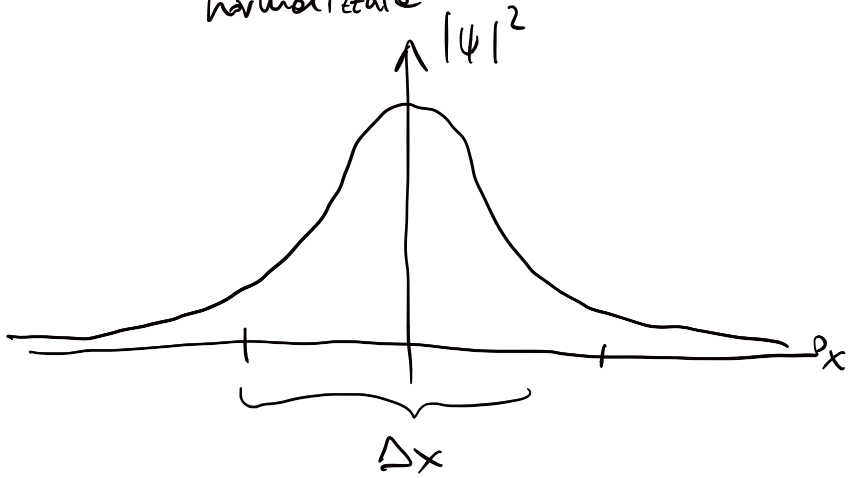
$$\psi(x,0) = \left(\frac{2\hbar^2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \underbrace{e^{ip_0x/\hbar}}_{\text{importante per determinare lo stato}} e^{-x^2/a^2}$$

$$\|\psi\|^2 = \left(\frac{2\hbar^2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2/a^2} dx = \hbar$$

↳ funz. d'onda normalizzata: $\psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{ip_0x/\hbar} e^{-x^2/a^2}$

↳ densità probab. $|\psi(x,0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} e^{-2x^2/a^2} \equiv P_\psi(x)$

normalizzata



VALOR MEDIO DI X

$$\langle x \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot P_\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\psi(x,0)|^2\,dx$$

f. d'o. normal.

$$= \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; x\, e^{-2x^2/a^2} = 0$$

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle_\psi - \underbrace{\langle x \rangle_\psi^2}_{=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,|\psi(x,0)|^2\,dx = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2/a^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2}\,dx = -\frac{d}{d\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2}\,dx = -\frac{d}{d\beta}\frac{\pi^{1/2}}{\beta^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{1}{\beta^{3/2}}$$

$\beta = 2/a^2$

$$= \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/2} \frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{a^3}{2^{3/2}} = \frac{a^2}{4} \;\Rightarrow\; \Delta x = \frac{a}{2}$$

Possiamo fare gli stessi conti con la distribuzione degli impulsi:

$$\langle p \rangle_\psi = \int p\, |\tilde{\psi}(p)|^2\, dp = p_0 \int |\tilde{\psi}(p)|^2 dp + \underbrace{\int (p-p_0) |\tilde{\psi}(p)|^2 dp}_{=0}$$

$$= p_0$$

$$\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle_\psi - \langle p \rangle_\psi^2 = \frac{\hbar^2}{a^2} \rightarrow \Delta p = \hbar/a$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

$\leftarrow \frac{\hbar}{2}$ è il minimo valore che $\Delta x \cdot \Delta p$ può assumere (Cioè per uno stato ψ generico $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$)

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE di HEISENBERG

Evoluzione temporale:

$$\psi(x,t) = \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{3/4}\hbar^{1/2}} \int dp\, e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2}\, e^{i(px - \overset{\frac{p^2}{2m}}{E_p}\, \overset{\text{dipendenza dal tempo}}{t})/\hbar}$$

freq. dell'onda

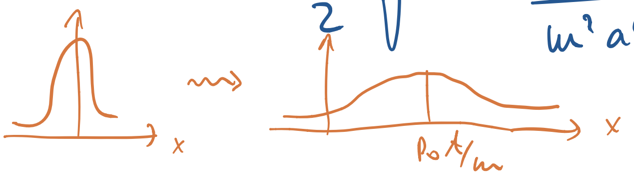
$$= \frac{1}{\hbar^{1/2}} \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\varphi}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/4}}\, e^{ip_0 x/\hbar}\, e^{-\left(x - \frac{p_0 t}{m}\right)^2 \Big/ a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}$$

- $\|\psi_t\|^2$ è indip. dal tempo
- la dens. di prob. $|\psi(x,t)|^2$ è ancora Gaussiana

ma ora l'aspetto al tempo t

$$\Delta x(t) = \frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}$$

aumenta al passare del tempo



"pacchetto d'onda si sparpaglia"

- $\langle x \rangle_{\psi_t} = \dfrac{p_0 t}{m}$ $\longleftarrow$ per particella classica $x(t) = \dfrac{p_0 t}{m}$

$$\langle x \rangle_{\psi_t} \longleftrightarrow x_{cl}(t)$$

- $|\tilde{\psi}(p)|^2$ rimane cost. nel tempo $\Rightarrow$ $\langle p \rangle$ e Δp rimangono cost.

$\left.\begin{array}{l} \langle x \rangle_t \\ \langle p \rangle_t \end{array}\right\}$ soddisfano le eq. del moto classiche $\left(\begin{array}{l} H = p^2/2m \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{array} \right)$

(Questo è vero per ogni variabile dinamica, cioè data una variabile dinamica A, il valor medio $\langle A \rangle_{\psi_t}$ evolve nel tempo come la variab. din. classica)