

FUNZIONI A 2 PUNTI DELL'ELETRONE: [S. 18]

Vogliamo calcolare ora

[PS. 7.1]

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i G(p) \quad \text{a 1-loop}$$

$$i G(p) = \text{diagram with shaded circle} = \text{diagram with straight line} + \text{diagram with loop} + \text{diagram with two loops} + \dots$$

$$= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(p)}$$

A 1-loop abbiamo:

$$\text{diagram with loop} = i \Sigma(p) = \text{diagram with cross} + \text{diagram with loop and wavy line}$$

$i(\not{p}\delta_2 - (\delta_1 + \delta_2)m)$ $i \Sigma_2(p)$

Nella Feynman gauge ($\xi=1$)

$$i \Sigma_2(p) = (-ie)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k-p)^2 + i\epsilon} = \dots =$$

L'algebra spinoriale in d dimensioni è:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = d \qquad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(d-2) \gamma^\nu$$

Implementando la parametrizzazione di Feynman, traslando il momento k^μ per ottenere k^2 al propagatore e trascurando poi termini lineari in k al numeratore, otteniamo:

$$\Sigma_2(\not{p}) = -i e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx [(d-2)x \not{p} - d m] \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\epsilon)^2}$$

$$\Delta = (1-x)(m^2 - x p^2)$$

Facendo la rotazione di Wick e l'integrale abbiamo:

$$\text{(Wick: } dk^0 \rightarrow i dk^0, \quad k^0 \rightarrow i k^0, \quad k^2 \rightarrow -k_E^2)$$

$$\Sigma_2(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2-\epsilon)x \not{p} - (4-\epsilon)m] \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \left[(\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) - \not{p} + 2m + \int_0^1 dx (2x \not{p} - 4m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right]$$

Includendo anche i controtermini:

controtermini

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \text{finite} \right) + \overbrace{\not{p} \delta_2 - (\delta_1 + \delta_2) m}$$

↳ entra nel propagatore come $iG(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + \Sigma(\not{p})}$

La **massa al polo** è DEFINITA come la posizione del polo in p^2 della funzione a 2 punti, ovvero:

$$\boxed{G^{-1}(m_p) \equiv 0} \iff m_p - M + \Sigma(m_p) = 0$$

(ricordiamo che $M \equiv M_R$ è la massa rinormalizzata)

Rinormalizzando nello **schema \overline{MS}** abbiamo:

$$\boxed{\int_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) \quad \int_m^{\overline{MS}} = -\frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)}$$

$$\Rightarrow \Sigma^{\overline{MS}}(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[(x p - 2m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} - x p + m \right]$$

$$\Sigma^{\overline{MS}}(m) = -\frac{\alpha}{4\pi} m \left(4 + 3 \log \frac{\mu^2}{m} \right)$$

$$\Sigma^{\overline{MS}}(m_p) = \Sigma^{\overline{MS}}(m) (1 + \mathcal{O}(e^2)) \leftarrow \begin{array}{l} \text{a meno di} \\ \text{correzioni 2-loop} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{m^{\overline{MS}} = m_p \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left(4 + 3 \log \frac{\mu^2}{m_p} \right) \right)}$$

La massa rinormalizzata in uno schema come \overline{MS} ha un renormalization group running in funzione di μ :

$$m^{\overline{MS}} = m(\mu)$$

$$\mu \frac{dm(\mu)}{d\mu} = -\frac{3\alpha}{2\pi} m$$

←

Anche le masse hanno un'evoluzione sotto il Gruppo di Rinormalizzazione (RG)

SCHEMA ON-SHELL

Possiamo anche rinormalizzare con uno schema on-shell, imponendo le condizioni:

$$\Sigma(m_p) \equiv 0$$

(ovvero $m \equiv m_p$
 massa rinormalizzata = massa al polo)

$$\left. \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right|_{p=m_p} \equiv 0$$

Ovvero:

$$\Sigma(m_p) = \Sigma_2(m_p) - \delta_m m_p \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_m = \frac{1}{m_p} \Sigma_2(m_p)$$

$$\Sigma'(m_p) = \Sigma_2'(m_p) + \delta_2 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = -\Sigma_2'(m_p)$$

Si ottiene:

$$J_m = \frac{1}{m_p} \sum_2(m_p) = -\frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_p^2} + \frac{4}{3} \right)$$

Nel calcolo di $\Sigma'(p)$ si incontra una divergenza

$$\Sigma = \frac{\alpha}{4\pi} \left[(\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right) - \not{p} + 2m + \int_0^1 dx (2x\not{p} - 4m) \log \frac{\mu^2}{(1-x)(m^2 - p^2 x)} \right] + \not{p} \Sigma_2 + \dots$$

$$\left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m} = \gamma \not{p} \left. \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=m_p} = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \int_2^{-1} + \int_0^1 dx 2x \left(\log \frac{\mu^2}{m_p^2} - \log |1-x|^2 \right) + \right. \\ \left. + m_p \int_0^1 dx (2x-4) \frac{2m_p x}{m_p^2(1-x)} \right] \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{3 + \log \frac{\mu^2}{m^2}}$$

$$\left[-4 \left(\frac{1}{2} (x-1)^2 - \log(x-1) \right) \right]_0^1 \rightarrow e^- \text{ divergente!}$$

Questa è una **DIVERGENZA INFRAROSSA**, dovuta alla presenza di una particella a massa nulla: fotone.

Si cancellano quando andiamo a calcolare un'osservabile fisica.

Per semplicità, possiamo temporaneamente regolare questa divergenza dando una massa fittizia e molto piccola al fotone

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} = -\Sigma_2'(m_P) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m_P^2} + 2 + \log \frac{m_\gamma^2}{m_P^2} \right)$$

Parentesi su divergente IR

Calcoliamo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ includendo correzioni di $O(\alpha)$.

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \propto \left| \begin{array}{c} e^- \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ e^+ \end{array} \begin{array}{c} \mu^- \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \mu^+ \end{array} \right|^2$$

← livello albero

sono divergenti IR

$$+ 2 \operatorname{Re} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right] + \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right) + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right)$$

interferenza → con le correzioni a 1-loop "correzioni virtuali"
(disegno solo quelle per lo stato finale)

Fisicamente, però, nel selezionare lo stato finale $\mu^+\mu^-$ devo tenere in considerazione che è impossibile escludere fotoni con energia sufficientemente bassa (radiazione soffice) o collineari a μ^+ o μ^- :

non possono essere rilevati quindi neppure esclusi.
Devo quindi anche aggiungere $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma)$

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right|^2$$

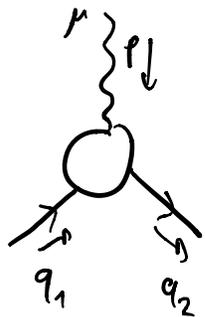
"correzioni di emissione reale"

← questi cancellano le divergenze IR dai diagrammi virtuali.

CORREZIONE AL VERTICE DI QED

[S.17, PS. 6.2-3]

Vogliamo calcolare le correzioni 1PI al vertice  :



$$\equiv iM^\mu \equiv -ie \bar{u}(q_2) \Gamma^\mu(q_1, q_2) u(q_1)$$

$p^2 \neq 0$: fotone off-shell.

- In generale possiamo avere

$$\Gamma^\mu = f_1 \gamma^\mu + f_2 p^\mu + f_3 q_1^\mu + f_4 q_2^\mu$$

dove f_i sono funzioni scalari dei 4-momenti.

- Dalla conservazione del momento $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$ possiamo mettere $f_2 = 0$.
- Dato $\not{q}_1 u(q_1) = m u(q_1)$ e $\bar{u}(q_2) \not{q}_2 = m \bar{u}(q_2)$ f_i possono solo dipendere da m^2 e p^2 ($\circ q_1 \cdot q_2$) come p^2/m^2 , dato che f_i sono adimensionali.
- Identità di Ward implica:

$$p_\nu \Gamma^\nu = 0 = f_1 \bar{u} \not{p} u + f_3 (p \cdot q_1) \bar{u} u + f_4 (p \cdot q_2) \bar{u} u$$

$$\text{ma } p \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 - m^2 = -p \cdot q_2 \Rightarrow \Downarrow f_3 = f_4$$

$$\Rightarrow M^\mu = f_1 \gamma^\mu + f_3 (q_1 + q_2)^\mu$$

Possiamo usare l'identità di Gordon

$$\bar{u}(q_2) \gamma^\mu u(q_1) = \bar{u}(q_2) \left[\frac{q_1^\mu + q_2^\mu}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} \right] u(q_1)$$

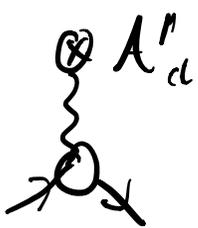
per riscrivere:

$$i\mathcal{M} = -ie \bar{u}(q_2) \left[F_1\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \gamma^\mu + \frac{i \sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} F_2\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right] u(q_1)$$

A livello albero  abbiamo: $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$.

$$\Rightarrow \bar{F}_1 = 1 + \mathcal{O}(\alpha), \quad \bar{F}_2 = \mathcal{O}(\alpha)$$

CARICA ELETTRICA σ MOMENTO MAGNETICO [PS.6.2]



σ campo classico

Vediamo il caso del potenziale elettrostatico $\phi(\vec{x})$.

Prendiamo $\tilde{A}'_\alpha = (i(2\pi) \delta(p^0) \tilde{\Phi}(p), \vec{0})$

Nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$ (grandi distanze)

$$i\mathcal{M} = iM_\mu A'_\alpha = -ie \bar{u}(q_2) F_1(0) \gamma^0 u(q_1) \tilde{\Phi}(\vec{p}) \approx -ie F_1(0) \tilde{\Phi}(\vec{p}) 2m \xi_2^\dagger \xi_1$$

$$\tilde{\Phi}(\vec{p}) \sim \frac{-1}{|\vec{p}|^2}$$

$\Rightarrow e F_1(r)$ è la carica elettrica effettiva a grandi distanze.

Una possibile **CONDIZIONE DI RINORMALIZZAZIONE**

ON-SHELL sarà $F_1(0) \equiv 1$

ovvero e_R è la carica effettiva a grandi distanze.

Prendiamo ora il **POTENZIALE MAGNETICO** A_{cl}^i

$$\tilde{B}^i(p) = -i \epsilon^{ijk} p^j \tilde{A}_{cl}^k(p)$$

$$iM = iM_p A_{cl}^n = +ie \left[\bar{u}(q_2) \left(\gamma^i F_1 + \frac{i \sigma^{iv} p_v}{2m} F_2 \right) u(q_1) \right] \tilde{A}_{cl}^i(\vec{p})$$

$$u(q) = \begin{pmatrix} \sqrt{q \cdot \vec{v}} \xi \\ \sqrt{q \cdot \vec{v}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} (1 - \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \\ (1 + \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) = 2m \xi_2^+ \left(\frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{v}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{v}}{2m} \right) \xi_1$$

Usando $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$ $\vec{p} = \vec{q}_2 - \vec{q}_1$

$$\bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) \approx \xi_2^+ \xi_1 (q_1 + q_2)^i + 2m \xi_2^+ \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

$$\bar{u}(q_2) \frac{i}{2m} \sigma^{iv} p_v u(q_1) \approx 2m \xi_2^+ \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

Il termine $(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2) \cdot \vec{A}$ descrive la forza di Lorentz
 Il resto da, nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow iM = -i(2m) e \xi_2^+ \left(\frac{-1}{2m} \gamma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi_1 \tilde{B}^k(p)$$

Descrive un momento magnetico

$$V(\vec{x}) = - \langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(x) \quad \text{con}$$

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi_2^+ \frac{\vec{v}}{2} \xi_1 = \xi_2^+ \left(g \frac{e}{2m} \vec{S} \right) \xi_1$$

\uparrow spin
 fattore g di Landé

con $g = 2 [F_1(0) + F_2(0)]$

Con la condizione di rinormalizzazione on-shell
 $F_1(0) \equiv 1$ abbiamo

$$g = 2 + \underbrace{2 F_2(0)}_{\text{anomalo}}, \quad F_2(0) \sim \mathcal{O}(\alpha)$$

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO

CALCOLO DELLA CORREZIONE AL VERTICE A 1-LOOP

[S.17.2, S.19.3]

$$-ie_R \Gamma^M = \text{1PI} = -ie_R \gamma^M + -ie_R \int_1 \gamma^M + i \Gamma_2^M$$

$$i \Gamma_2^M = \text{diagram} = \bar{u}(q_2) i \Gamma_2^M u(q_1)$$

$$= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\alpha}}{(k-q_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}(q_2) \gamma^\nu i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha u(q_1)$$

$$= -e^3 \bar{u}(q_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu}{\underbrace{[(k-q_1)^2 + i\epsilon]}_C \underbrace{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]}_B \underbrace{[k^2 - m^2 + i\epsilon]}_A} \} N^M \rightarrow \text{numeratore}$$

La parametrizzazione di Feynman con 3 propagatori da:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}$$

Il denominatore diventa:

$$xA + yB + zC = (k^\mu + y p^\mu - z q_1^\mu)^2 - \Delta + i\epsilon$$

\downarrow $k^\mu \rightarrow k^\mu - y p^\mu + z q_1^\mu$ & shift
 $k^2 - \Delta + i\epsilon$

$$\Delta = -xy p^2 + (1-z)^2 m^2$$

Facendo lo shift al numeratore, usando
 $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{4} g^{\mu\nu} k^2$, l'identità di Gordon e $x+y+z=1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} N^\mu = \left[-\frac{1}{2} k^2 + (1-x)(1-y) p^2 + (1-4z+z^2) m^2 \right] \bar{u} \gamma^\mu u + \\ + 2m^2 z(1-z) \left(i \not{p}_\nu \frac{\bar{u} \sigma^{\mu\nu} u}{2m} \right) + \underbrace{m(z-z)(x-y) p^\mu}_{=0} \bar{u} u$$

Questo termine dà contributo nullo all'integrale poiché è dispari in $x \leftrightarrow y$ mentre il resto è pari.

Dall'identità di Ward infatti ce lo aspettiamo.

Definisco $F_1(p^2) = 1 + f_1(p^2) + S_1 + \mathcal{O}(e^4)$

$$f_1(p^2) = -2e^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{k^2 - 2(1-x)(1-y)p^2 - 2(1-4z+z^2)m^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

$$F_2(p^2) = 4e^2 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3}$$

Regolarizziamo in $d=4-\varepsilon$, $e^2 \rightarrow e^2 \mu^{4-d}$
 inoltre alcune parti finite nell'algebra di Dirac vengono modificate.

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{-i}{32\pi^2 \Delta} \leftarrow \text{è finito}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} = \frac{d}{4} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Delta^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \rightarrow \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right)$$

Valutiamo prima il momento magnetico anomalo

$$\Rightarrow F_2(p^2) = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int_0^1 dx dy dz \int (x+y+z-1) \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xy p^2}$$

Per $p^2=0$ troviamo:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int (x+y+z-1) \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z = \frac{\alpha}{2\pi} = a_e \approx 0,00116$$

Il momento magnetico anomalo dell'elettrone dunque è:

$$\Rightarrow g = 2 + 2\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) = 2.00232\dots$$

Presentato per la prima volta da Schwinger, Feynman e Tomonaga nel 1948.

Adesso abbiamo: $a_e^{\text{th}} = 0.001159625181643(764)$
 $a_e^{\text{exp}} = 0.00115962518073(28)$

a_e è noto a 1 parte su 10^9 .

Per ottenere ciò, g è stato misurato con precisione di 10^{-12} .

Calcoliamo infine $F_1(p^2) = 1 + \mathcal{J}_1(p^2) + \mathcal{J}_2$

Per rinormalizzare la teoria è sufficiente calcolare la **parte divergente**.

L'unica tale viene dal termine con k^2 al numeratore

$$\mathcal{J}_1(p^2) = -2e^2 i \mu^{4d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{\left(\frac{d-2}{d}\right)^2 k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} + \dots$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta + i\varepsilon)} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{\Delta} - \frac{1}{2} \right) \quad \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{J}_1^{\text{div}}(p^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \mu^2 + \dots \right)$$

Nello **schema \overline{MS}** avremmo

$$\mathcal{J}_1^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\mathcal{J}_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi \right)$$

$$\text{Quindi } \mathcal{J}_1^{\overline{MS}} = \mathcal{J}_2^{\overline{MS}} \Rightarrow \mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2,$$

come ci si aspettava da Ward-Takahashi.

Nello schema *ou-shell* occorre calcolare tutto $f_1(p^2)$.

Analogamente a $\Sigma_2(p)$, c'è una divergenza IR che possiamo regolare dando una massa al fotone:

$$\Delta \rightarrow \Delta = (1-z)^2 m^2 - xy p^2 + z m_\gamma^2$$

Otteniamo

$$f_1(p^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - 2 \right.$$

$$\left. + 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{p^2(1-x)(1-y) + m^2(1-4z+z^2)}{\Delta} + \log \frac{\mu^2}{\Delta} \right] \right)$$

Imponiamo la condizione di rinormalizzazione

$$F_1(0) = 1 + f_1(0) + \mathcal{J}_1 \equiv 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_1^{\text{MOM}} = -f_1(0) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 4 + \log \frac{\mu^2}{m^2} + \log \frac{m_\gamma^2}{m^2} \right)$$

Anche in questo schema possiamo verificare che

$$\mathcal{J}_1^{\text{MOM}} = \mathcal{J}_2^{\text{MOM}} .$$

RIASSUNTO

[S.18.4]

Abbiamo riscritto i campi e parametri bare della Lagrangiana di QED introducendo costanti di rinormalizzazione:

$$\psi^0 = z_2^{1/2} \psi^R, \quad A_\mu^0 = z_3^{1/2} A_\mu^R,$$

$$m_0 = z_m m_R, \quad e_0 = z_e e_R.$$

Definiamo poi $z_1 \equiv z_e z_2 z_3^{1/2}$ ← rinormalizza il vertice

L'identità di Ward-Takahashi impone $z_1 = z_2 \Rightarrow e_R = z_3^{1/2} e_0$.

I controtermini $\delta_i \equiv z_i - 1$ riassorbono le divergenze UV in un dato SCHEMA DI RINORMALIZZAZIONE.

Nello SCHEMA ON-SHELL, si impongono le condizioni

$$\Pi(0) = 0, \quad \Sigma(m_f) = 0, \quad \Sigma'(m_f) = 0, \quad \Gamma^M(0) = \gamma^M$$

Da cui si ricavano i controtermini:

$$\delta_1^{\text{anom}} = \delta_2^{\text{anom}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 4 + \log \frac{\mu^2}{m^2} + \log \frac{m_f^2}{m^2} \right)$$

$$\delta_3^{\text{anom}} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{m^2} \right)$$

Nello schema di sottrazione \overline{MS} , non si impongono condizioni di rinormalizzazione ma i controtermini vengono fissati RICHIEDENDO che cancellino i termini proporzionali a $\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)$:

$$\int_1^{\overline{MS}} = \int_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)$$

$$\int_3^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi\right)$$

- Le parti divergenti dei controtermini dipendono dal tipo di regolatore UV (Pauli-Villars, dim-reg, etc..) ma NON dipendono dallo schema. Le parti finite sí.
- La scala di rinormalizzazione μ non è fisica. Questa indipendenza genera il gruppo di rinormalizzazione. Nello schema on-shell la scala μ è fissata implicitamente, e.g. a $\mu = m_p$ o $\mu = 0$.

Nella funzione a 2 punti del [S.23.1]
 fotone $\sim \text{Om}$, la dipendenza ad alte energie
 è UNIVERSALE

$$\Pi^{\overline{MS}}(p^2 \gg \mu^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \frac{\mu^2}{p^2} + \dots \right]$$

$$\Pi^{\text{MOM}}(p^2 \gg p_0^2) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\log \frac{p_0^2}{p^2} + \dots \right]$$

← Noi avevamo scelto
 $p_0^2 \equiv m^2$, ma in
 generale è arbitrario

L'indipendenza dalla scala di rinormalizzazione di
 ampiezze fisiche, come $\text{Im} + \text{MOM}$

ci fornisce la **FUNZIONE BETA**

$$\tilde{V}(p^2) = \frac{e(\mu)^2}{p^2} \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{\mu^2}{p^2} + \dots \right)$$

$$\mu \frac{d\tilde{V}}{d\mu} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{de(\mu)}{d\mu} = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

La soluzione con condizione al contorno $e(\mu_0)$ a μ_0 è:

$$e(\mu) = \frac{e(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Equazione del gruppo di
 rinormalizzazione per e .

FUNZIONE β DAI CONTROTERMINI [5.23.2]

Nota: in dim. reg. il $\log \mu^2$ è inseparabile dal polo $\frac{1}{\epsilon}$, venendo da un'espansione del tipo:

$$\mu^\epsilon \left(\frac{Z}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log p^2 + \dots \right) = \frac{Z}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \frac{\mu^2}{p^2}$$

→ Il coefficiente davanti a $\log \mu^2$ è lo stesso di $\frac{Z}{\epsilon}$.

Possiamo quindi ottenere la funzione $\beta^{(*)}$ estraendo solamente la parte divergente dell'ampiezza.

(*) Questo è valido solamente per il comportamento a grandi energie nel caso di schemi on-shell (MS).

Formalmente, la Lagrangiana in d -dimensioni è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \tilde{z}_3 \tilde{F}_{\mu\nu}^2 + i \tilde{z}_2 \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m_R \tilde{z}_2 \tilde{z}_m \bar{\Psi} \Psi - \mu^{\frac{4-d}{2}} e_R \tilde{z}_e \tilde{z}_2 \tilde{z}_3^{\frac{1}{2}} \bar{\Psi} A \Psi$$

mentre i parametri della Lagrangiana bare sono indipendenti da μ . In particolare

$$0 = \frac{de_0}{d \log \mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left[\mu^{\frac{\epsilon}{2}} e_R \tilde{z}_e \right] = \mu^{\frac{\epsilon}{2}} e_R \tilde{z}_e \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu}{e_R} \frac{de}{d\mu} + \frac{\mu}{\tilde{z}_e} \frac{d\tilde{z}_e}{d\mu} \right]$$

Al leading order in e_R , $\tilde{z}_e = 1 \Rightarrow \mu \frac{de}{d\mu} = \beta^{(0)} = -\frac{\epsilon}{2} e_R$

All'ordine successivo: $Z_e = 1 + \frac{e_R^2}{16\pi^2} \left[\frac{4}{3\varepsilon} + \dots \right] \equiv 1 + \frac{b_1}{\varepsilon} e_R^2 + \dots$

↑ termini finiti
dipendenti dallo
schema.

$$\Rightarrow \mu \frac{dZ_e}{d\mu} = \frac{2}{\varepsilon} b_1 e_R \mu \frac{de}{d\mu} \leftarrow \beta^{(d)}$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon} b_1 e_R^2 \frac{\varepsilon}{2} = -b_1 e_R^2 = -\frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

Usando questo risultato troviamo

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta(e_R)}{e_R} - \frac{e_R^2}{12\pi^2} = 0 \Rightarrow \beta(e_R) = -\frac{e_R \varepsilon}{2} + \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

Ovvero nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

Possiamo quindi ottenere la funzione beta senza doverci riferire ad osservabili esplicite, come $\tilde{V}(p^2)$.

Dato che $Z_e = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} \stackrel{\text{Ward}}{=} Z_3^{-1/2}$ è chiaro che

$\beta(e_R)$ viene solamente da diagrammi: 

Analogamente, possiamo anche trovare l'equazione RG per la massa dell'elettrone:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} m^0 = \mu \frac{d}{d\mu} (Z_m m_R) = Z_m m_R \left[\frac{\mu}{m_R} \frac{d m_R}{d\mu} + \frac{\mu}{Z_m} \frac{d Z_m}{d\mu} \right]$$

Definiamo la **DIMENSIONE ANOMALA**

$$\gamma_m \equiv \frac{\mu}{m_R} \frac{d m_R}{d\mu}$$

$$\Rightarrow \gamma_m = - \frac{\mu}{Z_m} \frac{d Z_m}{d\mu} = - \frac{1}{Z_m} \frac{d Z_m}{d e_R} \mu \frac{d e_R}{d\mu}$$

A 1-loop $Z_m \equiv 1 + \delta_m = 1 - \frac{3e_R^2}{16\pi} \left(\frac{2}{\epsilon} + \text{termini finiti} \right)$

mentre $\mu \frac{d e}{d\mu} = \beta^{(0)} = -\frac{\epsilon}{2} e_R + \mathcal{O}(e_R^3)$

$$\Rightarrow \gamma_m = - \frac{1}{1 + \delta_m} \left(\frac{2}{e_R} \delta_m \right) \left(-\frac{\epsilon}{2} e_R \right) = \delta_m \epsilon + \mathcal{O}(e_R^3)$$

$$\gamma_m = -\frac{3e_R^2}{8\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{d m_R}{d\mu} = -\frac{3\alpha}{2\pi^2} m_R$$

Possiamo anche trovare le DIMENSIONI ANGOLARI
del campo del fotone e dell'elettrone:

$$\gamma_3 \equiv \frac{\mu}{\tau_3} \frac{d\tau_3}{d\mu} = \frac{1}{\tau_3} \frac{d\tau_3}{de_R} \beta^{(1)}(e_R) = - \int_3 \varepsilon = \frac{e_R^2}{12\pi^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu}{\tau_2} \frac{d\tau_2}{d\mu} = - \int_2 \varepsilon = \frac{e_R^2}{16\pi^2}$$

EQUAZIONE DI CALLAN-SYMANZIK [5.23.43]

Consideriamo una funzione di Green con n fotoni e m elettroni "bare":

$$G_{n,m}^{(0)} = \langle 0 | T \{ A_{\mu_1}^0 \dots A_{\mu_n}^0 \psi_1^0 \dots \psi_m^0 \} | 0 \rangle$$

è indipendente da μ dato che μ non appare in \mathcal{L} , ma è divergente.

In termini della funzione di Green con campi rinormalizzati (che sarà invece finita)

$$G_{n,m} = \langle 0 | T \{ A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n} \psi_1 \dots \psi_m \} | 0 \rangle$$

abbiamo:
$$G_{n,m}^{(0)} = z_3^{\frac{n}{2}} z_2^{\frac{m}{2}} G_{n,m}$$

$G_{n,m}$ può dipendere da μ sia esplicitamente che via i parametri e campi rinormalizzati:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} G_{n,m}^{(0)} = z_3^{\frac{n}{2}} z_2^{\frac{m}{2}} \left[\mu \frac{d}{d\mu} + \frac{n}{2} \overbrace{\frac{\mu}{z_3} \frac{dz_3}{d\mu}}^{\gamma_3} + \frac{m}{2} \overbrace{\frac{\mu}{z_2} \frac{dz_2}{d\mu}}^{\gamma_2} + \mu \overbrace{\frac{d\epsilon_R}{d\mu} \frac{d}{d\epsilon_R}}^{\beta_e} + \mu \overbrace{\frac{dM_R}{d\mu} \frac{d}{dM_R}}^{\gamma_{mR}} \right] G_{n,m}$$

Owero:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma_3 + \frac{M}{2} \gamma_2 + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + M_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial M_R} \right) G_{n,m} = 0$$

↑

Equazione di Callan-Symanzik

Se la funzione di Green ha anche un

OPERATORE LOCALE $\mathcal{O}(x)$, tipo $\mathcal{O}(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$

o $\int^d(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \psi(x)$, definiamo

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{O} \equiv \gamma_{\mathcal{O}} \mathcal{O}$$

$\gamma_{\mathcal{O}}$: dimensione anomala di $\mathcal{O}(x)$

ed abbiamo:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma_3 + \frac{M}{2} \gamma_2 + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + M_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial M_R} + \gamma_{\mathcal{O}} \right) G = 0$$

Per la teoria $\lambda \phi^4$ (a massa nulla, per semplicità)

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) G_n = 0, \quad \text{dove} \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} \frac{dZ}{d\mu}$$

La soluzione è data da [vedi PS.12.3]

$$\tilde{G}_n(\{P_i\}; \lambda, \mu) = \tilde{G}_n(\{P_i\}; \bar{\lambda}(t), \mu_0) e^{\frac{n}{2} \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt}$$

dove $t \equiv \log \frac{\mu_0}{\mu}$ e

$\bar{\lambda}(t)$ è la soluzione all'equazione di R6

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \bar{\lambda}(t) = \beta(\bar{\lambda}) = \frac{3\bar{\lambda}^{-2}}{16\pi^2} \\ \bar{\lambda}(0) = \lambda \end{array} \right. \Rightarrow \bar{\lambda}(t) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{16\pi^2} t}$$

↑
funzione β

Il termine esponenziale della dimensione anomala può essere valutato semplicemente, se approssimiamo

$$\gamma \approx \text{const} :$$

$$e^{\frac{n}{2} \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt} \approx e^{\frac{n}{2} t \gamma} = e^{\frac{n}{2} \log \frac{\mu_0}{\mu} \gamma} = \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{n}{2} \gamma}$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{n}{2} \gamma} = \left(-\frac{n}{2} \gamma + \frac{n}{2} \gamma \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)^{\frac{n}{2} \gamma} = 0$$

DIMENSIONI ANOMALE

[5.23.4.4]

La dimensione classica di un campo o un parametro indica la sua dimensione in energia, per esempio in $d=4$

$$[\varphi] = 1, \quad [m] = 1, \quad [e] = 0, \quad [A_\mu] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}$$

Questo ci indica cosa succede sotto un riscalamento delle coordinate. Prendiamo la teoria φ^4 :

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \varphi (\square + m^2) \varphi + g \varphi^4 \right]$$

L'azione classica è invariante sotto **DILATAZIONI** \mathcal{D}

$$x^\mu \rightarrow \frac{1}{\lambda} x^\mu, \quad \partial_\mu \rightarrow \lambda \partial_\mu, \quad m \rightarrow \lambda m, \quad g \rightarrow \lambda g \quad \text{e} \quad \varphi \rightarrow \lambda^1 \varphi.$$

$$\mathcal{D}: \left. \begin{array}{l} \varphi \rightarrow \lambda^{d_\varphi} \varphi \\ g \rightarrow \lambda^{d_g} g \\ m \rightarrow \lambda^{d_m} m \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad d_\alpha \text{ sono le } \text{DIMENSIONI CLASSICHE}$$

Prendiamo una funzione di Green

$$G_n = \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle$$

A livello classico, può dipendere da oggetti in \mathcal{L} a diverse potenze:

$$G_n(x, g, \mu) \sim \mu^a g^b x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \quad \text{e} \quad \leftarrow \text{analisi dimensionale} \\ a - c_1 - \dots - c_n = n$$

$$\Rightarrow G_n \rightarrow \lambda^n G_n$$

A livello quantistico, la teoria deve essere rinormalizzata e una dipendenza dalla scala di rinormalizzazione μ compare in G_n :

$$G_n(x, g, \mu) \sim \mu^a g^b x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \mu^{-\gamma} \Rightarrow \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma \right) G_n = 0$$

$$\text{Adesso: } a - c_1 - \dots - c_n = n + \gamma$$

Dato che μ non appare in Σ , non trasforma sotto dilatazioni \mathcal{D} , quindi

$$G_n \rightarrow \lambda^{n+\gamma} G_n \quad \Leftarrow$$

A livello quantistico la dimensione di scaling di γ è cambiata.