

UNITARIETÀ ED IL TEOREMA OTTICO

Referenze: [S.24.1, PS.7.3]

Il concetto di unitarietà è legato alla conservazione della probabilità.

Ci ha guidato nel trovare le corrette rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré.

Gli stati dello spazio di Fock a 1 o più particelle sono autostati del momento,

$$\hat{P}_\mu |X\rangle = p_\mu |X\rangle, \quad \text{con } p^0 > 0 \text{ e } p^2 \geq 0.$$

Il vuoto ha momento nullo $\hat{P}_\mu |0\rangle = 0$

Lo spazio di Fock è COMPLETO:

$$\mathbb{1} = \sum_x \int d\tilde{\Pi}_x |x\rangle \langle x|, \quad d\tilde{\Pi}_x = \prod_{j \in x} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

TEOREMA OTTICO

Abbiamo visto che per avere che la norma degli stati sia conservata, ovvero conservazione della probabilità

$$\langle j | i \rangle_{\text{out}} = {}_{\text{in}} \langle j | S S^\dagger | i \rangle_{\text{in}} \equiv {}_{\text{in}} \langle j | i \rangle_{\text{in}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S S^\dagger = 1}$$

Matrice S è
UNITARIA

Definendo $S = 1 + iT$ → Matrice di trasmissione
le ampiezze calcolate via diagrammi di Feynman

sono:

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) M(i \rightarrow f)$$

Unitarietà della matrice S implica:

$$S^\dagger S = 1 = (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1 + T^\dagger T - i(T^\dagger - T) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{i(T^\dagger - T) = T^\dagger T} \Rightarrow \text{T NON è Hermitiana}$$

Mettendo questo operatore tra $\langle f | \cdot | i \rangle$
abbiamo

$$\begin{aligned} \langle f | i(\hat{T}^\dagger - \hat{T}) | i \rangle &= i \langle i | \hat{T} | f \rangle^* - i \langle f | \hat{T} | i \rangle = \\ &= i (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) [M^*(f \rightarrow i) - M(i \rightarrow f)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{T}^\dagger \hat{T} | i \rangle &= \sum_x \int d\tilde{\pi}_x \langle f | \hat{T}^\dagger | x \rangle \langle x | \hat{T} | i \rangle \\ &= \sum_x \int d\tilde{\pi}_x (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_x) (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_x) M(i \rightarrow x) M^*(f \rightarrow x) \end{aligned}$$

Ovvero

TEOREMA OTTICO GENERALIZZATO

$$\begin{aligned} M(i \rightarrow f) - M^*(f \rightarrow i) &= \\ &= i \sum_x \int d\tilde{\pi}_x (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_x) M(i \rightarrow x) M^*(f \rightarrow x) \end{aligned}$$

Questa relazione deve essere soddisfatta sempre, in particolare ad ogni ordine in teoria delle perturbazioni.

Dato che il lato sinistro $\sim M$ mentre il destro $\sim M^2$, per un'ampiezza


il teorema mette in relazione diagrammi loop (lato sx) con calcoli ad albero (dx).

$M \sim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{livello albero}}}{A} \lambda + \frac{B}{16\pi^2} \lambda^2$
 \nwarrow Contributo 1-loop

⇒ Una teoria puramente classica non può essere unitaria. (lato dx ≠ 0, sx = 0).

Nel caso particolare $|i\rangle = |f\rangle = |A\rangle$

$$2i \operatorname{Im} M(A \rightarrow A) = i \sum_x \int d\pi_x (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_x) |M(A \rightarrow X)|^2$$

- Se $|A\rangle$ è uno stato ad 1 particella la sua larghezza di decadimento è 

$$\Gamma(A \rightarrow X) = \frac{1}{2m_A} \int d\pi_x (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_x) |M(A \rightarrow X)|^2$$

Quindi possiamo riscrivere il teorema ottico come:

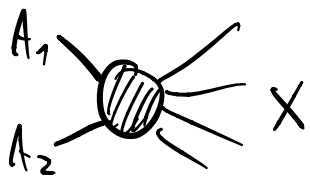
$$\operatorname{Im} M(A \rightarrow A) = m_A \sum_x \Gamma(A \rightarrow X) = m_A \Gamma_{\text{tot}}$$

dove $\Gamma_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \Gamma$ è la larghezza di decadimento totale.

Ovvero:

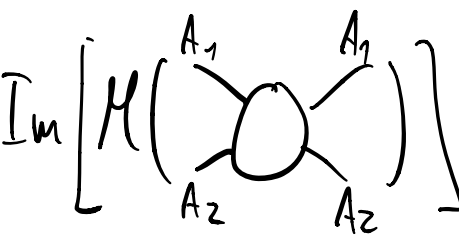
La parte immaginaria del propagatore è uguale alla massa per la larghezza di decadimento totale.

- Se $|A\rangle$ è uno stato a 2 particelle, la sezione d'urto per $A \rightarrow X$ è:



$$\sigma(A \rightarrow X) = \frac{1}{4 C_{cm} |\vec{p}_i|} \int d\vec{\pi}_x (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_x) |M(A \rightarrow X)|^2$$

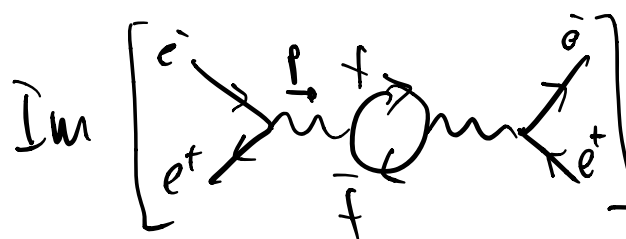
$$\Rightarrow \boxed{\text{Im } M(A \rightarrow A) = 2 C_{cm} |\vec{p}_i| \sum_x \sigma(A \rightarrow X)} \quad \text{TEOREMA OTTICO}$$



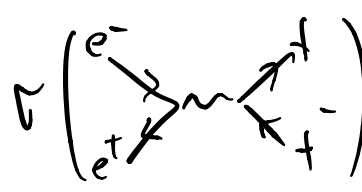
$$\text{Im} \left[M \left(\begin{array}{c} A_1 \quad A_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ A_2 \quad A_2 \end{array} \right) \right] = 2 C_{cm} |\vec{p}_i| \sum_x \sigma \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ A_2 \end{array} X \right)$$

l'abbiamo già verificato esplicitamente per la QED

$$|A\rangle = |e^+ e^-\rangle$$



$$\text{Im} \left[\begin{array}{c} e^- \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ e^+ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} f \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ f \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} e^- \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ e^+ \end{array} \right] = \frac{e^4}{12\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{p^2}} \left(1 + \frac{2m_f^2}{p^2} \right)$$



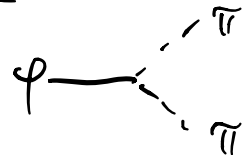
$$\sigma \left(\begin{array}{c} e^- \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ e^+ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} f \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ f \end{array} \right) = \frac{e^4}{12\pi C_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{C_{cm}^2}} \left(1 + \frac{2m_f^2}{p^2} \right)$$

con $C_{cm}^2 = p^2$ e $|\vec{p}_i| = \frac{C_{cm}}{2}$

Esempio

Teoria con due scalari ϕ e π

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{M^2}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 - \frac{m^2}{2} \pi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi \pi^2$$

Per $M > 2m$, ϕ può decadere in $\pi\pi$ 

$$\Gamma(\phi \rightarrow \pi\pi) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2M} |M|^2 \frac{|\vec{p}_\pi|}{M} \frac{d\Omega}{4\pi^2} \mathcal{G}(M-2m)$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \mathcal{G}(M-2m)$$

↳ esercizio: verificare

Il teorema ottico implica

$$\text{Im } \mathcal{M}(\phi \rightarrow \phi) = M \Gamma(\phi \rightarrow \pi\pi) + \text{altri canali.}$$

All' $\mathcal{O}(\lambda^2)$ $\phi \rightarrow \pi\pi$ è l'unico canale di decadimento.

Calcoliamo ora $\mathcal{M}(\phi \rightarrow \phi)$ a 1-loop:

$$i\mathcal{M}(p^2)_{\text{loop}} = \text{---} \text{---} \text{---} = (i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} =$$

$$= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2 - i\epsilon - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right] \leftarrow \text{Vedi loop in } \lambda\phi^4 \text{ in dim-reg}$$

Mettendo φ on-shell $p^2 = M^2$

$$M(M^2)_{loop} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2 - M^2 x(1-x) - i\epsilon}{\mu^2} \right]$$

Dato che $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, per $M^2 < 4m^2$ il log è reale per $\epsilon \rightarrow 0$ quindi $\text{Im} M(\varphi \rightarrow \varphi) = 0$, ma anche il decadimento è vietato.

Per $M^2 \geq 4m^2$ usiamo

$$\log(-A - i\epsilon) = \log A - i\pi$$

$$\Rightarrow \text{Im} M_{loop} = \frac{\lambda^2}{32\pi} \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta} dx \mathcal{D}(M-2m) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \mathcal{D}(M-2m)$$

$$\begin{aligned} M^2 x^2 - M^2 x + m^2 &= 0 \\ x &= \frac{M^2 \pm \sqrt{M^4 - 4M^2 m^2}}{2M^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\beta \end{aligned}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$$

\Rightarrow Verificato il teorema ottico.

PARTI IMMAGINARIE

[S.24.1.3]

Vediamo quanto vale la parte immaginaria di un propagatore:

$$\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{p^2 - m^2 - i\varepsilon} \right) = \frac{-\varepsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \varepsilon^2}$$

Questa va a zero con $\varepsilon \rightarrow 0$ tranne che per $p^2 = m^2$.
Integrando in p^2 :


$$\int_0^{\infty} dp^2 \frac{-\varepsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \varepsilon^2} = -\pi$$

Quindi otteniamo

$$\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = -\pi \delta(p^2 - m^2)$$

ovvero il propagatore è reale tranne quando la particella va on-shell.

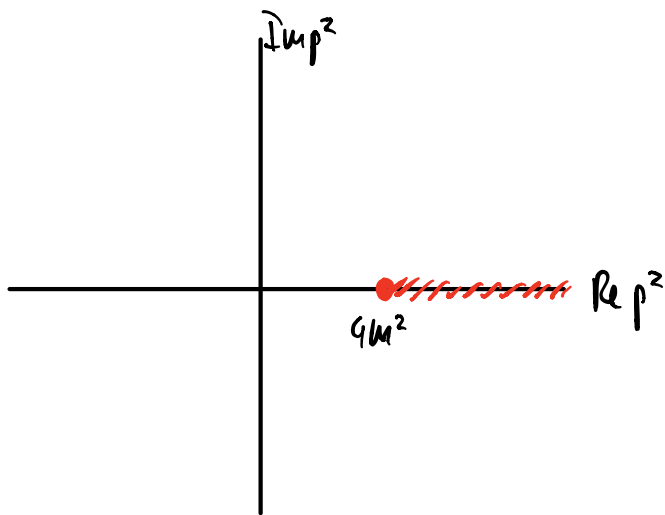
Le parti immaginarie di ampiezze a loop si generano quando le particelle virtuali vanno on-shell

Tornando al nostro esempio 

per $p^2 \geq 4m^2$ c'è una discontinuità sull'asse reale di p^2 :

• $p^2 < 4m^2$ $M(p^2) = M(p^2)^*$ \Rightarrow M è reale

• $p^2 \geq 4m^2$ $\text{Re } M(p^2 + i\epsilon) = \text{Re } M(p^2 - i\epsilon)$
 $\text{Im } M(p^2 + i\epsilon) = -\text{Im } M(p^2 - i\epsilon)$

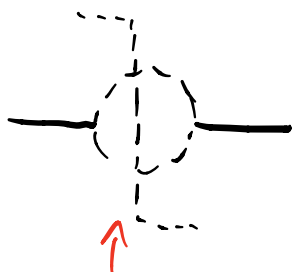


La discontinuità attraverso il taglio è

$$\text{Disc } M(p^2) = 2i \text{Im } M(p^2 + i\epsilon)$$

La possiamo ottenere mettendo on-shell i propagatori nel loop, con la sostituzione:

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2i\pi \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0)$$



$$= \text{Disc}(iM) = -2 \text{Im } M$$

TAGLIO

$$= \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-2\pi i) \delta(p+k)^2 - m^2 (-2\pi i) \delta(k^2 - m^2)$$

PARTICELLE INSTABILI

[S.24.1.4]

Il propagatore completo per uno scalare è dato

da

$$iG(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 + \Sigma(p^2) + i\epsilon}, \quad i\Sigma = \text{---} \textcircled{-iP} \text{---}$$

La massa al polo era definita da $m_p^2 - m_R^2 + \Sigma(m_p^2) = 0$.

Abbiamo visto che se la particella è instabile e può decadere, allora $\Sigma(p^2)$ deve avere una parte immaginaria.

$$\Gamma_{\text{tot}} = \frac{1}{m_p} \text{Im} \Sigma(m_p^2) + \mathcal{O}(\Sigma^2)$$

Il polo del propagatore non sarà più sull'asse reale e dobbiamo modificare la definizione di m_p :

$$m_p^2 - m_R^2 + \text{Re} \Sigma(m_p^2) = 0$$

Vicino al polo, il propagatore diventa:

$$iG(p^2) \approx \frac{i}{p^2 - m_p^2 + i m_p \Gamma_{\text{tot}}}, \quad \text{valido se } \Gamma_{\text{tot}} \ll m_p$$

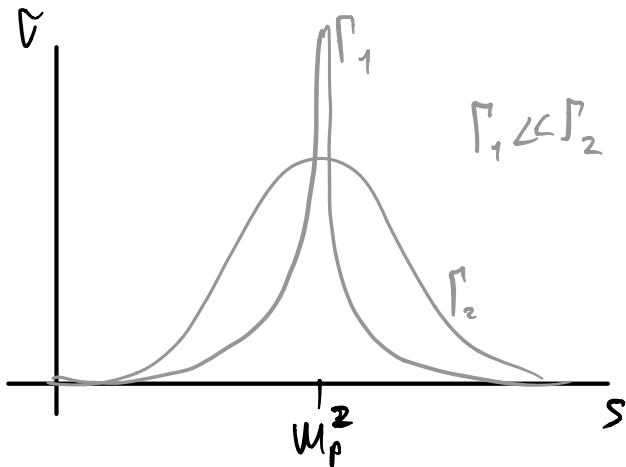
✓

Consideriamo lo scambio di questa particella instabile nel canale s di un processo

$$\sigma \propto \left| \begin{array}{c} \text{diagramma} \end{array} \right|^2 = \lambda^4 \left| \frac{i}{s - m_p^2 + i m_p \Gamma_{\text{tot}}} \right|^2$$

$$= \lambda^4 \frac{1}{(s - m_p^2)^2 + m_p^2 \Gamma_{\text{tot}}^2}$$

← Distribuzione di Breit-Wigner



Per larghezze di decadimento Γ molto piccole, la sezione d'urto è dominata dal picco della Breit-Wigner per $s \sim m_p^2$

Nel limite $\Gamma_{\text{tot}} \rightarrow 0$ possiamo trattare questa distribuzione come una funzione- δ :

NARROW-WIDTH APPROXIMATION

$$\sigma \sim \lambda^4 \frac{\pi}{m_p \Gamma_{\text{tot}}} \delta(s - m_p^2)$$

⇒ In questo modo si fattorizza la produzione ed il decadimento della particella:

$$\sigma(i \rightarrow X \rightarrow f) \approx \sigma(i \rightarrow X) \frac{\Gamma(X \rightarrow f)}{\Gamma_{\text{tot}}} = \sigma(i \rightarrow X) Br(X \rightarrow f)$$