Analisi Numerica: Introduzione

S. Maset

Dipartimento di Matematica e Geoscienze, Università di Trieste

Analisi numerica e calcolo numerico

- La **matematica del continuo** è la matematica che si studia nei corsi di Analisi Matematica e Algebra Lineare. Essa è basata sul concetto di numero reale ed è ampiamente usata nelle scienze applicate (fisica, chimica, ingegneria, ecc...)

  Il **calcolo numerico** o **calcolo scientifico** è quella parte della matematica che si occupa dello sviluppo di algoritmi per la risoluzione dei problemi della matematica del continuo.

  L'**analisi numerica** si occupa dell'analisi matematica di tali algoritmi.

  Presentiamo due semplici problemi della matematica del continuo.

- Il primo problema è la risoluzione di equazioni

$$f(x) = 0,$$

dove $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$.

Esempi di tali equazioni sono

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = 0 \\ f(x) &= ae^{2x} + be^x + c = 0 \\ f(x) &= a\sin x + b\cos x + c = 0, \end{aligned}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Tutte e tre queste equazioni sono **risolubili elementarmente** nel senso che ora spieghiamo.

Le **funzioni matematiche elementari** sono

- le quattro operazioni aritmetiche $+$, $-$, $\times$, $:$;
- le estrazioni di radici $\sqrt[n]{\cdot}$, $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$;
- le funzioni trigonometriche sin, cos, tan e le loro inverse arcsin, arccos, arctan;
- la funzione esponenziale exp e la sua inversa log.

Un'equazione si dice **risolubile elementarmente** se esiste una formula risolutiva, o un procedimento, che permette di esprimere la soluzione (o le soluzioni) a partire dai dati per mezzo delle funzioni matematiche elementari.

Occorre anche dire che la formula risolutiva deve essere di lunghezza finita, o il procedimento consistere di un numero finito di passi, così che la soluzione può essere calcolata in un tempo finito. Non è quindi possibile, ad esempio, esprimere la soluzione tramite una serie.

Un esempio di equazione non risolubile elementarmente è

$$e^{-\lambda x} - mx = 0,$$

dove $\lambda, m > 0$ sono i dati.

Anche un'equazione polinomiale di grado $n \geq 5$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

non è risolubile elementarmente a partire dai dati $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

La stragrande maggioranza delle equazioni che si incontrano non è risolubile elementarmente. Il calcolo numerico insegna come risolvere tali equazioni.

- Il secondo problema è il calcolo di integrali definiti

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

dove $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale fornisce un modo di calcolare gli integrali definiti: data una primitiva F di f, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Non sempre si può usare il teorema fondamentale del calcolo integrale per calcolare gli integrali definiti. Vediamo perché.

Si dice che una funzione è **esprimibile elementarmente** se essa può essere espressa in termini finiti per mezzo delle funzioni matematiche elementari: vale a dire, più formalmente, se essa risulta dalla composizione (l'operazione $\circ$) di un numero finito di funzioni matematiche elementari.

Ora, a differenza della derivata, la primitiva di una funzione esprimibile elementarmente non è in generale esprimibile elementarmente. Ad esempio

$$f(x) = e^{-x^2}$$

ha una primitiva non esprimibile elementarmente.

Quando la funzione integranda non ha una primitiva esprimibile elementarmente, il teorema fondamentale del calcolo integrale non può essere usato per calcolare l'integrale perché non si sa come esprimere la primitiva.

Il calcolo numerico insegna come calcolare gli integrali definiti in una tale situazione.

Alcuni aspetti del calcolo numerico

1) In generale, gli algoritmi del calcolo numerico forniscono solo un'approssimazione della soluzione del problema della matematica del continuo che si vuol risolvere.

   Tuttavia, questa approssimazione può essere buona quanto si vuole. Il prezzo che si paga per ottenere un'approssimazione migliore è un maggior tempo di esecuzione dell'algoritmo.

   Consideriamo ad esempio il problema del calcolo delle radici quadrate: dato $a > 1$, calcolare $\sqrt{a}$. Anche se $\sqrt{\ }$ è considerata una funzione matematica elementare, rimane sempre il problema di come calcolarne i valori.

   Il calcolo numerico risolve questo problema con il **metodo di Newton**. Tale metodo permette di calcolare le radici quadrate utilizzando le quattro operazioni aritmetiche.

Il metodo di Newton costruisce la successione di numeri reali definita ricorsivamente come segue:

$$x_0 = \text{minimo numero naturale il cui quadrato è } \geq a$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ad esempio: per $a = 2$, si ha

$$\sqrt{a} = \sqrt{2} = 1.41421356...$$

e

$$x_0 = 2$$
$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(x_0 + \tfrac{2}{x_0}\right) = \tfrac{1}{2}\left(2 + \tfrac{2}{2}\right) = \tfrac{3}{2} = 1.5$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}\left(x_1 + \tfrac{2}{x_1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{17}{6} = \tfrac{17}{12} = 1.4167$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2}\left(x_2 + \tfrac{2}{x_2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{17}{12} + \tfrac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{17}{12} + \tfrac{24}{17}\right) = \tfrac{577}{408} = 1.41421568$$

e così avanti.

Con il metodo di Newton si ottiene una successione $\{x_n\}$ strettamente decrescente tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Per cui, in un tempo finito, l'algoritmo può solo fornire un'approssimazione x_n di $\sqrt{a}$, ma mai esattamente $\sqrt{a}$.

L'algoritmo può però fornire approssimazioni buone quanto si vuole: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice N tale che, per $n \geq N$,

$$\left| x_n - \sqrt{a} \right| \leq \varepsilon.$$

Ovviamente, al diminuire di ε un tale indice N deve diventare più grande, cioè l'algoritmo impiega più tempo a fornire un'approssimazione x_n tale che $\left| x_n - \sqrt{a} \right| \leq \varepsilon$.

2) Un generico numero reale è un oggetto matematico che non può essere manipolato da un agente di calcolo (computer o essere umano), dal momento che esso è descritto da un numero infinito di cifre.

Per poter essere trattato, un generico numero reale deve essere **discretizzato**, cioè approssimato con un numero descritto da un numero finito di cifre.

Sono detti **numeri di macchina** i numeri descritti da un numero finito di cifre in cui i numeri reali sono discretizzati. I numeri di macchina sono i numeri effettivamente utilizzati dall'agente di calcolo durante le computazioni.

3) Spesso, gli algoritmi del calcolo numerico sono analizzati supponendo di poter effettivamente manipolare un numero reale con tutte le sue cifre. Questo ovviamente solo nell'analisi dell'algoritmo, perché nella sua effettiva implementazione si ha a che fare solo con numeri di macchina.

Ad esempio, nell'analisi del metodo di Newton, i numeri x_n che successivamente si calcolano sono considerati con tutte le loro infinite cifre. Questo solo nell'analisi del metodo, perché nella sua implementazione gli x_n sono numeri di macchina.

Tuttavia, anche supponendo di poter manipolare i numeri reali, gli algoritmi del calcolo numerico hanno bisogno lo stesso di operare una discretizzazione.

Infatti, essi devono comunque trattare con oggetti matematici descritti da un numero finito di numeri reali.

Ad esempio, una generica funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ non può essere descritta da un numero finito di numeri reali perchè bisogna assegnare un numero reale, $f(x)$, per ogni punto x di $[a, b]$.

Per poter essere trattata, la funzione f deve essere **discretizzata**, cioè approssimata da un oggetto matematico descritto da un numero finito di numeri reali.

Ad esempio, dati certi punti distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dell'intervallo $[a, b]$, la funzione f potrebbe essere discretizzata

- nella $(n+1)$-upla
$$(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

- oppure nel polinomio di grado n
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
tale che
$$p(x_i) = f(x_i),\ i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$
descritto dagli $n+1$ coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

In maniera più formale, possiamo dire che quando si opera con oggetti matematici che sono elementi di uno spazio vettoriale U di dimensione infinita occorre discretizzarli in elementi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita.

Un elemento di V, infatti, può essere descritto da un numero finito di numeri reali, che sono le componenti dell'elemento in una base prefissata di V.

Nell'esempio sopra, gli elementi dello spazio vettoriale di dimensione infinita U delle funzioni $[a, b] \to \mathbb{R}$ sono discretizzati

- negli elementi $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ dello spazio vettoriale di dimensione finita $V = \mathbb{R}^{n+1}$, descritti dai numeri $y_0, y_1, \ldots, y_n$ che sono le componenti di y nella base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$,
- oppure negli elementi

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

  dello spazio vettoriale di dimensione finita $V = \Pi_n$ dei polinomi di grado $\leq n$, descritti dai numeri $a_0, a_1, \ldots, a_n$ che sono le componenti di p nella base $1, x, \ldots, x^n$ di Π_n.

Il corso

- Nel corso si tratteranno i seguenti argomenti.

  1) Condizionamento: quanto viene perturbata la soluzione di un problema a fronte di una perturbazione sui dati del problema.

  2) Approssimazione dei numeri reali con numeri di macchina ed effetto nelle computazioni della discretizzazione con numeri di macchina.

  3) Calcolo degli zeri di una funzione.

  4) Approssimazione di una funzione tramite interpolazione.

  5) Calcolo di integrali definiti.

  Verrà anche introdotto e usato l'ambiente di calcolo MATLAB.