

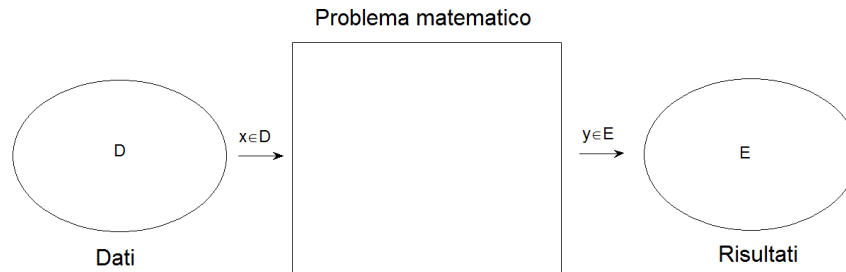
Condizionamento

S. Maset
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
maset@units.it

April 15, 2021

1 Problema matematico e funzione dato-risultato

Un *problema matematico* è caratterizzato da un *insieme di possibili dati* D e dal fatto che per ogni *dato* $x \in D$ del problema vi è un corrispondente *risultato* (o soluzione) y appartenente ad un insieme E .

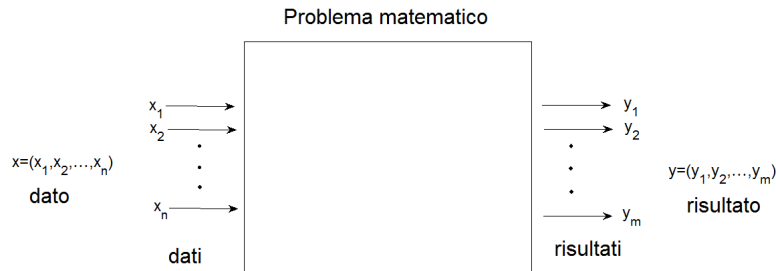


Pertanto, un problema matematico è caratterizzato dalla (e può essere identificato con la) *funzione dato-risultato* $f : D \rightarrow E$ che associa ad ogni dato $x \in D$ il corrispondente risultato $y \in E$. Si ha $y = f(x)$.

Si assumerà che i dati siano vettori di \mathbb{R}^n , vale a dire $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e che i corrispondenti risultati siano vettori di \mathbb{R}^m , vale a dire $E \subseteq \mathbb{R}^m$.

In questo modo, se un problema ha molti dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ e molti risultati $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$, questi vengono raggruppati in unico vettore di dati, il dato

$x = (x_1, \dots, x_n)$, e in un unico vettore di risultati, il risultato $y = (y_1, \dots, y_m)$.



Esempio 1 Il problema matematico di risolvere l'equazione di secondo grado

$$ay^2 + by + c = 0,$$

ha come insieme di possibili dati

$$D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \neq 0 \text{ e } b^2 - 4ac \geq 0\}$$

e il risultato corrispondente al dato (a, b, c) è la coppia (y_1, y_2) di radici dell'equazione.

Per cui, la funzione dato-risultato $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è data da

$$f(a, b, c) = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right), (a, b, c) \in D.$$

2 Teoria del condizionamento

La *teoria del condizionamento* studia, in un problema matematico caratterizzato da una funzione dato-risultato f , come viene perturbato il risultato $y = f(x)$ a fronte di una perturbazione del dato $x \in D$.

Questa teoria è estremamente importante dal punto di vista applicativo, in quanto un dato non sarà mai noto in maniera esatta, ma si disporrà invece solo di una sua approssimazione.

Si pensi al caso in cui il dato è un vettore le cui componenti derivano da misurazioni di grandezze fisiche. Poichè il dato disponibile (misurato) \tilde{x} è solo un'approssimazione del dato vero x , anche il risultato disponibile $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ è solo un'approssimazione del risultato vero $y = f(x)$.

La teoria del condizionamento permette di dedurre l'ordine di grandezza dell'errore che ha il risultato disponibile \tilde{y} rispetto al risultato vero y , a partire dall'ordine di grandezza dell'errore che ha il dato disponibile \tilde{x} rispetto al dato vero x .

Occorre ora precisare cosa si intende per errore.

3 Errore assoluto e errore relativo

Sia x un numero reale e sia \tilde{x} una sua approssimazione o una sua perturbazione. L'errore assoluto dell'approssimazione \tilde{x} è

$$\varepsilon_a = \tilde{x} - x,$$

mentre l'errore relativo, definito per $x \neq 0$, è

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{x} = \frac{\tilde{x} - x}{x}. \quad (1)$$

Per applicazioni scientifiche ed ingegneristiche l'errore relativo è la nozione più importante. Un errore assoluto di 5m sull'altezza di una montagna è sicuramente meno grave di un errore assoluto di 5m sull'altezza di un ponte: nel primo caso l'errore relativo è molto minore che nel secondo caso.

La precisione dell'approssimazione viene colta solo dall'errore relativo. Un errore assoluto di $10^{-5} \text{ m} = 10^4 \text{ nm}$ non può essere considerato nè grande nè piccolo finchè non lo si raffronta a qualche lunghezza: è piccolo per lunghezze dell'ordine del metro ed è grande per lunghezze dell'ordine del nanometro. Solo l'errore relativo, che è una quantità adimensionale, può essere considerato grande o piccolo.

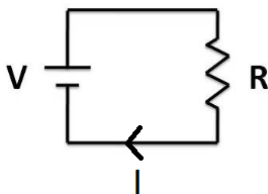
Invece, negli ambiti che hanno a che fare con il denaro è l'errore assoluto la nozione più importante. Ad esempio, un individuo A può concedere che un individuo B gli restituisca solo 10 Euro su un debito di 13 Euro, ma con più difficoltà concederebbe che gli vengano restituiti solo 10 000 Euro su un debito di 13 000 Euro, pur essendo l'ammancio relativo il medesimo.

Si noti che la (1) può essere riscritta come

$$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon_r)$$

ed è in questa forma che verrà spesso usata.

Esempio 2 Consideriamo il circuito elettrico a corrente continua in figura



Supponiamo che il valore misurato della tensione ai capi della batteria sia $V_m = 12 \text{ V}$ con un'incertezza del 1% e che il valore misurato della resistenza sia $R_m = 10 \text{ k}\Omega$ con un'incertezza del 2%. Allora l'intensità di corrente elettrica è

$$I_m = \frac{V_m}{R_m} = 1.2 \text{ mA}.$$

Qual è l'incertezza di I_m ?

Più specificatamente, denotati con V , R e

$$I = \frac{V}{R},$$

i valori veri di tensione, resistenza e intensità di corrente, rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} V &= V_m (1 + \tilde{\varepsilon}_V) = V_m + \tilde{\varepsilon}_V V_m \text{ con } |\tilde{\varepsilon}_V| \leq 1\% \\ R &= R_m (1 + \tilde{\varepsilon}_R) = R_m + \tilde{\varepsilon}_R R_m \text{ con } |\tilde{\varepsilon}_R| \leq 2\% \end{aligned}$$

e

$$I = I_m (1 + \tilde{\varepsilon}_I) = I_m + \tilde{\varepsilon}_I I_m,$$

e ci si domanda quanto grande può essere $|\tilde{\varepsilon}_I|$.

Cercheremo di rispondere a questo nelle prossime sezioni.

In questa situazione, gli errori relativi vanno interpretati vedendo V , R e I come approssimazioni o perturbazioni di V_m , R_m e I_m , rispettivamente. Sarebbe più naturale vedere V_m , R_m e I_m come approssimazioni o perturbazioni di V , R e I , rispettivamente, ma la sostanza cambia poco. Infatti, se

$$x = \tilde{x} (1 + \tilde{\varepsilon}_r)$$

allora

$$\tilde{x} = x (1 + \varepsilon_r)$$

con

$$\varepsilon_r = \frac{\tilde{x}}{x} - 1 = \frac{1}{1 + \tilde{\varepsilon}_r} - 1 = -\frac{\tilde{\varepsilon}_r}{1 + \tilde{\varepsilon}_r}$$

e, assumendo $|\tilde{\varepsilon}_r| < 1$,

$$|\varepsilon_r| = \frac{|\tilde{\varepsilon}_r|}{|1 + \tilde{\varepsilon}_r|} \leq \frac{|\tilde{\varepsilon}_r|}{1 - |\tilde{\varepsilon}_r|} = |\tilde{\varepsilon}_r| (1 + |\tilde{\varepsilon}_r| + |\tilde{\varepsilon}_r|^2 + \dots) = |\tilde{\varepsilon}_r| + |\tilde{\varepsilon}_r|^2 + \dots$$

Per cui,

$$\begin{aligned} V_m &= V (1 + \varepsilon_V) \text{ con } |\varepsilon_V| \leq |\tilde{\varepsilon}_V| + |\tilde{\varepsilon}_V|^2 + \dots \approx 1.01\% \\ R_m &= R (1 + \varepsilon_R) \text{ con } |\varepsilon_R| \leq |\tilde{\varepsilon}_R| + |\tilde{\varepsilon}_R|^2 + \dots \approx 2.04\%. \end{aligned}$$

4 Errori sul dato e errore sul risultato

Nel seguito consideriamo un problema matematico caratterizzato da una funzione dato-risultato $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dove D è un aperto.

Sia $x \in D$ e sia $y = f(x)$. Assumiamo ora di perturbare il dato x in $\tilde{x} \in D$ e sia $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ il risultato perturbato.

Il fatto che D sia aperto non impone vincoli sulla direzione della perturbazione $\tilde{x} - x$, in quanto x è sempre circondato da una palla di centro x interamente inclusa in D .

Vogliamo studiare quanto la perturbazione sul dato influisca sul risultato. Nel seguito si assumerà f di classe C^2 .

Assumiamo $x_1, \dots, x_n \neq 0$ e $y \neq 0$. Introduciamo gli errori relativi

$$\varepsilon_i = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

sulle componenti del dato e l'errore relativo

$$\delta = \frac{\tilde{y} - y}{y}.$$

sul risultato. Vogliamo vedere come l'errore δ dipenda dagli errori ε_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

5 Indici di condizionamento

Essendo f di classe C^2 , si ha

$$\begin{aligned} \tilde{y} - y &= f(\tilde{x}) - f(x) \\ &= \nabla f(x)^T (\tilde{x} - x) + R(\tilde{x}, x) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot (\tilde{x}_i - x_i) + R(\tilde{x}, x), \end{aligned}$$

dove il resto $R(\tilde{x}, x)$ dello sviluppo di Taylor è tale che

$$R(\tilde{x}, x) = O\left(\|\tilde{x} - x\|^2\right), \quad \|\tilde{x} - x\| \rightarrow 0, \quad (2)$$

dove $\|\cdot\|$ è una norma arbitraria su \mathbb{R}^n . Questo vuol dire

$$\exists d > 0 \exists C \geq 0 \forall \tilde{x} \in D : \|\tilde{x} - x\| \leq d \Rightarrow |R(\tilde{x}, x)| \leq C \|\tilde{x} - x\|^2.$$

In Analisi II si è visto che (2) vale quando si usa $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Dall'equivalenza delle norme su \mathbb{R}^n , si ha che (2) vale per una norma arbitraria $\|\cdot\|$ su \mathbb{R}^n . Usando la norma $\|\cdot\|_\infty$, la (2) dice che: esistono $d > 0$ e $C \geq 0$ tali che

$$|R(\tilde{x}, x)| \leq C \|\tilde{x} - x\|_\infty^2, \quad \text{per } \tilde{x} \in D \text{ tale che } \|\tilde{x} - x\|_\infty \leq d. \quad (3)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\tilde{y} - y}{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \underbrace{(\tilde{x}_i - x_i)}_{=\varepsilon_i x_i} + R(\tilde{x}, x)}{y} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) x_i}{y} \cdot \varepsilon_i + \frac{R(\tilde{x}, x)}{y}. \end{aligned}$$

Mostriamo ora che il termine $\frac{R(\tilde{x}, x)}{y}$ può essere trascurato.

Introducendo il vettore $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, si ottiene

$$\|\tilde{x} - x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\tilde{x}_i - x_i| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \underbrace{|\varepsilon_i x_i|}_{=|\varepsilon_i| \|x_i\| \leq \|\varepsilon\|_\infty \|x\|_\infty} \leq \|\varepsilon\|_\infty \|x\|_\infty.$$

Per cui, se

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \frac{d}{\|x\|_\infty}$$

e quindi

$$\|\tilde{x} - x\|_\infty \leq \|\varepsilon\|_\infty \|x\|_\infty \leq \frac{d}{\|x\|_\infty} \|x\|_\infty = d,$$

si ha (ricordare (3))

$$\left| \frac{R(\tilde{x}, x)}{y} \right| = \frac{|R(\tilde{x}, x)|}{|y|} \leq \frac{C \|\tilde{x} - x\|_\infty^2}{|y|} \leq \frac{C \|x\|_\infty^2}{|y|} \|\varepsilon\|_\infty^2.$$

Essendo gli errori relativi ε_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, numeri piccoli, si può trascurare il termine $\frac{R(\tilde{x}, x)}{y}$ rispetto agli altri termini in

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) x_i}{y} \cdot \varepsilon_i + \frac{R(\tilde{x}, x)}{y}$$

in quanto esso è maggiorato in modulo da un multiplo di $\|\varepsilon\|_\infty^2 = \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_i| \right)^2$, mentre gli altri termini sono multipli degli errori ε_i .

Scriviamo allora

$$\delta \doteq \sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i, \quad (4)$$

dove

$$K_i(f, x) := \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) x_i}{y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) x_i}{f(x)}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

e il segno \doteq significa:

uguale a meno di un termine il cui valore assoluto è minore o uguale di una costante (indipendente da $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$) volte $\|\varepsilon\|_\infty^2$, per $\|\varepsilon\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_i|$ sufficientemente piccolo; detto in maniera più succinta, tale termine è $O\left(\|\varepsilon\|_\infty^2\right)$ per $\|\varepsilon\|_\infty^2 \rightarrow 0$.

In (4), i due membri sono uguali a meno del termine

$$\frac{R(\tilde{x}, x)}{y}$$

per il quale

$$\left| \frac{R(\tilde{x}, x)}{y} \right| \leq \underbrace{\frac{C \|x\|_\infty^2}{|y|}}_{\text{costante indipendente da } \varepsilon} \|\varepsilon\|_\infty^2 \text{ per } \underbrace{\|\varepsilon\|_\infty \leq \frac{d}{\|x\|_\infty}}_{\|\varepsilon\|_\infty \text{ sufficientemente piccolo}}.$$

I numeri $K_i(f, x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sono detti *indici di condizionamento* di f (del problema matematico corrispondente) relativi al dato x e sono definiti per $x \in D$ tale che $x_i \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e $y = f(x) \neq 0$, così da poter considerare gli errore relativi ε_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, e l'errore relativo δ .

Gli indici di condizionamento indicano come l'errore relativo sul risultato y sia condizionato dagli (sia sensibile agli) errori relativi sui dati x_1, \dots, x_n .

Esercizio. Se x_1, \dots, x_n, y sono grandezze fisiche con delle dimensioni, qual è la dimensione degli indici di condizionamento?

6 Il caso $n = 1$

Nel caso $n = 1$, si ha

$$\delta \doteq K(f, x) \cdot \varepsilon,$$

dove $\varepsilon = \varepsilon_1$ è l'errore relativo su $x = x_1$ e

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)}.$$

Esempio 3 Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha, per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ (e quindi anche $y = f(x) = ax \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{ax}{ax} = 1.$$

Quindi si ha

$$\delta \doteq \varepsilon.$$

In questo caso si ha

$$\delta = \varepsilon$$

come può essere verificato direttamente:

$$\delta = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{a\tilde{x} - ax}{ax} = \frac{\tilde{x} - x}{x} = \varepsilon.$$

7 Buon condizionamento

La funzione f (il problema matematico corrispondente) si dice *ben condizionata* sul dato x se tutti gli indici di condizionamento di f relativi al dato x hanno ordine di grandezza non superiore all'unità.

Formalmente, l'ordine di grandezza di un numero a con *rappresentazione normalizzata* in base 10 (o *rappresentazione scientifica*)

$$a = \pm A \cdot 10^p,$$

dove $A \in [1, 10)$ e $p \in \mathbb{Z}$, è la potenza 10^p . Quindi dire che a ha ordine di grandezza non superiore all'unità significa $p \leq 0$, cioè $|a| < 10$.

Tuttavia non vogliamo essere così formali: il dire che a ha ordine di grandezza non superiore all'unità qui semplicemente significa: a non è un numero grande, cioè non si ha $|a| \gg 1$. (Osservare che "a grande" vuol dire $|a| \gg 1$ e "a piccolo" vuol dire $|a| \ll 1$).

Vi è un po' di imprecisione voluta in questo, nel senso che tutti accordano nel dire che 0.1, 1, 10 sono numeri non grandi e $10^3, 10^4, 10^5$ sono numeri grandi, ma i numeri che stanno in mezzo possono essere interpretati sia come non grandi che come grandi in dipendenza dal contesto.

Per cui, dire che f è ben condizionata sul dato x significa

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \text{non } |K_i(f, x)| \gg 1.$$

Se f è ben condizionata sul dato x , allora l'errore relativo δ sul risultato ha ordine di grandezza non superiore al massimo ordine di grandezza degli errori relativi ε_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sui dati. Qui, con questo intendiamo dire che non si ha

$$|\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_i|.$$

Infatti, da

$$\delta = \sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i$$

segue

$$\begin{aligned} |\delta| &= \left| \sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i| = \sum_{i=1}^n |K_i(f, x)| \cdot |\varepsilon_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |K_i(f, x)| \cdot \|\varepsilon\|_\infty = \left(\sum_{i=1}^n |K_i(f, x)| \right) \cdot \|\varepsilon\|_\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Usando la notazione

$$a \leq b \text{ per dire } a = c \text{ e } c \leq b \text{ per qualche numero } c,$$

possiamo allora scrivere

$$|\delta| \leq \left(\sum_{i=1}^n |K_i(f, x)| \right) \cdot \|\varepsilon\|_\infty,$$

dove

$$\sum_{i=1}^n |K_i(f, x)|$$

non è un numero grande quando f è ben condizionata sul dato x . Questo naturalmente risulta vero supponendo che n non sia grande, come assumeremo nel seguito. Pertanto, non si può avere $|\delta| \ll \|\varepsilon\|_\infty$, quando f è ben condizionata sul dato x

Esercizio. In (5) si è usato il fatto che

$$\delta \doteq \sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i \quad \text{implica} \quad |\delta| \doteq \left| \sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i \right|.$$

Provare che $A \doteq B$ implica $|A| \doteq |B|$.

8 Mal condizionamento

La funzione f (il problema matematico corrispondente) si dice *mal condizionata* sul dato x se non è ben condizionata sul dato x , vale a dire se esiste un indice di condizionamento di f relativo al dato x che ha ordine di grandezza superiore all'unità, vale a dire se

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} : |K_i(f, x)| \gg 1.$$

Se f è mal condizionata sul dato x , allora “si può avere” che δ ha ordine di grandezza superiore al massimo ordine di grandezza degli ε_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, vale a dire “si può avere” che

$$|\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\varepsilon_i|.$$

Specifichiamo meglio l'uso di “si può avere” fatto sopra.

- 1) Se esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $|K_j(f, x)| \gg 1$, allora, per errori ε_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, tali che $\varepsilon_j \neq 0$ e $\varepsilon_i = 0$ per $i \neq j$, si ha

$$\delta \doteq K_j(f, x) \cdot \varepsilon_j$$

e quindi $|\delta| \gg |\varepsilon_j| = \|\varepsilon\|_\infty$. Quindi, in tal caso, f è mal condizionata sul dato x e $|\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty$.

- 2) D'altra parte, se esistono $j, k \in \{1, \dots, n\}$ con $j \neq k$ tali che $K_j(f, x) = K_k(f, x)$ e $|K_j(f, x)| = |K_k(f, x)| \gg 1$, allora, per errori $\varepsilon_i, i \in \{1, \dots, n\}$, tali che $\varepsilon_j = -\varepsilon_k \neq 0$ e $\varepsilon_i = 0$ per $i \neq j$ e $i \neq k$, si ha

$$\delta \doteq K_j(f, x) \cdot \varepsilon_j + K_k(f, x) \cdot \varepsilon_k = 0.$$

Quindi, in tal caso, f è mal condizionata sul dato x ma non si ha $|\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty = |\varepsilon_j| = |\varepsilon_k|$.

Esercizio. Cosa si può dire dell'errore δ in tale situazione? E' uguale a zero?

Il motivo per cui, in caso di mal condizionamento, si può anche non avere $|\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty$ è che termini $K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i$ con $|K_i(f, x)| \gg 1$ possono compensarsi nella somma $\sum_{i=1}^n K_i(f, x) \cdot \varepsilon_i$.

Esercizio. Nel caso $n = 1$, si può dire che

$$f \text{ mal condizionata sul dato } x \Rightarrow |\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty?$$

9 Indici di condizionamento delle operazioni aritmetiche

Vediamo ora gli indici di condizionamento delle operazioni aritmetiche.

Addizione:

$$f(x) = x_1 + x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Si ha, per $x \in \mathbb{R}^2$ con $x_1, x_2 \neq 0$ e $x_1 \neq -x_2$ (quindi $y = f(x) = x_1 + x_2 \neq 0$),

$$K_1(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{1 \cdot x_1}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

$$K_2(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

e quindi

$$\delta \doteq \frac{x_1}{x_1 + x_2} \cdot \varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \cdot \varepsilon_2.$$

Sottrazione:

$$f(x) = x_1 - x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Si ha, per $x \in \mathbb{R}^2$ con $x_1, x_2 \neq 0$ e $x_1 \neq x_2$ (quindi $y = f(x) = x_1 - x_2 \neq 0$),

$$K_1(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{1 \cdot x_1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$$

$$K_2(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{(-1) \cdot x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_2}{x_1 - x_2}$$

e quindi

$$\delta \doteq \frac{x_1}{x_1 - x_2} \cdot \varepsilon_1 - \frac{x_2}{x_1 - x_2} \cdot \varepsilon_2.$$

Per cui, per addizione e sottrazione \pm si ha

$$\delta \doteq \frac{x_1}{x_1 \pm x_2} \cdot \varepsilon_1 \pm \frac{x_2}{x_1 \pm x_2} \cdot \varepsilon_2.$$

Moltiplicazione:

$$f(x) = x_1 x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Si ha, per $x \in \mathbb{R}^2$ con $x_1, x_2 \neq 0$ (e quindi anche $y = f(x) = x_1 x_2 \neq 0$),

$$\begin{aligned} K_1(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{x_2 \cdot x_1}{x_1 x_2} = 1 \\ K_2(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 x_2} = 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\delta \doteq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Divisione:

$$f(x) = \frac{x_1}{x_2}, \quad x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\}.$$

Si ha, per $x \in D$ con $x_1 \neq 0$ (quindi $y = f(x) = \frac{x_1}{x_2} \neq 0$),

$$\begin{aligned} K_1(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x_2} \cdot x_1}{\frac{x_1}{x_2}} = 1 \\ K_2(f, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{\left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right) \cdot x_2}{\frac{x_1}{x_2}} = -1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\delta \doteq \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Esempio 4 *Riconsideriamo la questione dell'incertezza delle misure V_m , R_m e I_m di V , R e I , rispettivamente, nel circuito elettrico precedentemente considerato. Si ha*

$$\begin{aligned} V &= V_m (1 + \tilde{\varepsilon}_V) \quad \text{con } |\tilde{\varepsilon}_V| \leq 1\% \\ R &= R_m (1 + \tilde{\varepsilon}_R) \quad \text{con } |\tilde{\varepsilon}_R| \leq 2\% \end{aligned}$$

e

$$I = I_m (1 + \tilde{\varepsilon}_I),$$

dove

$$I = \frac{V}{R} \text{ e } I_m = \frac{V_m}{R_m},$$

e ci si domanda quanto grande può essere $|\tilde{\varepsilon}_I|$. Risulta

$$\tilde{\varepsilon}_I \doteq \tilde{\varepsilon}_V - \tilde{\varepsilon}_R$$

e quindi

$$|\tilde{\varepsilon}_I| \doteq |\tilde{\varepsilon}_V - \tilde{\varepsilon}_R| \leq |\tilde{\varepsilon}_V| + |\tilde{\varepsilon}_R| \leq 1\% + 2\% = 3\%.$$

Si ha $|\tilde{\varepsilon}_I| \leq 3\%$. L'incertezza di I_m è pertanto del 3%.

Opposto:

$$f(x) = -x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Questo è il caso $a = -1$ della funzione $f(x) = ax$ vista in precedenza: si ha, per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ (e quindi anche $f(x) = -x \neq 0$),

$$K(f, x) = 1$$

e quindi

$$\delta \doteq \varepsilon.$$

Questo si può anche ottenere considerando $-x$ come la sottrazione $0 - x$ dove il minuendo 0 non è perturbato: si ha

$$\delta \doteq \frac{0}{0-x} \cdot 0 - \frac{x}{0-x} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Reciproco:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

Si ha, per $x \in D$ (e quindi anche $y = f(x) = \frac{1}{x} \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x}{\frac{1}{x}} = -1$$

e quindi

$$\delta \doteq -\varepsilon.$$

Questo si può anche ottenere considerando $\frac{1}{x}$ come la divisione di 1 per x dove il divisore 1 non è perturbato: si ha

$$\delta \doteq 0 - \varepsilon = -\varepsilon.$$

10 Buon e mal condizionamento delle operazioni aritmetiche

Esaminiamo ora il buon e mal condizionamento delle operazioni aritmetiche.

Riscrivendo gli indici di condizionamento dell'addizione come

$$K_1(f, x) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{1}{1 + \frac{x_2}{x_1}}$$

$$K_2(f, x) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{1 + \frac{x_1}{x_2}}$$

si vede che il mal condizionamento è presente solo nel caso di un'addizione $x_1 + x_2$ con $\frac{x_1}{x_2} \approx -1$ e quindi anche $\frac{x_2}{x_1} \approx -1$: per $\frac{x_1}{x_2}$ vicino a -1 entrambi gli indici di condizionamento sono numeri grandi, mentre per $\frac{x_1}{x_2}$ non vicino a -1 entrambi gli indici di condizionamento sono numeri non grandi.

Analogamente, riscrivendo gli indici di condizionamento della sottrazione come

$$K_1(f, x) = \frac{x_1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{1 - \frac{x_2}{x_1}}$$

$$K_2(f, x) = -\frac{x_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{1 - \frac{x_1}{x_2}}$$

si vede che il mal condizionamento è presente solo nel caso di una sottrazione $x_1 - x_2$ con $\frac{x_1}{x_2} \approx 1$: per $\frac{x_1}{x_2}$ vicino a 1 entrambi gli indici di condizionamento sono numeri grandi, mentre per $\frac{x_1}{x_2}$ non vicino a 1 entrambi gli indici di condizionamento sono numeri non grandi.

Ricordare che, comunque, stiamo assumendo $\frac{x_1}{x_2} \neq -1$ per l'addizione e $\frac{x_1}{x_2} \neq 1$ per la sottrazione in modo da avere $y \neq 0$.

Le altre operazioni aritmetiche di moltiplicazione, divisione, opposto e reciproco sono ben condizionate su ogni dato, dal momento che gli indici di condizionamento sono costantemente uguali a 1 o -1 .

11 Cancellazione numerica

Per capire il mal condizionamento nel caso di una sottrazione con $\frac{x_1}{x_2} \approx 1$, si consideri $y = x_1 - x_2$ con

$$x_1 = b_0.b_1 \dots b_{k-1}b_k$$

$$x_2 = b_0.b_1 \dots b_{k-1}c_k,$$

dove $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_k, c_k$ sono cifre decimali con $b_0 \neq 0$, $b_0 \neq 9$ e $b_k \neq c_k$. Si perturbi adesso x_1 e x_2 in

$$\tilde{x}_1 = b_0.b_1 \dots b_{k-1}b_k b_{k+1}$$

$$\tilde{x}_2 = b_0.b_1 \dots b_{k-1}c_k c_{k+1},$$

dove b_{k+1} e c_{k+1} sono cifre decimali con $b_{k+1} \geq b_0 + 1$, $c_{k+1} \geq b_0 + 1$ e $|b_{k+1} - c_{k+1}| \geq |b_k - c_k|$,

Si ha

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\tilde{x}_1 - x_1}{x_1} = \frac{b_{k+1} \cdot 10^{-k-1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} b_k} = \frac{b_{k+1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} b_k} \cdot 10^{-k-1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\tilde{x}_2 - x_2}{x_2} = \frac{c_{k+1} \cdot 10^{-k-1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} c_k} = \frac{c_{k+1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} c_k} \cdot 10^{-k-1}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\frac{b_{k+1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} b_k} &\leq \frac{b_{k+1}}{b_0} \leq \frac{9}{1} = 9 \\ \frac{c_{k+1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} c_k} &\leq \frac{c_{k+1}}{b_0} \leq \frac{9}{1} = 9\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{b_{k+1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} b_k} &\geq \frac{b_{k+1}}{b_0 + 1} \geq 1 \text{ essendo } b_{k+1} \geq b_0 + 1 \\ \frac{c_{k+1}}{b_0 \cdot b_1 \dots b_{k-1} c_k} &\geq \frac{c_{k+1}}{b_0 + 1} \geq 1 \text{ essendo } c_{k+1} \geq b_0 + 1.\end{aligned}$$

Quindi ε_1 e ε_2 hanno ordine di grandezza $10^{-(k+1)}$.

D'altra parte

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\tilde{y} - y}{y} \\ &= \frac{\underbrace{(b_k - c_k) \cdot 10^{-k} + (b_{k+1} - c_{k+1}) \cdot 10^{-k-1}}_{=\tilde{y} - \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2} - \underbrace{(b_k - c_k) \cdot 10^{-k}}_{=y = x_1 - x_2}}{(b_k - c_k) \cdot 10^{-k}} \\ &= \frac{(b_{k+1} - c_{k+1}) \cdot 10^{-k-1}}{(b_k - c_k) \cdot 10^{-k}} = \frac{b_{k+1} - c_{k+1}}{b_k - c_k} \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

con

$$\left| \frac{b_{k+1} - c_{k+1}}{b_k - c_k} \right| = \frac{|b_{k+1} - c_{k+1}|}{|b_k - c_k|} \leq \frac{9}{1} = 9$$

e

$$\left| \frac{b_{k+1} - c_{k+1}}{b_k - c_k} \right| = \frac{|b_{k+1} - c_{k+1}|}{|b_k - c_k|} \geq 1 \text{ essendo } |b_{k+1} - c_{k+1}| \geq |b_k - c_k|.$$

Quindi δ ha ordine di grandezza 10^{-1} . Si conclude che δ è più grande di ε_1 e ε_2 di k ordini di grandezza.

In situazioni come queste si parla di *cancellazione numerica*, in quanto l'esplosione dell'errore relativo su $y = x_1 - x_2$ rispetto agli errori relativi su x_1 e x_2 è dovuta alla cancellazione delle cifre significative iniziali uguali b_0, b_1, \dots, b_{k-1} nel momento in cui si fa la differenza.

Tale cancellazione porta in posizione più significativa le perturbazioni b_{k+1} e c_{k+1} : si ha

$$\begin{aligned} x_1 &: b_0.b_1 \dots b_{k-1}b_k - \\ x_2 &: b_0.b_1 \dots b_{k-1}c_k \\ y &: 0.0 \dots 0(b_k - c_k) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &: b_0.b_1 \dots b_{k-1}b_k b_{k+1} - \\ \tilde{x}_2 &: b_0.b_1 \dots b_{k-1}c_k c_{k+1} \\ \tilde{y} &: 0.0 \dots 0(b_k - c_k)(b_{k+1} - c_{k+1}). \end{aligned}$$

Mentre in \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 le perturbazioni sono nella $k+2$ -esima cifra significativa, in \tilde{y} finiscono nella seconda cifra significativa.

12 Esercizi

Esercizio. Spiegare perchè nel caso di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vale a dire

$$f(x) = a^T x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$, si può sostituire \doteq con $=$ nella relazione tra l'errore δ e gli errori ε_i . Osservare che addizione, sottrazione e

$$f(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R}$, sono funzioni lineari.

Esercizio. Provare che nel caso di una somma $x_1 + x_2$ con x_1 e x_2 dello stesso segno, risulta

$$|\delta| \leq \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}.$$

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento delle funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad g(x) = x_1 x_2 \dots x_n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

13 Indici di condizionamento delle funzioni matematiche elementari

Vediamo ora gli indici di condizionamento di alcune funzioni matematiche elementari.

Potenza ad esponente $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}, \quad x > 0.$$

Si ha, per $x > 0$ (e quindi $x \neq 0$ e $f(x) = e^{x \log x} \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x}{x^\alpha} = \alpha$$

e quindi

$$\delta \doteq \alpha \cdot \varepsilon.$$

Per cui, a meno che non si abbia α grande, la potenza ad esponente reale α è ben condizionata su ogni dato.

Nel caso particolare $\alpha = \frac{1}{n}$, dove n è un intero positivo, si ha che la radice n -esima è ben condizionata su ogni dato.

Esponenziale:

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha, per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ (e quindi anche $f(x) = e^x \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{e^x x}{e^x} = x$$

e quindi

$$\delta \doteq x \cdot \varepsilon.$$

Per cui, la funzione esponenziale è mal condizionata se e solo se x è grande.

Logaritmo:

$$f(x) = \log x, \quad x > 0.$$

Si ha per $x > 0$ con $x \neq 1$ (e quindi $x \neq 0$ e $f(x) = \log x \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x}{\log x} = \frac{1}{\log x}$$

e quindi

$$\delta \doteq \frac{1}{\log x} \cdot \varepsilon.$$

Per cui, la funzione logaritmo è mal condizionata se e solo se $x \approx 1$, dove $\log x$ è piccolo.

Seno:

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha, per x che non è un multiplo di π (e quindi $x \neq 0$ e $f(x) = \sin x \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{\cos x \cdot x}{\sin x} = \frac{x}{\tan x}$$

e quindi

$$\delta \doteq \frac{x}{\tan x} \cdot \varepsilon.$$

Per la periodicità del seno, ha senso limitarsi a $x \in (-\pi, \pi]$. Il mal condizionamento si ha solo per $\tan x$ piccolo, vale a dire per x vicino a $-\pi$, 0 o π . Avendosi

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\tan x} = \infty.$$

si conclude che la funzione seno è mal condizionata se e solo se x è vicino a $-\pi$ o π .

Coseno:

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha, per $x \neq 0$ e x non uguale a $\frac{\pi}{2}$ più un multiplo di π (quindi $f(x) = \cos x \neq 0$),

$$K(f, x) = \frac{f'(x)x}{f(x)} = \frac{(-\sin x) \cdot x}{\cos x} = -x \tan x$$

e quindi

$$\delta \doteq -x \tan x \cdot \varepsilon.$$

Limitandosi a $x \in (-\pi, \pi]$, il mal condizionamento si ha solo per $\tan x$ grande, vale a dire per x vicino a $-\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{\pi}{2}$. Avendosi

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} x \tan x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan x = \infty,$$

si conclude che la funzione coseno è mal condizionata se e solo se x è vicino a $-\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2}$.

14 Studio del mal condizionamento

Si supponga di voler determinare su quali dati x la funzione f è mal condizionata.

Nel caso $n = 1$, si può studiare $K(f, x)$ come funzione della variabile reale $x \in F$, dove

$$F = \{x \in D : x \neq 0 \text{ e } f(x) \neq 0\}$$

è il dominio della funzione indice di condizionamento, cercando punti $a \in \overline{F}$ (\overline{F} è la chiusura di F) tali che

$$\lim_{x \rightarrow a} K(f, x) = \infty.$$

Si può ritenere che f è mal condizionata su x se e solo se x è vicino a uno di questi punti a . Se $a = +\infty$ (o $a = -\infty$), "x vicino a a" vuol dire x grande positivo (o x grande negativo). Se $a = 0$, "x vicino a a" vuol dire x piccolo.

Naturalmente, se $K(f, x)$ è una funzione continua di x come stiamo supponendo, questo può accadere solo per a sulla frontiera del dominio F , dal momento che $a \in F$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} K(f, x) = K(f, a) \in \mathbb{R} \text{ non infinito.}$$

Esempio 5 Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}}, \quad x > 0.$$

Si ha $F = (0, +\infty)$ con punti di frontiera 0 e $+\infty$.

L'indice di condizionamento è dato da

$$K(f, x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

e si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{\log x}{x}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{x} \right) = e^{\frac{\log x}{x}} \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ &= e^{\frac{\log x}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$K(f, x) = \frac{e^{\frac{\log x}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2} \cdot x}{e^{\frac{\log x}{x}}} = \frac{1 - \log x}{x}.$$

Sui punti di frontiera 0 e $+\infty$ di F si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} K(f, x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \log x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} K(f, x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \log x}{x} = 0, \end{aligned}$$

La funzione f è mal condizionata su x se e solo se x è piccolo.

Ad esempio, consideriamo $x = 1.24 \cdot 10^{-1}$ perturbato a $\tilde{x} = 1.25 \cdot 10^{-1}$. Si ottiene

$$\varepsilon = 8.06 \cdot 10^{-3}, \quad \delta = 2.20 \cdot 10^{-1}, \quad \frac{\delta}{\varepsilon} = 27.3, \quad K(f, x) = \frac{1 - \log(x)}{x} = 24.9.$$

Nel caso $n > 1$, lo studio del mal condizionamento è più complicato. Si può cercare di esprimere un indice di condizionamento $K_i(f, x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, in termine di un parametro reale t e, quindi, far diventare $K_i(f, x)$ funzione della sola variabile reale t e in questo modo ricondursi al caso $n = 1$ visto sopra.

Questo è stato fatto nel caso dell'addizione (o della sottrazione), dove gli indici di condizionamento sono

$$\begin{aligned} K_1(f, x) &= \frac{1}{1 + \frac{x_2}{x_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{t}{1 + t} \\ K_2(f, x) &= \frac{1}{1 + \frac{x_1}{x_2}} = \frac{t}{1 + t} \end{aligned}$$

con $t = \frac{x_1}{x_2}$. Ecco un altro esempio.

Esempio 6 Si consideri

$$f(x) = g(x_1x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

dove $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si ha, per $x_1, x_2 \neq 0$ e $f(x) = g(x_1x_2) \neq 0$,

$$K_1(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) x_1}{f(x)} = \frac{g'(x_1x_2)x_2x_1}{g(x_1x_2)} = \frac{g'(t)t}{g(t)} = K(g, t)$$

$$K_2(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) x_2}{f(x)} = \frac{g'(x_1x_2)x_1x_2}{g(x_1x_2)} = \frac{g'(t)t}{g(t)} = K(g, t)$$

dove $t = x_1x_2$ e $K(g, t)$ è l'indice di condizionamento di g sul dato t . La funzione f è mal condizionata su x se e solo se g è mal condizionata su t .

14.1 Esercizi

Esercizio. Indice di condizionamento della funzione composta. Siano $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con D e E aperti e $f(D) \subseteq E$. Consideriamo la funzione composta $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Provare che per $x \in D$ tale che $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ e $g(f(x)) \neq 0$ si ha

$$K(g \circ f, x) = K(g, f(x)) \cdot K(f, x).$$

Esercizio. Indice di condizionamento della funzione inversa. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona, dove D è un aperto. Consideriamo la funzione inversa $f^{-1} : E = f(D) \rightarrow D$. Provare che per $x \in D$ tale che $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ si ha

$$K(f^{-1}, f(x)) = \frac{1}{K(f, x)}.$$

Suggerimento: usare l'esercizio precedente.

Esercizio. Indice di condizionamento dopo scalatura della variabile dipendente o della variabile indipendente. Provare che tra l'indice di condizionamento di $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e gli indici di condizionamento di

$$g(x) = af(x), \quad x \in D,$$

e

$$h(x) = f(ax), \quad x \in \frac{D}{a} = \left\{ \frac{x}{a} : a \in D \right\},$$

dove $a \neq 0$, sussistono le relazioni

$$K(g, x) = K(f, x), \quad x \in D \text{ con } x \neq 0 \text{ e } f(x) \neq 0$$

e

$$K(h, x) = K(f, ax), \quad x \in \frac{D}{a} \text{ con } x \neq 0 \text{ e } f(ax) \neq 0.$$

Esercizio. Per ognuna delle seguenti funzioni della variabile reale x , determinare l'indice di condizionamento e i punti x in cui è mal condizionata:

1) \tan ;

2) \arcsin , \arccos , \arctan ;

3)

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-c\},$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $ac \neq b$ (se $ac = b$, allora $f(x) = a$);

4) \sinh , \cosh , \tanh ;

5)

$$f(x) = \sin x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6)

$$f(x) = x^x = e^{x \log x}, \quad x > 0.$$

7)

$$f(x) = x^n \log x, \quad x > 0,$$

dove n è un intero positivo.

8)

$$f(x) = \log(\log x), \quad x > 1.$$

Esercizio. Per ognuna delle seguenti funzioni di due variabili reali x_1 e x_2 , determinare gli indici di condizionamento e i punti $x = (x_1, x_2)$ in cui è mal condizionata:

1) $f(x) = x_1^n - x_2^n$, $x \in \mathbb{R}^2$, dove n è un intero positivo.

2) $f(x) = g\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\}$, con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3) $f(x) = x_1^{x_2}$, $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento della funzione norma euclidea $\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e i punti di \mathbb{R}^n in cui è mal condizionata.

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vale a dire

$$f(x) = a^T x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$, e i punti di \mathbb{R}^n in cui è mal condizionata.

Esercizio. Si consideri un polinomio di grado n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $k \in \{0, \dots, n\}$ e $a_k \neq 0$. Determinare l'indice di condizionamento del polinomio e i punti in cui è mal condizionato.