Esercizio. Scrivere i numeri di macchina positivi dell'insieme di numeri di macchina definito dai parametri:

$$B = 3,\ m = -2,\ M = 2,\ t = 1.$$

I numeri di macchina positivi sono

$$1.0 \cdot 3^{-2},\ 1.1 \cdot 3^{-2},\ 1.2 \cdot 3^{-2},\ 2.0 \cdot 3^{-2},\ 2.1 \cdot 3^{-2},\ 2.2 \cdot 3^{-2},\ p = -2,$$

$$1.0 \cdot 3^{-1},\ 1.1 \cdot 3^{-1},\ 1.2 \cdot 3^{-1},\ 2.0 \cdot 3^{-1},\ 2.1 \cdot 3^{-1},\ 2.2 \cdot 3^{-1},\ p = -1,$$

$$1.0 \cdot 3^{0},\ 1.1 \cdot 3^{0},\ 1.2 \cdot 3^{0},\ 2.0 \cdot 3^{0},\ 2.1 \cdot 3^{0},\ 2.2 \cdot 3^{0},\ p = 0,$$

$$1.0 \cdot 3^{1},\ 1.1 \cdot 3^{1},\ 1.2 \cdot 3^{1},\ 2.0 \cdot 3^{1},\ 2.1 \cdot 3^{1},\ 2.2 \cdot 3^{1},\ p = 1,$$

$$1.0 \cdot 3^{2},\ 1.1 \cdot 3^{2},\ 1.2 \cdot 3^{2},\ 2.0 \cdot 3^{2},\ 2.1 \cdot 3^{2},\ 2.2 \cdot 3^{2},\ p = 2.$$

Esercizio. Scrivere la parola di memoria di 64 bit corrispondente ai numeri 45 e -2^{-100} nello standard IEEE in doppia precisione.

Si ha

$$45 = 32 + 13 = (101101)_2 = (1.01101)_2 \cdot 2^5$$
$$q = 1023 + p = 1028 = (10000000100)_2$$

e quindi la parola di memoria è

$$\underbrace{0}_{\text{segno: 1 bit}} \quad \underbrace{10000000100}_{\text{esponente: 11 bit}} \quad \underbrace{011010\cdots 0}_{\text{mantissa: 52 bit}}.$$

Si ha

$$-2^{-100} = -\left(1.0\cdots 0\right)_2 \cdot 2^{-100}$$
$$q = 1023 + p = 923 = 512 + 256 + 128 + 16 + 8 + 2 + 1 = (01110011011)_2$$

e quindi la parola di memoria è

$$\underbrace{1}_{\text{segno: 1 bit}} \quad \underbrace{01110011011}_{\text{esponente: 11 bit}} \quad \underbrace{0\cdots 0}_{\text{mantissa: 52 bit}} \quad .$$

Esercizio. Se tutti i numeri dello Standard IEEE in doppia precisione fossero memorizzati in qualche supporto, quale sarebbe l'occupazione complessiva di memoria?

Il numero di numeri di macchina nello standard IEEE in doppia precisione è

$$\begin{aligned} 2\,(B-1)\,B^t\,(M-m+1)+1 &= 2\cdot 1\cdot 2^{52}\cdot(1023-(-1022)+1)+1 \\ &= 2^{53}\cdot 2046+1. \end{aligned}$$

Ciascuno di questi occupa una parola di memoria di 64 bit. Quindi l'occupazione complessiva di memoria è

$$\left(2^{53}\cdot 2046+1\right)\cdot 64 = 1.1794\cdot 10^{21}\ \text{bit} = 1.4743\cdot 10^{8}\ \text{Terabyte}.$$

Esercizio. Quanti sono i numeri macchina nell'intervallo $[B^p, B^{p+1})$, dove $p \in \{m, m+1, \ldots, M\}$ è fissato? Esprimere tale numero in termini di eps e B.

I possibili numeri di macchina

$$x = (b_0.b_{-1}b_{-2}b_{-3}\cdots b_{-t})_B \cdot B^p,$$

nell'intervallo $[B^p, B^{p+1})$ sono

$$\underbrace{(B-1)}_{\text{scelte di } b_0 \neq 0} \cdot \underbrace{B}_{\text{scelte di } b_{-1}} \cdot \cdots \cdot \underbrace{B}_{\text{scelte di } b_{-t}} = (B-1)\,B^t = \frac{B-1}{\text{eps}}.$$

Esercizio. Si consideri l'insieme di numeri di macchina definito dai parametri

$$B = 16,\ m = -3,\ M = 3,\ t = 2.$$

Trovare $\mathrm{fl}\left(\frac{1}{13}\right)$ e $\mathrm{fl}(15005)$ sia nel caso del troncamento che in quello dell'arrotondamento.

Determiniamo la rappresentazione di $\frac{1}{13}$ in base 16 utilizzando le cifre A, B, C, D, E, F per $10, 11, 12, 13, 14, 15$. Si ha

	$\cdot B$	parte intera	parte frazionaria
$\frac{1}{13}$	$\frac{16}{13}$	1	$\frac{3}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{48}{13}$	3	$\frac{9}{13}$
$\frac{9}{13}$	$\frac{144}{13}$	$11 = \mathrm{B}$	$\frac{1}{13}$
$\frac{1}{13}$	.	.	.

Quindi

$$\frac{1}{13} = \left(0.\overline{13\mathrm{B}}\right)_{16} = \left(1.\overline{3\mathrm{B}1}\right)_{16} \cdot 16^{-1}$$

e risulta

$$\mathrm{fl}\left(\frac{1}{13}\right) = (1.3\mathrm{B})_{16} \cdot 16^{-1}$$

sia per il troncamento che per l'arrotondamento.

Determiniamo la rappresentazione di 15005 in base 16. Si ha

	quoziente divisione per B	resto divisione per B
15005	937	$13 = \mathrm{D}$
937	58	9
58	3	$10 = \mathrm{A}$
3	0	3

Quindi

$$15005 = (3\mathrm{A}9\mathrm{D})_{16} = (3.\mathrm{A}9\mathrm{D})_{16} \cdot 16^3$$

e risulta

$$\mathrm{fl}\,(15005) = (3.\mathrm{A}9)_{16} \cdot 16^3$$

per il troncamento e

$$\mathrm{fl}\,(15005) = (3.\mathrm{AA})_{16} \cdot 16^3$$

per l'arrotondamento.

Esercizio. Si consideri l'insieme di numeri di macchina definito dai parametri

$$B = 5,\ m = -2,\ M = 2,\ t = 2.$$

Nel caso dell'arrotondamento, trovare $\mathrm{fl}(x)$ per $x = (441.301)_5$. Fare lo stesso ora per $B = 3$ e $x = (11.1b1)_3$ con $b = 0, 1, 2$.

Riguardo $B = 5$, risulta

$$x = (441.301)_5 = (4.41301)_5 \cdot 5^2.$$

Poichè la prima cifra in

$$b_{-t-1}, b_{-t-2}, b_{-t-3}, \ldots = 3, 0, 1, \ldots$$

diversa da $\frac{B-1}{2} = 2$, vale a dire $b_{-t-1} = 3$, è maggiore di $\frac{B-1}{2} = 2$, si ha

$$\mathrm{fl}\,(x) = x_2 = (4.42)_5 \cdot 5^2$$

Riguardo $B = 3$, risulta

$$x = (11.1b1)_3 = (1.11b1)_3 \cdot 3.$$

Dobbiamo ora trovare la prima cifra in

$$b_{-t-1}, b_{-t-2}, b_{-t-3}, \ldots = b, 1, 0, \ldots$$

diversa da $\frac{B-1}{2} = 1$ e vedere se è minore di 1. Se $b = 0$ o $b = 2$, allora tale cifra è $b_{-t-1} = b$ e si ha

$$\mathrm{fl}\,(x) = x_1 = (1.11)_3 \cdot 3 \text{ se } b = 0$$
$$\mathrm{fl}\,(x) = x_2 = (1.12)_3 \cdot 3 \text{ se } b = 2.$$

Se $b = 1$, allora tale cifra è $b_{-t-3} = 0$ e quindi

$$\mathrm{fl}\,(x) = x_1.$$

Esercizio. Sia nel caso del troncamento che in quello dell'arrotondamento, trovare l'errore relativo ε_r dell'approssimazione $\mathrm{fl}(x)$ di

$$x = B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p,$$

dove $c \in (0,1)$, e scriverlo nella forma

$$|\varepsilon_r| = C\mathrm{eps} + O\left(\mathrm{eps}^2\right)$$

per un'opportuna costante C.

Per un tale x si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= B^{p+1} - \mathrm{eps}B^p \\ x_2 &= B^{p+1}. \end{aligned}$$

Nel troncamento, e nell'arrotondamento quando $c > \frac{1}{2}$, si ha

$$\mathrm{fl}\,(x) = x_1$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\varepsilon_r| &= \left|\frac{\mathrm{fl}\,(x) - x}{x}\right| = \left|\frac{x_1 - x}{x}\right| = \left|\frac{B^{p+1} - \mathrm{eps}B^p - \left(B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p\right)}{B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p}\right| \\ &= \left|\frac{-(1-c)\,\mathrm{eps}B^p}{B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p}\right| = \left|\frac{-(1-c)\,\mathrm{eps}}{B - c\mathrm{eps}}\right| = \frac{(1-c)\,\mathrm{eps}}{B - c\mathrm{eps}} \\ &= \frac{(1-c)\,\mathrm{eps}}{B} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{B}\mathrm{eps}} = \frac{(1-c)\,\mathrm{eps}}{B} \cdot \frac{1}{1 + O\,(\mathrm{eps})} \\ &= \frac{(1-c)\,\mathrm{eps}}{B} \cdot (1 + O\,(\mathrm{eps})) \\ &= \frac{1-c}{B}\mathrm{eps} + O\left(\mathrm{eps}^2\right). \end{aligned}$$

Invece, nell'arrotondamento quando $c \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$\mathrm{fl}\,(x) = x_2$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\varepsilon_r| &= \left|\frac{\mathrm{fl}\,(x) - x}{x}\right| = \left|\frac{x_2 - x}{x}\right| = \left|\frac{B^{p+1} - \left(B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p\right)}{B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p}\right| \\ &= \left|\frac{c\mathrm{eps}B^p}{B^{p+1} - c\mathrm{eps}B^p}\right| = \left|\frac{c\mathrm{eps}}{B - c\mathrm{eps}}\right| = \frac{c\mathrm{eps}}{B - c\mathrm{eps}} \\ &= \frac{c\mathrm{eps}}{B} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{B}\mathrm{eps}} \\ &= \frac{c\mathrm{eps}}{B} \cdot (1 + O\,(\mathrm{eps})) \\ &= \frac{c}{B}\mathrm{eps} + O\left(\mathrm{eps}^2\right). \end{aligned}$$

Esercizio. Qual è l'errore relativo di $\mathrm{fl}(x)$ in caso di overflow nello standard IEEE?

Nell'overflow $\mathrm{fl}(x) = +\infty$ e quindi

$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{fl}\,(x) - x}{x} = \frac{+\infty - x}{x} = +\infty.$$

Esercizio. Si consideri l'insieme di numeri di macchina

$$B = 2,\ m = -10,\ M = 10,\ t = 3.$$

Calcolare, con un tale insieme di numeri di macchina e con l'arrotondamento, $a \,\tilde{\circ}\, b$, per $\circ = +, -, \cdot, /$, nel caso $a = 12$ e $b = 15$ come pure nel caso $a = 25$ e $b = 31$. Ricordare che nel caso in cui a e b non siano numeri di macchina, essi vanno approssimati con numeri di macchina prima di effettuare l'operazione $\circ$.

Consideriamo $a = 12$ e $b = 15$. Si ha

$$\begin{aligned} a &= 12 = (1100)_2 = (1.100)_2 \cdot 2^3 \\ b &= 15 = (1111)_2 = (1.111)_2 \cdot 2^3. \end{aligned}$$

Quindi a e b sono numeri di macchina. Si ha

$$\begin{aligned} a + b &= 12 + 15 = 27 = (11011)_2 = (1.1011)_2 \cdot 2^4 \\ a - b &= 12 - 15 = -3 = -(11)_2 = -(1.1)_2 \cdot 2 \\ a \cdot b &= 12 \cdot 15 = 180 = 128 + 32 + 16 + 4 = (10110100)_2 = (1.0110100)_2 \cdot 2^7 \\ a \ / \ b &= 12 \ / \ 15 = \frac{4}{5} = 0.8 = \left(0.\overline{1100}\right)_2 = \left(1.\overline{1001}\right)_2 \cdot 2^{-1} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} a \,\tilde{+}\, b &= (1.110)_2 \cdot 2^4. \\ a \,\tilde{-}\, b &= -(1.100) \cdot 2 \\ a \,\tilde{\cdot}\, b &= (1.011)_2 \cdot 2^7 \\ a \,\tilde{/}\, b &= (1.101)_2 \cdot 2^{-1}. \end{aligned}$$

Consideriamo $a = 25$ e $b = 31$. Si ha

$$\begin{aligned} a &= 25 = (11001)_2 = (1.1001)_2 \cdot 2^4 \\ b &= 31 = (11111)_2 = (1.1111)_2 \cdot 2^4. \end{aligned}$$

Quindi a e b non sono numeri di macchina e vanno approssimati con i numeri di macchina

$$\mathrm{fl}\,(a) = (1.101)_2 \cdot 2^4 = 26 \ \text{ e } \ \mathrm{fl}\,(b) = (1.000)_2 \cdot 2^5 = 32.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{fl}\,(a) + \mathrm{fl}\,(b) &= 26 + 32 = 58 = 32 + 16 + 8 + 2 = (111010)_2 = (1.11010)_2 \cdot 2^5 \\ \mathrm{fl}\,(a) - \mathrm{fl}\,(b) &= 26 - 32 = -6 = -(110)_2 = -(1.10)_2 \cdot 2^2 \\ \mathrm{fl}\,(a) \cdot \mathrm{fl}\,(b) &= 26 \cdot 32 = 832 = 512 + 256 + 64 = (1101000000)_2 = (1.10100000)_2 \cdot 2^9 \\ \mathrm{fl}\,(a) \ / \ \mathrm{fl}\,(b) &= 26 \ / \ 32 = \frac{13}{16} = (0.1101)_2 = (1.101)_2 \cdot 2^{-1} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}\,(a) \;\widetilde{+}\; \mathrm{fl}\,(b) &= (1.111)_2 \cdot 2^5. \\
\mathrm{fl}\,(a) \;\widetilde{-}\; \mathrm{fl}\,(b) &= -\,(1.100) \cdot 2^2 \\
\mathrm{fl}\,(a) \;\widetilde{\cdot}\; \mathrm{fl}\,(b) &= (1.101)_2 \cdot 2^9 \\
\mathrm{fl}\,(a) \;\widetilde{/}\; \mathrm{fl}\,(b) &= (1.101)_2 \cdot 2^{-1}.
\end{aligned}$$

Esercizio. Scrivere due algoritmi per il calcolo di

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2,\ x \in \mathbb{R}^2,$$

e tre algoritmi per il calcolo di

$$f(x) = x_1^4 - x_2^4,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Per la prima funzione, due algoritmi sono basati sullo scrivere $f(x)$ come

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

Questi algoritmi sono

ALGORITMO 1
$a = x_1 \cdot x_1$
$b = x_2 \cdot x_2$
$y = a - b$

ALGORITMO 2
$a = x_1 + x_2$
$b = x_1 - x_2$
$y = a \cdot b$

Per la seconda funzione, tre algoritmi sono basati sullo scrivere $f(x)$ come

$$f(x) = x_1^4 - x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

Questi algoritmi sono

ALGORITMO 1
$a = x_1 \cdot x_1$
$b = a \cdot a$
$c = x_2 \cdot x_2$
$d = c \cdot c$
$y = b - d$

ALGORITMO 2
$a = x_1 \cdot x_1$
$b = x_2 \cdot x_2$
$c = a + b$
$d = a - b$
$y = a \cdot b$

ALGORITMO 3
$a = x_1 \cdot x_1$
$b = x_2 \cdot x_2$
$c = a + b$
$d = x_1 + x_2$
$e = x_1 - x_2$
$f = c \cdot d$
$y = d \cdot e$

Esercizio. Quando x_2 è vicino a -1 si può concludere che ε_{in} ha ordine di grandezza superiore a quello di $\widehat{\varepsilon}_1$ e $\widehat{\varepsilon}_2$, assunti non nulli e dello stesso ordine di grandezza?

Si ha

$$\varepsilon_{\text{in}} \doteq \widehat{\varepsilon}_1 + \frac{x_2}{x_2+1}\widehat{\varepsilon}_2.$$

Per x_2 è vicino a -1 si può concludere che

$$\frac{x_2}{x_2+1}\widehat{\varepsilon}_2 \gg \widehat{\varepsilon}_2$$

ma anche

$$\frac{x_2}{x_2+1}\widehat{\varepsilon}_2 \gg \widehat{\varepsilon}_1,$$

essendo $\widehat{\varepsilon}_1$ e $\widehat{\varepsilon}_2$ dello stesso ordine di grandezza. Per cui,

$$\varepsilon_{\text{in}} \doteq \widehat{\varepsilon}_1 + \frac{x_2}{x_2+1}\widehat{\varepsilon}_2 \approx \frac{x_2}{x_2+1}\widehat{\varepsilon}_2$$

ha ordine di grandezza superiore a quello di $\widehat{\varepsilon}_1$ e $\widehat{\varepsilon}_2$.

Esercizio. Si studi la stabilità dell'algoritmo per calcolare i valori di

$$f(x) = x^x = e^{x \log x},\ x > 0,$$

basato sull'espressione

$$f(x) = e^{x \log x}.$$

Il condizionamento di tale funzione è stato studiato in un esercizio della teoria del condizionamento.

Si ha $F = (0, +\infty)$ con punti di frontiera 0 e $+\infty$. Nella teoria del condizionamento si è visto che f è mal condizionata su x se e solo se x è grande.

Analizziamo la stabilità dell'algoritmo basato sull'espressione

$$f(x) = e^{x \log x}.$$

L'algoritmo è

$$\begin{aligned} &a = \log x \\ &b = a \cdot x \\ &y = e^b. \end{aligned}$$

L'analisi dell'errore algoritmico è

$$\begin{array}{lll} 1 & a = \log x & \beta_a \doteq \gamma_1 \\ \\ 2 & b = a \cdot x & \beta_b \doteq \beta_a + \gamma_2 \doteq \gamma_1 + \gamma_2. \\ \\ 3 & y = e^b & \varepsilon_{\text{alg}} \doteq b\beta_b + \gamma_3 \doteq b(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 = b\gamma_1 + b\gamma_2 + \gamma_3 \end{array}$$

Si ha

$$M_1(x) = M_2(x) = b = ax = x \log x.$$

Avendosi

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} x \log x = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} x \log x = +\infty, \end{aligned}$$

si conclude che l'algoritmo è instabile se e solo se x è grande, esattamente dove la funzione è mal condizionata.

Esercizio. Si studi il condizionamento di

$$f(x) = \log \frac{x+1}{x}, \ x > 0,$$

e la stabilità dei tre algoritmi basati sulle tre diverse espressioni

$$f(x) = \log \frac{x+1}{x} = \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log(x+1) - \log x.$$

Si ha

$$F = \{x \in D : x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(x) \neq 0\} = (0, +\infty)$$

con punti di frontiera 0 e $+\infty$. L'indice di condizionamento di f è

$$\begin{aligned} K(f,x) &= f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{x}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= -\frac{\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Avendosi

$$\lim_{x\to 0} K(f,x) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} K(f,x) = -1$$

si conclude che f è ben condizionata su ogni dato.

Analizziamo per la stabilità il primo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = \log \frac{x+1}{x}.$$

Si ha

$$\begin{array}{lll} 1 & a = x+1 & \beta_a \doteq \gamma_1 \\ 2 & b = \frac{a}{x} & \beta_b \doteq \beta_a + \gamma_2 \doteq \gamma_1 + \gamma_2 \\ 3 & y = \log b & \varepsilon_{\text{alg}} \doteq \frac{1}{\log b}\beta_b + \gamma_3 \doteq \frac{1}{\log b}\gamma_1 + \frac{1}{\log b}\gamma_2 + \gamma_3. \end{array}$$

Così

$$M_1(x) = M_2(x) = \frac{1}{\log b} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Avendosi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty,$$

si conclude che l'algoritmo è instabile se e solo se x è grande.

Analizziamo per la stabilità il secondo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Si ha

$$\begin{array}{lll} 1 & a = \frac{1}{x} & \beta_a \doteq \gamma_1 \\ 2 & b = 1 + a & \beta_b \doteq \frac{1}{1+a}\beta_a + \gamma_2 \doteq \frac{1}{1+a}\gamma_1 + \gamma_2 \\ 3 & y = \log b & \varepsilon_{\text{alg}} \doteq \frac{1}{\log b}\beta_b + \gamma_3 \doteq \frac{1}{\log b \cdot (1+a)}\gamma_1 + \frac{1}{\log b}\gamma_2 + \gamma_3. \end{array}$$

Così

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{1}{\log b \cdot (1+a)} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ M_2(x) &= \frac{1}{\log b} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} M_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0 \\ &\lim_{x\to +\infty} M_1(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty \\ &\lim_{x\to 0} M_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0 \\ &\lim_{x\to +\infty} M_1(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty \end{aligned}$$

Per cui, l'algoritmo è instabile se e solo se x è grande.

Analizziamo la stabilità del terzo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = \log(x+1) - \log x.$$

Si ha

$$\begin{array}{lll} 1 & a = x + 1 & \beta_a \doteq \gamma_1 \\ 2 & b = \log a & \beta_b \doteq \frac{1}{\log a}\beta_a + \gamma_2 \doteq \frac{1}{\log a}\gamma_1 + \gamma_2 \\ 3 & c = \log x & \beta_c \doteq \gamma_3 \\ 4 & y = b - c & \varepsilon_{\text{alg}} \doteq \frac{b}{b-c}\beta_b - \frac{c}{b-c}\beta_c + \gamma_4 \doteq \frac{b}{b-c}\cdot\frac{1}{\log a}\gamma_1 + \frac{b}{b-c}\gamma_2 - \frac{c}{b-c}\gamma_3 + \gamma_4 \end{array}$$

Così

$$
\begin{aligned}
M_1(x) &= \frac{b}{b-c} \cdot \frac{1}{\log a} = \frac{1}{b-c} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
M_2(x) &= \frac{b}{b-c} = \frac{\log(x+1)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{\log x}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} + 1 = -\frac{\log \frac{1}{x}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} + 1 \\
M_3(x) &= -\frac{c}{b-c} = -\frac{\log x}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\log \frac{1}{x}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}
\end{aligned}
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} M_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0 \\
&\lim_{x\to +\infty} M_1(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty \\
&\lim_{x\to 0} M_2(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -1 \\
&\lim_{x\to +\infty} M_2(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty \\
&\lim_{x\to 0} M_3(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log \frac{1}{x}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1 \\
&\lim_{x\to +\infty} M_3(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log \frac{1}{x}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\infty
\end{aligned}
$$

Per cui, l'algoritmo è instabile se e solo se x è grande.

Esercizio. Si studi il condizionamento di

$$f(x) = \sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1},\ x \in \mathbb{R}^2 \text{ con } x_1, x_2 > 0,$$

e la stabilità dei due algoritmi basati sulle due diverse espressioni

$$f(x) = \sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Gli indici di condizionamento di f sono

$$\begin{aligned} K_1(f,x) &= \frac{x_1}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x_1 + x_2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \right) \\ &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}} \cdot \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1 + x_2}}{2\sqrt{x_1 + x_2}\sqrt{x_1}} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_1 + x_2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K_2(f,x) &= \frac{x_2}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1 + x_2}} \\ &= \frac{x_2}{x_2} \cdot \frac{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_1 + x_2}} = \frac{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_1 + x_2}}. \end{aligned}$$

Ora

$$|K_1(f,x)| = \left| -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_1 + x_2}} \right| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$K_2(f,x) = \frac{\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_1 + x_2}} \leq 1.$$

Per cui, f è ben condizionata su ogni dato.

Analizziamola stabilità del primo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = \sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}.$$

Si ha

1	$a = x_1 + x_2$	$\beta_a \doteq \gamma_1$
2	$b = \sqrt{a}$	$\beta_b \doteq \frac{1}{2}\beta_a + \gamma_2 \doteq \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2$
3	$c = \sqrt{x_1}$	$\beta_c \doteq \gamma_3$
4	$y = b - c$	$\varepsilon_{\text{alg}} \doteq \frac{b}{b-c}\beta_b - \frac{c}{b-c}\beta_c + \gamma_4 \doteq \frac{1}{2}\ \frac{b}{b-c}\gamma_1 + \frac{b}{b-c}\gamma_2 - \frac{c}{b-c}\gamma_3 + \gamma_4.$

Così

$$\begin{aligned}
M_1(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-c} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_1+x_2}}{\sqrt{x_1+x_2}-\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_1+x_2}\left(\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}\right)}{x_2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_2}\sqrt{x_2}}{x_2}\cdot\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) \\
M_2(x) &= 2M_1(x) = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) \\
M_3(x) &= -\frac{c}{b-c} = -\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1+x_2}-\sqrt{x_1}} = -\frac{\sqrt{x_1}\left(\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}\right)}{x_2} \\
&= -\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right)
\end{aligned}$$

Avendosi

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_2} &\le M_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) \le \frac{x_1}{x_2}+1 \\
2\frac{x_1}{x_2} &\le M_2(x) = 2M_1(x) \le 2\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right) \\
2\frac{x_1}{x_2} &\le |M_3(x)| = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}+1}+\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right) \le 2\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right).
\end{aligned}$$

Per cui, l'algoritmo è instabile se e solo se $\frac{x_1}{x_2}$ è grande.

Analizziamo la stabilità del secondo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

Si ha

1	$a = x_1 + x_2$	$\beta_a \doteq \gamma_1$
2	$b = \sqrt{a}$	$\beta_b \doteq \frac{1}{2}\beta_a + \gamma_2 \doteq \frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2$
3	$c = \sqrt{x_1}$	$\beta_c \doteq \gamma_3$
4	$d = b + c$	$\beta_d \doteq \frac{b}{b+c}\beta_b + \frac{c}{b+c}\beta_c + \gamma_4 \doteq \frac{1}{2}\ \frac{b}{b+c}\gamma_1 + \frac{b}{b+c}\gamma_2 + \frac{c}{b+c}\gamma_3 + \gamma_4$
5	$y = \frac{x_2}{d}$	$\varepsilon_{\text{alg}} \doteq -\beta_d + \gamma_5 \doteq -\frac{1}{2}\ \frac{b}{b+c}\gamma_1 - \frac{b}{b+c}\gamma_2 - \frac{c}{b+c}\gamma_3 - \gamma_4 + \gamma_5.$

Così

$$\begin{aligned}
M_1(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b+c} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_1+x_2}}{\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}}\\
M_2(x) &= 2M_1(x) = -\frac{\sqrt{x_1+x_2}}{\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}}\\
M_3(x) &= -\frac{c}{b-c} = -\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_1}}\\
M_4(x) &= -1.
\end{aligned}$$

Avendosi $|M_j(x)| \leq 1$, $j \in \{1,2,3,4\}$, l'algoritmo è stabile per ogni dato.

Esercizio. Si studi il condizionamento di

$$f(x) = x_1x_2 + x_1x_3,\ x \in \mathbb{R}^3,$$

e la stabilità dei due algoritmi basati sulle due diverse espressioni

$$f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 = x_1(x_2 + x_3).$$

Gli indici di condizionamento di f sono

$$\begin{aligned}
K_1(f,x) &= \frac{x_1}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1}{x_1x_2 + x_1x_3} \cdot (x_2 + x_3) = 1 \\
K_2(f,x) &= \frac{x_2}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{x_2}{x_1x_2 + x_1x_3} \cdot x_1 = \frac{x_2}{x_2 + x_3} = \frac{1}{1 + \frac{x_3}{x_2}} \\
K_3(f,x) &= \frac{x_3}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{x_3}{x_1x_2 + x_1x_3} \cdot x_1 = \frac{x_3}{x_2 + x_3} = \frac{1}{1 + \frac{x_2}{x_3}}.
\end{aligned}$$

Per cui, f è mal condizionata se e solo se $\frac{x_2}{x_3}$ è vicino a -1.

Analizziamo la stabilità del primo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = x_1x_2 + x_1x_3.$$

Si ha

1 $\quad a = x_1x_2 \quad \beta_a \doteq \gamma_1$

2 $\quad b = x_1x_3 \quad \beta_b \doteq \gamma_2$

3 $\quad y = a + b \quad \varepsilon_{\text{alg}} \doteq \frac{a}{a+b}\beta_a + \frac{b}{a+b}\beta_b + \gamma_3 \doteq \frac{a}{a+b}\gamma_1 + \frac{b}{a+b}\gamma_2 + \gamma_3.$

Così

$$\begin{aligned}
M_1(x) &= \frac{a}{a+b} = \frac{x_1x_2}{x_1x_2 + x_1x_3} = \frac{x_2}{x_2 + x_3} = \frac{1}{1 + \frac{x_3}{x_2}} \\
M_2(x) &= \frac{b}{a+b} = \frac{x_1x_3}{x_1x_2 + x_1x_3} = \frac{x_3}{x_2 + x_3} = \frac{1}{1 + \frac{x_2}{x3}}
\end{aligned}$$

Per cui, l'algoritmo è instabile se e solo se $\frac{x_2}{x_3}$ è vicino a -1.

Analizziamo la stabilità del secondo algoritmo, quello basato su

$$f(x) = x_1(x_2 + x_3)$$

Si ha

1 $\quad a = x_2 + x_3 \quad \beta_a \doteq \gamma_1$

2 $\quad y = x_1 \cdot a \qquad \varepsilon_{\text{alg}} \doteq \beta_a + \gamma_2.$

Così

$$M_1(x) = 1$$

e l'algoritmo è stabile per ogni dato.