Esercizio. Se $x_1, \ldots, x_n, y$ sono grandezze fisiche con delle dimensioni, qual è la dimensione degli indici di condizionamento?

Gli indici di condizionamento sono adimensionali. Ci sono due modi per provarlo.

Il primo è quello di usare la formula

$$K_i(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, x_i}{f(x)}.$$

Utillizando $[u]$ per denotare le dimensioni di una garndezza fisica u, risulta

$$[K_i(f, x)] = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right][x_i]}{[f(x)]} = \frac{\frac{[f(x)]}{[x_i]}[x_i]}{[f(x)]} = 1.$$

L'altro modo è quello di osservare che nella formula

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} K_i(f, x)\, \varepsilon_i + \frac{R(x, \widetilde{x})}{y}$$

ogni termine $K_i(f, x)\, \varepsilon_i$ deve avere le stesse dimensioni di δ, che è adimensionale. Quindi $K_i(f, x)\, \varepsilon_i$ è adimensionale ed essendo ε_i adimensionale, anche $K_i(f, x)\, \varepsilon_i$ deve risultare adimensionale.

Esercizio. In (5) si è usato il fatto che

$$\delta \doteq \sum_{i=1}^{n} K_i\left(f,x\right)\cdot\varepsilon_i \quad \text{implica} \quad |\delta| \doteq \left|\sum_{i=1}^{n} K_i\left(f,x\right)\cdot\varepsilon_i\right|.$$

Provare che $A \doteq B$ implica $|A| \doteq |B|$.

Si ha

$$|\ |A| - |B|\ | \leq |A - B|\,.$$

Quindi, se A e B sono uguali a meno del termine $A - B$ il cui valore assoluto è maggiorato M, allora $|A|$ è uguale a $|B|$ a meno del termine $|A| - |B|$ il cui valore assoluto è anch'esso maggiorato da M. Qui M sarebbe la costante volte $\|\varepsilon\|_\infty^2$.

Esercizio. Cosa si può dire dell'errore δ in tale situazione? E' uguale a zero?

$\delta \doteq 0$ significa uguale a zero a meno di un termine il cui valore assoluto è minore o uguale di una costante volte $\|\varepsilon\|_\infty^2$, per $\|\varepsilon\|_\infty$ sufficientemente piccolo. Quindi, esistono esistono $c > 0$ e $C \geq 0$ tali che

$$|\delta| \leq C \, \|\varepsilon\|_\infty^2 \ \text{ per } \ \|\varepsilon\|_\infty \leq c.$$

Quindi, assumendo che C non sia grande, $|\delta|$ ha ordine di grandezza non superiore a $\|\varepsilon\|_\infty^2$.

Esercizio. Nel caso $n = 1$, si può dire che

$$f \text{ mal condizionata sul dato } x \quad \Rightarrow \quad |\delta| \gg \|\varepsilon\|_\infty ?$$

L'implicazione sussiste. Nel caso $n = 1$ si ha

$$\delta \doteq K(f, x) \cdot \varepsilon$$

e quindi $|K(f, x)| \gg 1$ implica $|\delta| \gg |\varepsilon|$.

Esercizio. Spiegare perchè nel caso di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vale a dire

$$f(x) = a^T x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$, si può sostituire $\doteq$ con $=$ nella relazione tra l'errore δ e gli errori ε_i. Osservare che addizione, sottrazione e

$$f(x) = ax, \ x \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R}$, sono funzioni lineari.

Ricordiamo che si ha

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} K_i\left(f, x\right) \cdot \varepsilon_i + \frac{R\left(\widetilde{x}, x\right)}{y}$$

dove $R\left(\widetilde{x}, x\right)$ è il resto dello sviluppo di Taylor. Questo resto può essere espresso come

$$R\left(\widetilde{x}, x\right) = \int_{0}^{1} \left(1-s\right)\left(\widetilde{x}-x\right)^T \nabla^2 f\left(x + s\left(\widetilde{x}-x\right)\right)\left(\widetilde{x}-x\right) ds$$

dove $\nabla^2 f\left(x + s\left(\widetilde{x}-x\right)\right)$ è la matrice hessiana di f nel punto $x + s\left(\widetilde{x}-x\right)$. Poichè

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i, \ y \in \mathbb{R}^n,$$

ha derivate parziali seconde nulle, la matrice hessiana di f è sempre zero. Quindi

$$R\left(\widetilde{x}, x\right) = 0.$$

Alternativamente, si può osservare che

$$R(\widetilde{x}, x) = f(\widetilde{x}) - f(x) - \nabla f(x)^T(\widetilde{x} - x)$$

con

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)\right) = (a_1, \ldots, a_n) = a$$

e quindi

$$R(\widetilde{x}, x) = a^T\widetilde{x} - a^T x - a^T(\widetilde{x} - x) = 0.$$

Esercizio. Provare che nel caso di una somma x_1+x_2 con x_1 e x_2 dello stesso segno, risulta

$$|\delta| \leq \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}.$$

Si ha

$$\delta = \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2$$

e quindi

$$\begin{aligned}
|\delta| &= \left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1 + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2\right| \leq \left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_1\right| + \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_2\right| \\
&= \frac{|x_1|}{|x_1+x_2|}|\varepsilon_1| + \frac{|x_2|}{|x_1+x_2|}|\varepsilon_2| \\
&\leq \frac{|x_1|}{|x_1+x_2|}\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} + \frac{|x_2|}{|x_1+x_2|}\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \\
&= \left(\frac{|x_1|}{|x_1+x_2|} + \frac{|x_2|}{|x_1+x_2|}\right)\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \\
&= \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1+x_2|}\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} \\
&= \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue in quanto x_1 e x_2 hanno lo stesso segno e quindi $|x_1|+|x_2| = |x_1+x_2|$.

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento delle funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ date da

$$f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ g(x) = x_1 x_2 \cdots x_n,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo la funzione f. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \neq 0$. Per $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$K_i(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i}{f(x)} = \frac{1 \cdot x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

Quindi

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot \varepsilon_i.$$

Consideriamo ora la funzione g. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$. Per $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$K_i(g, x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \cdot x_i}{g(x)} = \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \cdot x_i}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_1 x_2 \cdots x_n} = 1.$$

Quindi

$$\delta \doteq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

Esercizio. Indice di condizionamento della funzione composta. Siano $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con D e E aperti e $f(D) \subseteq E$. Consideriamo la funzione composta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Provare che per $x \in D$ tale che $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ e $g(f(x)) \neq 0$ si ha

$$K(g \circ f, x) = K(g, f(x)) \cdot K(f, x).$$

Per $x \in D$ tale che $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ e $g(f(x)) \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} K(g \circ f, x) &= \frac{(g \circ f)'(x) \cdot x}{(g \circ f)(x)} = \frac{g'(f(x))\, f'(x) \cdot x}{g(f(x))} \\ &= \frac{g'(f(x))\, f(x)}{g(f(x))} \cdot \frac{f'(x)\, x}{f(x)} \\ &= K(g, f(x)) \cdot K(f, x). \end{aligned}$$

Esercizio. Indice di condizionamento della funzione inversa. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona, dove D è un aperto. Consideriamo la funzione inversa $f^{-1} : E = f(D) \to D$. Provare che per $x \in D$ tale che $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ si ha

$$K(f^{-1}, f(x)) = \frac{1}{K(f, x)}.$$

Suggerimento: usare l'esercizio precedente.

Osservare che $f^{-1} \circ f$ è la funzione identità i_D dell'insieme D, cioè

$$i_D\,(x) = x, \;\; x \in D,$$

che ha indice di condizionamento costante uguale a 1. Così per $x \in D$ tale che $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ si ha

$$1 = K(f^{-1} \circ f, x) = K(f^{-1}, f(x)) \cdot K(f, x)$$

e quindi

$$K(f^{-1}, f(x)) = \frac{1}{K(f, x)}$$

Esercizio. Indice di condiziomento dopo scalatura della variabile dipendente o della variabile indipendente. Provare che tra l'indice di condizionamento di $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e gli indici di condizionamento di

$$g(x) = af(x),\ x \in D,$$

e

$$h(x) = f(ax),\ x \in \frac{D}{a} = \left\{ \frac{x}{a} : a \in D \right\},$$

dove $a \neq 0$, sussistono le relazioni

$$K(g, x) = K(f, x),\ x \in D \text{ con } x \neq 0 \text{ e } f(x) \neq 0$$

e

$$K(h, x) = K(f, ax),\ x \in \frac{D}{a} \text{ con } x \neq 0 \text{ e } f(ax) \neq 0.$$

Per $x \in D$ con $x \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ si ha

$$K(g, x) = \frac{g'(x)\, x}{g(x)} = \frac{af'(x)x}{af(x)} = \frac{f'(x)x}{f(x)} = K(f, x)\,.$$

Per $x \in \frac{D}{a}$ con $x \neq 0$ e $f(ax) \neq 0$ si ha

$$K(h, x) = \frac{h'(x)\, x}{h(x)} = \frac{f'(ax)ax}{f(ax)} = K(f, ax)\,.$$

Nei prossimo esercizio e nei successivi denotiamo con F il dominio della funzione indice di condizionamento.

Esercizio. Per ognuna delle seguenti funzioni di una variabile, determinare l'indice di condizionamento e i punti x in cui è mal condizionata:

1) tan;

Sia
$$f(x) = \tan x, \ x \in D = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Si ha
$$F = \{x \in D : x \text{ non è multiplo di } \pi\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \text{ non è multiplo di } \frac{\pi}{2} \right\}.$$
con punti di frontiera i multipli di $\frac{\pi}{2}$. Per $x \in F$, si ha
$$K(f, x) = \frac{f'(x)\, x}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x}{\tan x} = \frac{x}{\cos^2 x \tan x} = \frac{x}{\sin x \cos x} = \frac{2x}{\sin 2x}.$$
Considerando $x \in (-\pi, \pi]$ ed essendo sui punti di frontiera in $(-\pi, \pi]$
$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\pi} \frac{2x}{\sin 2x} &= \infty, \ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin 2x} = \infty \\ \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} &= 1, \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin 2x} = \infty \\ \lim_{x \to \pi} \frac{2x}{\sin 2x} &= \infty. \end{aligned}$$
si conclude che la tangente è mal condizionata se e solo se x è vicino a $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ o π.

2) arcsin, arccos, arctan;

Consideriamo
$$f(x) = \arcsin x, \ x \in (-1, 1).$$
Si ha
$$F = (-1, 1) \setminus \{0\}.$$
con punti di frontiera -1, 0 e 1. Avendosi
$$\arcsin = \left(\sin |_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \right)^{-1}$$
si ha
$$K(\arcsin, \sin u) = \frac{1}{K(\sin, u)} = \frac{1}{\frac{u}{\tan u}} = \frac{\tan u}{u}, \ u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

ricordando un precedente esercizio sull'indice di condizionamento dell'inversa. Avendosi sui punti di frontiera di F

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} K(\arcsin, x) &= \lim_{u\to -\frac{\pi}{2}} K(\arcsin, \sin u) = \lim_{u\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\tan u}{u} = \infty \\
\lim_{x\to 0} K(\arcsin, x) &= \lim_{u\to 0} K(\arcsin, \sin u) = \lim_{u\to 0} \frac{\tan u}{u} = 1 \\
\lim_{x\to 1} K(\arcsin, x) &= \lim_{u\to \frac{\pi}{2}} K(\arcsin, \sin u) = \lim_{u\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan u}{u} = \infty,
\end{aligned}$$

arcsin è mal condizionato se e solo se x è vicino a ± 1.

Consideriamo

$$f(x) = \arccos x, \ x \in (-1, 1).$$

Si ha

$$F = (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

con punti di frontiera -1, 0 e 1. Avendosi

$$\arccos = \left(\cos|_{(0,\pi)}\right)^{-1}$$

si ha

$$K(\arccos, \cos u) = \frac{1}{K(\cos, u)} = \frac{1}{u \tan u}, \ u \in (0, \pi).$$

Avendosi sui punti di frontiera di F

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} K(\arccos, x) &= \lim_{u\to \pi} K(\arccos, \cos u) = \lim_{u\to \pi} \frac{1}{u \tan u} = \infty \\
\lim_{x\to 0} K(\arccos, x) &= \lim_{u\to \frac{\pi}{2}} K(\arccos, \cos u) = \lim_{u\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{u \tan u} = 0 \\
\lim_{x\to 1} K(\arccos, x) &= \lim_{u\to 0} K(\arccos, \cos u) = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u \tan u} = \infty,
\end{aligned}$$

arccos è mal condizionato se e solo se x è vicino a ± 1.

Consideriamo

$$f(x) = \arctan x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

con punti di frontiera $-\infty$, 0 e $+\infty$. Avendosi

$$\arctan = \left(\tan|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$$

si ha

$$K(\arctan, \tan u) = \frac{1}{K(\tan, u)} = \frac{1}{\frac{2u}{\sin 2u}} = \frac{\sin 2u}{2u}, \ u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

Avendosi sui punti di frontiera di F

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} K(\arctan, x) &= \lim_{u\to-\frac{\pi}{2}} K(\arctan, \tan u) = \lim_{u\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2u}{2u} = 0 \\
\lim_{x\to 0} K(\arctan, x) &= \lim_{u\to 0} K(\arctan, \tan u) = \lim_{u\to 0} \frac{\sin 2u}{2u} = 1 \\
\lim_{x\to+\infty} K(\arctan, x) &= \lim_{u\to\frac{\pi}{2}} K(\arctan, \tan u) = \lim_{u\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2u}{2u} = 0,
\end{aligned}
$$

arctan è ben condizionata su ogni x.

3)

$$
f(x) = \frac{ax+b}{x+c},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-c\},
$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $ac \neq b$ (se $ac = b$, allora $f(x) = a$).
Si ha

$$
F = \mathbb{R}\setminus\left\{-c, 0, -\frac{b}{a}\right\}
$$

con punti di frontiera $-\infty, -c, 0, -\frac{b}{a}$ e $+\infty$. Per $x \in F$, si ha

$$
\begin{aligned}
K(f, x) &= \frac{f'(x)\,x}{f(x)} = \frac{\frac{a\cdot(x+c)-(ax+b)\cdot 1}{(x+c)^2}\cdot x}{\frac{ax+b}{x+c}} = \frac{\frac{ac-b}{(x+c)^2}x}{\frac{ax+b}{x+c}} \\
&= \frac{(ac-b)\,x}{(x+c)(ax+b)}.
\end{aligned}
$$

Avendosi

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{(ac-b)\,x}{(x+c)(ax+b)} &= 0 \\
\lim_{x\to-c} \frac{(ac-b)\,x}{(x+c)(ax+b)} &= \infty \\
\lim_{x\to 0} \frac{(ac-b)\,x}{(x+c)(ax+b)} &= 0 \\
\lim_{x\to-\frac{b}{a}} \frac{(ac-b)\,x}{(x+c)(ax+b)} &= \infty \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{(ac-b)\,x}{(x+c)(ax+b)} &= 0
\end{aligned}
$$

si ha che f è mal condizionata se e solo se x è vicino a $-c$ o $-\frac{b}{a}$.

4) sinh, cosh, tanh;
Consideriamo

$$
f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}.
$$

Si ha
$$F=\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}.$$
con punti di frontiera $-\infty$, 0 e $+\infty$. Per $x\in F$, si ha
$$K\left(f,x\right)=\frac{f'\left(x\right)x}{f\left(x\right)}=\frac{\cosh x\cdot x}{\sinh x}=\frac{x}{\tanh x}.$$
Avendosi
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\tanh x}&=\infty\\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\tanh x}&=1\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\tanh x}&=\infty,\end{aligned}$$
si conclude che sinh è mal condizionata se e solo se x è grande.

Consideriamo
$$f\left(x\right)=\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$
Si ha
$$F=\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$$
con punti di frontiera $-\infty$, 0 e $+\infty$. Per $x\in F$, si ha
$$K\left(f,x\right)=\frac{f'\left(x\right)x}{f\left(x\right)}=\frac{\sinh x\cdot x}{\cosh x}=x\tanh x.$$
Avendosi
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}x\tanh x&=\infty\\ \lim_{x\to0}x\tanh x&=0\\ \lim_{x\to+\infty}x\tanh x&=\infty,\end{aligned}$$
si conclude che cosh è mal condizionata se e solo se x è grande.

Consideriamo
$$f\left(x\right)=\tanh x,\ x\in\mathbb{R}.$$
Si ha
$$F=\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$$
con punti di frontiera $-\infty$, 0 e $+\infty$. Per $x\in F$, si ha
$$K\left(f,x\right)=\frac{f'\left(x\right)x}{f\left(x\right)}=\frac{\frac{1}{\cosh^{2}x}\cdot x}{\tanh x}=\frac{x}{\cosh^{2}x\tanh x}=\frac{x}{\sinh x\cosh x}.$$

Avendosi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sinh x \cosh x} &= 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sinh x \cosh x} &= 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sinh x \cosh x} &= 0, \end{aligned}$$

si conclude che tanh è ben condizionata su ogni x.

5)

$$f(x) = \sin x \cos x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Risulta

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \text{ non è un multiplo di } \frac{\pi}{2} \right\}$$

con punti di frontiera i multipli di $\frac{\pi}{2}$. Ricordando un esercizio precedente sull'indice di condizionamento quando si scala la variabile indipendente o la variabile dipendente, si ha, per $x \in F$,

$$K(f,x) = K(g,x) \text{ con } g \text{ la funzione } g(u) = \sin 2u$$

e

$$K(g,x) = K(\sin, 2x) = \frac{2x}{\tan 2x}.$$

Supponendo $x \in (-\pi, \pi]$ e avendosi sui punti di frontiera in $(-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\pi} \frac{2x}{\tan 2x} = \infty,\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\tan 2x} = \infty \\ &\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 2x} = 1,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\tan 2x} = \infty \\ &\lim_{x\to\pi} \frac{2x}{\tan 2x} = \infty \end{aligned}$$

si conclude che f è mal condizionata se e solo se x è vicino a $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ o π.

6)

$$f(x) = x^x = e^{x \log x},\ \ x > 0.$$

Risulta

$$F = (0, +\infty)$$

con punti di frontiera 0 e $+\infty$. Si ha, per $x \in F$,

$$K(f,x) = \frac{f'(x)\, x}{f(x)} = \frac{e^{x \log x} \left(1 \cdot \log x - x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x}{e^{x \log x}} = (\log x - 1)\, x.$$

Avendosi sui punti di frontiera di F

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\log x-1)\,x &= \lim_{u\to-\infty}(u-1)\,e^u=0\\ \lim_{x\to+\infty}(\log x-1)\,x &= \infty,\end{aligned}$$

si conclude che f è mal condizionata se e solo se x è grande.

7)

$$f(x)=x^n\log x,\ \ x>0,$$

dove n è un intero positivo.

Risulta

$$F=(0,+\infty)\setminus\{1\}$$

con punti di frontiera 0, 1 e $+\infty$. Si ha, per $x\in F$,

$$\begin{aligned}K(f,x) &= \frac{f'(x)\,x}{f(x)}=\frac{\left(nx^{n-1}\cdot\log x-x^n\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x}{x^n\log x}=\frac{nx^n\log x-x^n}{x^n\log x}\\ &= \frac{n\log x-1}{\log x}=n-\frac{1}{\log x}.\end{aligned}$$

Avendosi sui punti di frontiera di F

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(n-\frac{1}{\log x}\right) &= n\\ \lim_{x\to 1}\left(n-\frac{1}{\log x}\right) &= \infty\\ \lim_{x\to+\infty}\left(n-\frac{1}{\log x}\right) &= n\end{aligned}$$

si conclude che f è mal condizionata se e solo se x è vicino a 1.

8)

$$f(x)=\log(\log x),\ \ x>1.$$

Risulta

$$F=(1,+\infty)\setminus\{e\}$$

con punti di frontiera 1, e e $+\infty$. Ricordando un esercizio precedente sull'indice di condizionamento della composta, si ha, per $x\in F$,

$$K(f,x)=K(\log,\log x)\cdot K(\log,x)=\frac{1}{\log(\log x)}\cdot\frac{1}{\log x}=\frac{1}{\log(\log x)\log x}$$

Avendosi sui punti di frontiera di F

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\log(\log x)\log x} &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{\log u\cdot u}=\lim_{v\to-\infty}\frac{1}{ve^v}=\infty\\ \lim_{x\to e}\frac{1}{\log(\log x)\log x} &= \infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log(\log x)\log x} &= 0\end{aligned}$$

si conclude che f è mal condizionata se e solo se x è vicino a 1 o vicino a a e.

Esercizio. Per ognuna delle seguenti funzioni di due variabili, determinare gli indici di condizionamento e i punti x in cui è mal condizionata:

1) $f(x) = x_1^n - x_2^n,\ x \in \mathbb{R}^2$, dove n è un intero positivo.

   Si ha, per $x_1, x_2 \neq 0$ con $x_1 \neq \pm x_2$ se n è pari e $x_1 \neq x_2$ se n è dispari (e quindi $f(x) \neq 0$),

$$\begin{aligned} K_1(f,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, x_1}{f(x)} = \frac{n x_1^{n-1} \cdot x_1}{x_1^n - x_2^n} = \frac{n x_1^n}{x_1^n - x_2^n} = \frac{n}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} \\ K_2(f,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, x_2}{f(x)} = \frac{-n x_2^{n-1} \cdot x_2}{x_1^n - x_2^n} = -\frac{n x_2^n}{x_1^n - x_2^n} = \frac{n}{1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n}. \end{aligned}$$

   Si ha pertanto, con $t = \frac{x_1}{x_2}$,

$$\begin{aligned} K_1(f,x) &= \frac{n}{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^n} = \frac{n t^n}{t^n - 1} \\ K_2(f,x) &= \frac{n}{1 - t^n}. \end{aligned}$$

   Come funzione di t, gli indici di condizionamento hanno dominio

$$F = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

   con punti di frontiera

$$\begin{cases} -\infty, 0, -1, 1, +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty, 0, 1, +\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

   Considerando i limiti sui punti di frontiera degli indici di condizionamento si vede che la funzione f è mal condizionata se e solo se t è vicino a ± 1 se n è pari e vicino a 1 se n è dispari.

2) $f(x) = g\left(\frac{x_1}{x_2}\right),\ x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\}$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Si ha, per $x_1, x_2 \neq 0$ e $f(x) = g(\frac{x_1}{x_2}) \neq 0$,

$$\begin{aligned} K_1(f,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, x_1}{f(x)} = \frac{g'(\frac{x_1}{x_2}) \frac{1}{x_2} x_1}{g(\frac{x_1}{x_2})} = \frac{g'(t) t}{g(t)} = K(g,t) \\ K_2(f,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, x_2}{f(x)} = \frac{g'(\frac{x_1}{x_2}) \left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right) x_2}{g(\frac{x_1}{x_2})} = -\frac{g'(t) t}{g(t)} = -K(g,t) \end{aligned}$$

   dove $t = \frac{x_1}{x_2}$. La funzione f è mal condizionata se e solo se g è mal condizionata su t.

3) $f(x) = x_1^{x_2} = e^{x_2 \log x_1},\ x \in D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.

Si ha, per $x \in D$ con $x_2 \neq 0$ (quindi $x_1, x_2 \neq 0$ e $f(x) \neq 0$),

$$\begin{aligned}
K_1(f,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, x_1}{f(x)} = \frac{e^{x_2 \log x_1} x_2 \frac{1}{x_1} \cdot x_1}{e^{x_2 \log x_1}} = x_2 \\
K_2(f,x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, x_2}{f(x)} = \frac{e^{x_2 \log x_1} \log x_1 \cdot x_2}{e^{x_2 \log x_1}} = \log x_1 \cdot x_2.
\end{aligned}$$

Gli indici di condizionamento hanno espressioni così semplici che si può dire che la funzione f è mal condizionata se e solo se x_2 è grande o $\log x_1 \cdot x_2$ è grande.

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento della funzione norma euclidea $\|\ \cdot\ \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e i punti di $\mathbb{R}^n$ in cui è mal condizionata.

Si ha

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha, per $x \in \mathbb{R}^n$ con $x_1, \ldots, x_n \neq 0$ (e quindi anche $f(x) \neq 0$) e per $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$K_i(f, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, x_i}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} 2x_i \cdot x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} = \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \leq 1.$$

Quindi f è ben condizionta su ogni dato x. Si ha addirittura

$$|\delta| \dot{\leq} \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |\varepsilon_j|.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
|\delta| &\doteq \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \varepsilon_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \varepsilon_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} |\varepsilon_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |\varepsilon_j| \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |\varepsilon_j| = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |\varepsilon_j|.
\end{aligned}$$

Esercizio. Determinare gli indici di condizionamento di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vale a dire

$$f(x) = a^T x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$, e i punti di $\mathbb{R}^n$ in cui è mal condizionata.

Per $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_1, ..., x_n \neq 0$ e $f(x) = a^T x \neq 0$ e per $i \in \{1, ..., n\}$ si ha

$$K_i\left(f, x\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right) x_i}{f\left(x\right)} = \frac{a_i x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j}.$$

Se $a_i = 0$, si ha $K_i\left(f, x\right) = 0$. Se $a_i \neq 0$, risulta

$$K_i\left(f, x\right) = \frac{a_i x_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_i x_i} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_i} \cdot \frac{x_j}{x_i}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_j}{a_i} \cdot \frac{x_j}{x_i}}$$

Per cui, f è mal condizionata su x se e solo se esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ con $a_i \neq 0$ tale che

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_j}{a_i} \cdot \frac{x_j}{x_i} \text{ è vicino a } -1.$$

Esercizio. Si consideri un polinomio di grado n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k},\ x \in \mathbb{R},$$

dove $k \in \{0, \ldots, n\}$ e $a_k \neq 0$. Determinare l'indice di condizionamento del polinomio e i punti in cui è mal condizionato.

Risulta

$$F = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ e } p(x) \neq 0\}$$

con punti di frontiera $-\infty$, 0, gli zeri di p e $+\infty$. Si ha, per $x \in F$,

$$\begin{aligned} K(p, x) &= \frac{p'(x)\, x}{p(x)} = \frac{\left(n a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + (n-k)\, a_k x^{n-k-1}\right) x}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k}} \\ &= \frac{n a_n x^n + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (n-k)\, a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k}}. \end{aligned}$$

Avendosi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{n a_n x^n + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (n-k)\, a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k}} &= n \\ \lim_{x \to 0} \frac{n a_n x^n + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (n-k)\, a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k}} &= n-k \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{n a_n x^n + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (n-k)\, a_k x^{n-k}}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k}} &= n, \end{aligned}$$

si conclude che p può essere mal condizionato solo sugli zeri di p non nulli. Sia a uno zero non nullo semplice di p, cioè $p'(a) \neq 0$. Avendosi

$$\lim_{x \to a} K(p, x) = \lim_{x \to a} \frac{p'(x)\, x}{p(x)} = \infty$$

si conclude che p è mal condizionato su un dato x vicino a a. Sia ora a uno zero non nullo di p di molteplicità ν, cioè

$$p^{(k)}(a) = 0,\ k \in \{0, 1, \ldots, \nu - 1\},\ \text{ e } p^{(\nu)}(a) \neq 0.$$

Risulta, usando lo sviluppo di Taylor attorno a a di p e p',

$$\lim_{x \to a} K(p, x) = \lim_{x \to a} \frac{p'(x)\, x}{p(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{p^{(\nu)}(a)}{(\nu-1)!}(x-a)^{\nu-1} + O\left((x-a)^{\nu}\right)\right) x}{\frac{p^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu} + O\left((x-a)^{\nu+1}\right)} = \infty.$$

Si conclude che p è mal condizionato se e solo se x è uno zero non nullo di p.