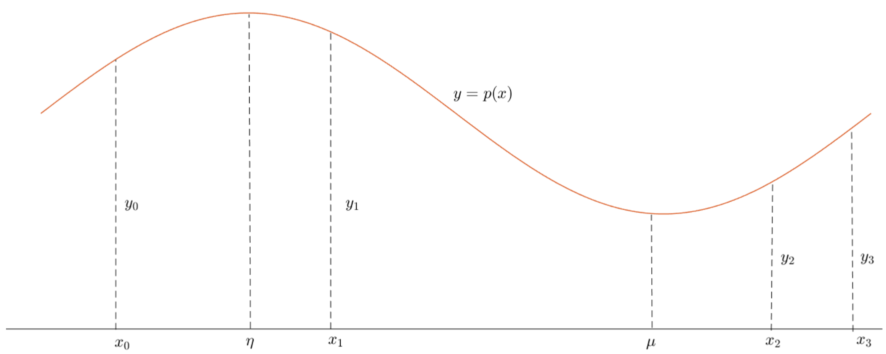
Esercizio. Si consideri l'interpolazione con un polinomio p di grado ≤ 3 dei dati (x_i, y_i), $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si assuma

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

e

$$y_0 < y_1, \; y_1 > y_2 \text{ e } y_2 < y_3.$$

Mostrare che p ha un massimo locale $\eta \in (x_0, x_2)$ e un minimo locale $\mu \in (x_1, x_3)$ con $\eta < \mu$.



Per il teorema di Lagrange si ha

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & y_1 - y_0 = p(x_1) - p(x_0) = p'(\xi_1)(x_1 - x_0) \\ 0 & > & y_2 - y_1 = p(x_2) - p(x_1) = p'(\xi_2)(x_2 - x_1) \\ 0 & < & y_3 - y_2 = p(x_3) - p(x_2) = p'(\xi_3)(x_3 - x_2) \end{array}$$

con $\xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2)$ e $\xi_3 \in (x_2, x_3)$. Si ottiene

$$p'(\xi_1) > 0, \; p'(\xi_2) < 0 \text{ e } p'(\xi_3) > 0.$$

Quindi dalla continuità di p' esistono punti $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ e $\mu \in (\xi_2, \xi_3)$ tali che $p'(\eta) = p'(\mu) = 0$. Osservare che $\eta < \xi_2 < \mu$. Poichè p' è una parabola e η e μ sono i due zeri distinti della parabola con $\eta < \mu$, il vertice della parabola è nell'intervallo (η, μ). Dal fatto che

$$p'(\xi_1) > 0 = p'(\eta) \text{ con } \xi_1 < \eta,$$

segue che la parabola p' è rivolta verso l'alto. Quindi, a destra e a sinistra di η la parabola p' è positiva e negativa, rispettivamente, e si conclude che η è un punto di massimo di p. Inoltre, a destra e a sinistra di μ la parabola è negativa e positiva, rispettivamente, e si conclude che μ è un punto di minimo di p.

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con $n = 1$, per quali dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 0?

Per i punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, l'avere un polinomio di interpolazione di grado ≤ 0 significa essere interpolati con una retta orizzontale. Per cui, il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 0 se e solo se $y_0 = y_1$.

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con $n = 2$, per quali dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 1?

Per i punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, l'avere un polinomio di interpolazione di grado ≤ 1 significa essere interpolati con una retta. Per cui, il polinomio di interpolazione ha grado ≤ 1 se e solo se $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sono allineati lungo una retta.

Esercizio. Determinare la retta e la parabola precedenti risolvendo il sistema di Vandermonde.

Per la retta si ha il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

vale a dire

$$\begin{cases} -a_1 + a_0 = 3 \\ 2a_1 + a_0 = -5 \end{cases}$$

da cui

$$3a_0 = 1 \text{ e } 3a_1 = -8.$$

Quindi

$$p(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Per la parabola si ha

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

vale a dire

$$\begin{cases} a_2 - a_1 + a_0 = 1 \\ a_0 = 2 \\ a_2 + a_1 + a_0 = -1 \end{cases}$$

da cui

$$a_0 = 2$$

e

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = -1 \\ a_2 + a_1 = -3 \end{cases}$$

e si ottiene

$$2a_1 = -2 \text{ e } 2a_2 = -4.$$

Quindi

$$p(x) = -2x^2 - x + 2, \; x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange del polinomio di interpolazione nel caso $n = 1$, ritrovare la nota equazione

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

della retta passante per i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

L'equazione della retta è

$$\begin{aligned}
y &= p\,(x) = y_0 \cdot \ell_0\,(x) + y_1 \cdot \ell_1\,(x) \\
&= y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&= y_0 \cdot \frac{x - x_0 + x_0 - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&= y_0 \cdot \left(-\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + 1 \right) + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&= y_0 + (y_1 - y_0)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.
\end{aligned}$$

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange, determinare il polinomio di interpolazione relativo ai seguenti dati

x_i	y_i
-2	0
-1	1
0	0
1	2
2	0

Si ha

$$p(x) = \sum_{j=0}^{4} y_j \cdot \ell_j(x), \ \ x \in \mathbb{R},$$

con $y_0 = y_2 = y_4 = 0$. Quindi, per determinare p è sufficiente determinare $\ell_1(x)$ e $\ell_3(x)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\ell_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3} \cdot \frac{x-x_4}{x_1-x_4} = \frac{x+2}{1} \cdot \frac{x}{-1} \cdot \frac{x-1}{-2} \cdot \frac{x-2}{-3} \\
&= -\frac{1}{6}(x+2)\,x\,(x-1)(x+2) \\
&= -\frac{1}{6}\left(x^2-4\right)\left(x^2-x\right) \\
&= -\frac{1}{6}\left(x^4-x^3-4x^2+4x\right), \ \ x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\ell_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_2-x_2} \cdot \frac{x-x_4}{x_3-x_4} = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x-2}{-1} \\
&= -\frac{1}{6}(x+2)(x+1)\,x\,(x-2) \\
&= -\frac{1}{6}\left(x^2-4\right)\left(x^2+x\right) \\
&= -\frac{1}{6}\left(x^4+x^3-4x^2-4x\right), \ \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
p(x) &= y_1 \cdot \ell_1(x) + y_3 \cdot \ell_3(x) \\
&= \ell_1(x) + 2\ell_3(x) \\
&= -\frac{1}{6}\left(x^4-x^3-4x^2+4x\right) - \frac{2}{6}\left(x^4+x^3-4x^2-4x\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}x, \ \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Esercizio. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ nodi di interpolazione con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Nel caso in cui f sia un polinomio di grado $\leq n$, dire chi è il polinomio di interpolazione p_n di f relativo ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Sia $p = f$. Si ha che p è un polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa le condizioni di interpolazione

$$p(x_i) = f(x_i), \ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Quindi $p = f$ è il polinomio di interpolazione di f relativo ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Esercizio. Usando l'esercizio precedente, mostrare che se f è un polinomio di grado $\leq n$, allora

$$\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\ell_j(x) = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R},$$

dove ℓ_j, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sono i coefficienti di Lagrange relativi ai nodi x_j, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dire poi, per $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $x \in \mathbb{R}$, a cosa è uguale

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k \ell_j(x)\,.$$

Poiché f è il polinomio di interpolazione di f relativo ai nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$, quando esso viene espresso in forma di Lagrange si ottiene

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\ell_j(x)\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Considerando, per $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, il polinomio $f(x) = x^k$ si ottiene

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k \ell_j(x) = x^k,\ x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, per $k = 0$ si ottiene,

$$\sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio. Effettuare lo studio di funzione con il quale si mostra $\|w_3\|_{\left[0,\frac{\pi}{4}\right]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$.

Si ha

$$\begin{aligned} w_3(x) &= x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = x^3 - \frac{5\pi}{12}x^2 + \frac{\pi^2}{24}x \\ w_3'(x) &= 3x^2 - \frac{5\pi}{6}x + \frac{\pi^2}{24}. \end{aligned}$$

La derivata di w_3' è zero per

$$x_\pm = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{\frac{25\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{2}}}{6} = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \frac{\sqrt{7}\pi}{6}}{6} = \frac{1}{36}\left(5 \pm \sqrt{7}\right)\pi.$$

e entrambi questi punti $x_\pm$ sono in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Si ha w_3 crescente in $[0, x_-]$, decrescente in $[x_-, x_+]$ e crescente in $\left[x_+, \frac{\pi}{4}\right]$. Avendosi

$$\begin{aligned} &w_3(0) = 0 \\ &w_3(x_-) = 3.79 \cdot 10^{-2} \\ &w_3(x_+) = -1.13 \cdot 10^{-2} \\ &w_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

si conclude che

$$\|w_3\|_{\left[0,\frac{\pi}{4}\right]} = \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]} |w_3(x)| = 3.8 \cdot 10^{-2}.$$

Esercizio. Utilizzando il valore $\sin\frac{\pi}{12}$, determinare l'errore

$$e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)=p_2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{\pi}{12}$$

e confrontarlo con la maggiorazione trovata per il suo modulo.

Si ha

$$p_2\left(x\right)=\frac{24\sqrt{2}-36}{\pi^2}x^2+\frac{9-4\sqrt{2}}{\pi}x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Quindi

$$e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)=p_2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{\pi}{12}=5.5\cdot 10^{-3}.$$

La maggiorazione trovata è

$$\left|e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|\leq 6.0\cdot 10^{-3}.$$

Esercizio. Si considerino ora i due polinomi di interpolazione della funzione

$$f(x) = \sin x,\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

il primo relativo ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3 e il secondo ai nodi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, dove x_0, x_1, x_2 sono come nell'esempio sopra e

$$x_3 = \frac{\pi}{3} \text{ e } x_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Dare, sia per $x = \frac{\pi}{12}$ sia per $x = \frac{5}{12}\pi$, le maggiorazioni per il modulo dell'errore di interpolazione in x.

Si ha

$$|e_n(x)| \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \left\|\sin^{(n+1)}\right\|_{I_x}}{(n+1)!},\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nel caso $n = 3$, si ha

$$w_4(x) = x\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Per $x = \frac{\pi}{12}$, si ha

$$\begin{aligned} w_4\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{12}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^4}{3456} \end{aligned}$$

e

$$I_x = \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

e

$$\left\|\sin^{(4)}\right\|_{I_x} = \|\sin\|_{I_x} = \max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]} |\sin x| = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi

$$\left|e_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \leq \frac{\frac{\pi^4}{3456} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4!} = 1.0 \cdot 10^{-3}.$$

Per $x = \frac{5}{12}\pi$, si ha

$$\begin{aligned} w_4\left(\frac{5}{12}\pi\right) &= \frac{5}{12}\pi\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{5}{12}\pi\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{6}\frac{\pi}{12} = \frac{5\pi^4}{3456} \end{aligned}$$

e

$$I_x = \left[0, \frac{5}{12}\pi\right].$$

e

$$\left\|\sin^{(4)}\right\|_{I_x} = \|\sin\|_{I_x} = \max_{x\in\left[0,\frac{5}{12}\pi\right]} |\sin x| = \sin\frac{5}{12}\pi.$$

Quindi

$$\left|e_3\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right| \leq \frac{\frac{5\pi^4}{3456}\cdot\sin\frac{5}{12}\pi.}{4!} = 5.7\cdot 10^{-3}.$$

Nel caso $n=4$, si ha

$$w_5(x) = x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Per $x=\frac{\pi}{12}$, si ha

$$\begin{aligned} w_5\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{12}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi^5}{41472} \end{aligned}$$

e

$$I_x = \left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

e

$$\left\|\sin^{(5)}\right\|_{I_x} = \|\cos\|_{I_x} = \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |\cos x| = 1.$$

Quindi

$$\left|e_4\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \leq \frac{\frac{5\pi^5}{41472}\cdot 1}{5!} = 3.1\cdot 10^{-4}.$$

Per $x=\frac{5}{12}\pi$, si ha

$$\begin{aligned} w_5\left(\frac{5}{12}\pi\right) &= \frac{5}{12}\pi\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{5}{12}\pi\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{6}\frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{12}\pi\right) = -\frac{5\pi^5}{41472} \end{aligned}$$

e

$$I_x = \left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

e

$$\left\|\sin^{(5)}\right\|_{I_x} = 1.$$

Quindi

$$\left|e_4\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right| \leq \frac{\frac{5\pi^5}{41472}\cdot 1}{5!} = 3.1\cdot 10^{-4}.$$

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x},\ x \in [1,5].$$

Determinare il polinomio di interpolazione p_2 di f relativo ai nodi

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{9}{4},\ x_2 = 4,$$

dove f assume i valori

$$f(x_0) = 1,\ f(x_2) = \frac{3}{2},\ f(x_3) = 2.$$

Determinare la maggiorazione di $|e_2(x)|$ per $x = 2$, $x = 3$ e $x = 5$. (Si osservi che $p_2(x)$ è un'approssimazione di $\sqrt{x}$). Si confronti poi la maggiorazione con $e_2(x)$ determinato utilizzando $\sqrt{x}$. Si determini infine la maggiorazione per $\|e_2\|_{[1,5]}$.

Si ha

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-\frac{9}{4}}{-\frac{5}{4}}\cdot\frac{x-4}{-3} = \frac{4}{15}\left(x-\frac{9}{4}\right)(x-4)\\
\ell_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-1}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{x-4}{-\frac{7}{4}} = -\frac{16}{35}(x-1)(x-4)\\
\ell_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-1}{3}\cdot\frac{x-\frac{9}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{21}(x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right).
\end{aligned}$$

Per cui

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x)\\
&= \frac{4}{15}\left(x-\frac{9}{4}\right)(x-4) - \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{35}(x-1)(x-4) + 2\cdot\frac{4}{21}(x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)\\
&= \frac{4}{15}\left(x^2-\frac{25}{4}x+9\right) - \frac{24}{35}\left(x^2-5x+4\right) + \frac{8}{21}\left(x^2-\frac{13}{4}x+\frac{9}{4}\right)\\
&= -\frac{4}{105}x^2 + \frac{11}{21}x + \frac{18}{35}.
\end{aligned}$$

Si ha

$$|e_2(x)| \le \frac{|w_3(x)|\cdot\left\|\sqrt{\cdot}^{(3)}\right\|_{I_x}}{3!},\ x \in [1,5],$$

con

$$w_3(x) = (x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)(x-4)$$

e

$$\frac{d^3}{dx^3}\sqrt{x} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Per $x = 2$, si ha

$$\begin{aligned}
w_3(x) &= (2-1)\left(2-\frac{9}{4}\right)(2-4) = \frac{1}{2} \\
I_x &= [1,4] \\
\left\|\sqrt{\cdot}^{(3)}\right\|_{I_x} &= \max_{x\in[1,4]}\left|\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right| = \frac{3}{8} \\
|e_2(x)| &\leq \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}}{6} = \frac{1}{32} = 3.1\cdot 10^{-2} \\
e_2(x) &= p_2(2) - \sqrt{2} = -4.7\cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Per $x = 3$, si ha

$$\begin{aligned}
w_3(x) &= (3-1)\left(3-\frac{9}{4}\right)(3-4) = \frac{3}{4} \\
I_x &= [1,4] \\
\left\|\sqrt{\cdot}^{(3)}\right\|_{I_x} &= \frac{3}{8} \\
|e_2(x)| &\leq \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{64} = 4.7\cdot 10^{-2} \\
e_2(x) &= p_2(3) - \sqrt{3} = 1.1\cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

Per $x = 5$, si ha

$$\begin{aligned}
w_3(x) &= (5-1)\left(5-\frac{9}{4}\right)(5-4) = 11 \\
I_x &= [1,5] \\
\left\|\sqrt{\cdot}^{(3)}\right\|_{I_x} &= \frac{3}{8} \\
|e_2(x)| &\leq \frac{11\cdot\frac{3}{8}}{6} = \frac{11}{16} \\
e_2(x) &= p_2(5) - \sqrt{5} = -5.5\cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

Infine, si ha

$$\|e_2\|_{[1,5]} \leq \frac{\|w_3\|_{[1,5]}\cdot\left\|\sqrt{\cdot}^{(3)}\right\|_{[1,5]}}{3!} = \frac{\|w_3\|_{[1,5]}\cdot\frac{3}{8}}{6} = \frac{1}{16}\|w_3\|_{[1,5]}.$$

Determiniamo

$$\|w_3\|_{[1,5]} = \max_{x\in[1,5]}|w_3(x)|.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
w_3(x) &= (x-1)\left(x-\frac{9}{4}\right)(x-4) = (x-1)\left(x^2-\frac{25}{4}x+9\right) \\
&= x^3-\frac{25}{4}x^2+9x-x^2+\frac{25}{4}x-9 \\
&= x^3-\frac{29}{4}x^2+\frac{61}{4}x-9 \\
&= \frac{1}{4}\left(4x^3-29x^2+61x-36\right) \\
w_3'(x) &= \frac{1}{4}\left(12x^2-58x+61\right)
\end{aligned}$$

La derivata di w_3' è zero per

$$x_- = \frac{29-\sqrt{29^2-12\cdot 61}}{12} = 1.547 \quad \text{e} \quad x_+ = \frac{29+\sqrt{29^2-12\cdot 61}}{12} = 3.287$$

e entrambi questi punti $x_\pm$ sono in $[1,5]$. Si ha w_3 crescente in $[1,x_-]$, decrescente in $[x_-,x_+]$ e crescente in $[x_+,5]$. Avendosi

$$\begin{aligned}
&w_3(1) = 0 \\
&w_3(x_-) = 0.9433 \\
&w_3(x_+) = -1.691 \\
&w_3(5) = 11
\end{aligned}$$

si conclude che

$$\|w_3\|_{[1,5]} = 11.$$

Quindi

$$\|e_2\|_{[1,5]} \leq \frac{1}{16}\|w_3\|_{[1,5]} = \frac{11}{16}.$$

Esercizio. Si consideri ora l'approssimazione di f data dal polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio c di $[a,b]$. Dare una maggiorazione per la norma del massimo della funzione errore.

Il polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio c è

$$q_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n, \; x \in \mathbb{R},$$

e l'errore è dato da

$$\delta_n(x) = q_n(x) - f(x) = -\frac{(x-c)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \; x \in [a,b],$$

dove ξ è compreso tra c e x. Quindi,

$$\|\delta_n\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\delta_n(x)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = \frac{(b-a)^{n+1} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Esercizio. Cosa diventa la prima maggiorazione nel caso di nodi non "spalmati" ammassati tutti verso un estremo dell'intervallo $[a, b]$? In tale situazione, la maggiorazione risulta migliore o peggiore di quella per l'estrapolazione?

La maggiorazione è

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (n+1)! h^{n+1}$$

con

$$h := \max \left\{ x_0 - a, \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i), b - x_n \right\}.$$

Nel caso di nodi ammassati tutti verso un estremo dell'intervallo $[a, b]$ si ha

$$h \approx b - a$$

è quindi

$$(n+1)! h^{n+1} \approx (n+1)! (b-a)^{n+1} > (b-a)^{n+1}$$

La maggiorazione è peggiore di $(b-a)^{n+1}$ che è quella per l'estrapolazione.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [1, 10],$$

interpolata ai nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 8$. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi "spalmati".

Fare lo stesso con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [0.1, 1],$$

interpolata ai nodi $x_0 = 0.125$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$ e $x_3 = 1$. Questa nuova funzione f è l'inversa della precedente funzione f. Inoltre, rispetto alla precedente funzione, nodi e valori di interpolazione si scambiano.

Dal momento che in entrambi i casi non si ha $x_0 = a$ e $x_n = b$, la maggiorazione per nodi "spalmati" è

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$

Si ha $n = 3$ e

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d^3}{dx^3}\left(-x^{-2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(2x^{-3}\right) = \frac{d}{dx}\left(-6x^{-4}\right) = 24x^{-5},\ x \neq 0.$$

Per cui, nel caso dell'intervallo $[1, 10]$ si ha

$$\begin{aligned} &h = 4 \\ &\|f^{(4)}\|_{[1,10]} = \max_{x \in [1,10]} \left|24x^{-5}\right| = 24 \end{aligned}$$

e quindi

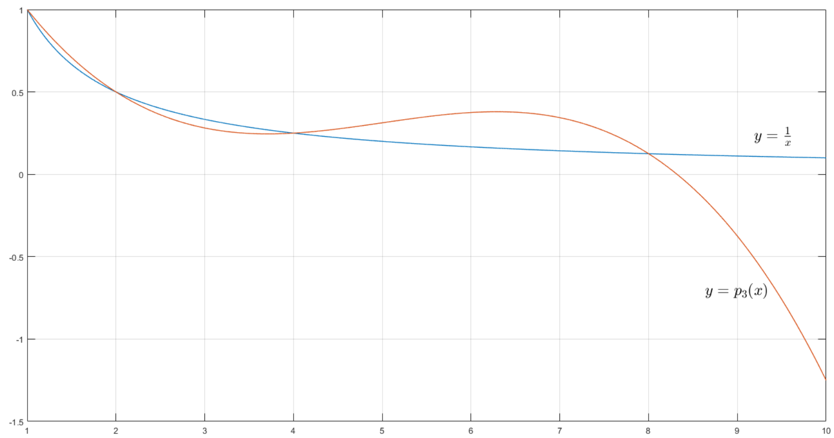
$$\|e_3\|_{[1,10]} \leq 4^4 \cdot 24 = 6144.$$

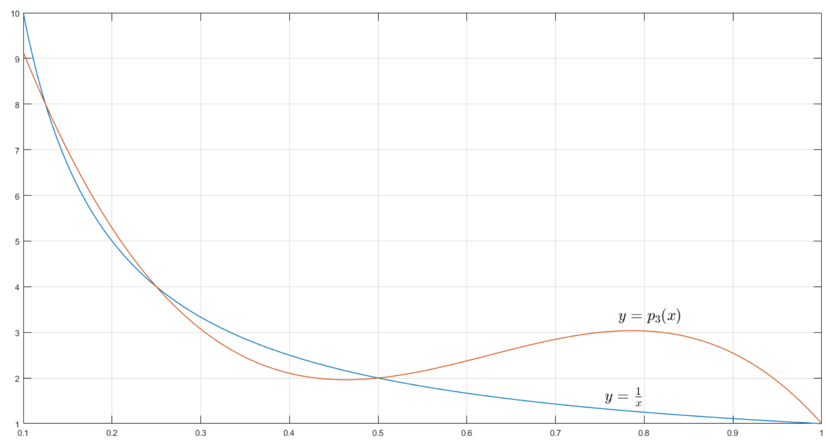
Nel caso dell'intervallo $[0.1, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} &h = 0.5 \\ &\|f^{(4)}\|_{[0.1,1]} = \max_{x \in [0.1,1]} \left|24x^{-5}\right| = 24 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

e quindi

$$\|e_3\|_{[0.1,1]} \leq (0.5)^4 \cdot 24 \cdot 10^5 = 150\ 000.$$


$y = \frac{1}{x}$
$y = p_3(x)$


$y = p_3(x)$
$y = \frac{1}{x}$

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x},\ x\in\left[1,b\right],$$

dove $b>1$, interpolata in $n+1$ nodi equidistanti. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti e determinare quando questo valore converge a zero per $n\to\infty$.

Fare lo stesso con la funzione

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x},\ x\in\left[\frac{1}{b},1\right].$$

Nel caso della prima funzione, la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\|e_n\|_{[1,b]}\leq\frac{\left(b-a\right)^{n+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[1,b]}}{4n^{n+1}\left(n+1\right)}.$$

Avendosi, per ogni $k\in\{0,1,2,\ldots\}$,

$$f^{(k)}\left(x\right)=\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{-1}\right)=\left(-1\right)^k k!x^{-k-1},\ x\neq 0,$$

si ha

$$\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[1,b]}=\max_{x\in[1,b]}\left|\left(-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)!x^{-n-2}\right|=\left(n+1\right)!$$

Per cui si ha

$$\|e_n\|_{[1,b]}\leq\frac{\left(b-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)!}{4n^{n+1}\left(n+1\right)}=\frac{\left(b-1\right)^{n+1}n!}{4n^{n+1}}$$

e, usando l'approssimazione di Stirling, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(b-1\right)^{n+1}n!}{4n^{n+1}}=0,\ n\to\infty,$$

se e solo se $b-1\leq e$.

Nel caso della seconda funzione, la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\|e_n\|_{\left[\frac{1}{b},1\right]}\leq\frac{\left(1-\frac{1}{b}\right)^{n+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{1}{b},1\right]}}{4n^{n+1}\left(n+1\right)}.$$

Avendosi

$$\left\|f^{(n+1)}\right\|_{\left[\frac{1}{b},1\right]}=\max_{x\in\left[\frac{1}{b},1\right]}\left|\left(-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)!x^{-n-2}\right|=\left(n+1\right)!b^{n+2}$$

si ha

$$\|e_n\|_{\left[\frac{1}{b},1\right]}\leq\frac{\left(b-1\right)^{n+1}\left(n+1\right)!b^{n+2}}{4n^{n+1}\left(n+1\right)}=b\frac{\left(b\left(b-1\right)\right)^{n+1}n!}{4n^{n+1}}$$

e, di nuovo come prima con l'approssimazione di Stirling, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(b\left(b-1\right)\right)^{n+1}n!}{4n^{n+1}}=0,\ n\to\infty,$$

se e solo se $b\left(b-1\right)\leq e$.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{n+1}, \ x \in [a,b],$$

interpolata su $n+1$ nodi, cioè con un polinomio di grado $\leq n$. Determinare il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per l'estrapolazione e il valore della maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti. Provare che il primo valore tende a zero per $n \to \infty$ se e solo se $b-a<1$ e il secondo valore tende a zero per $n \to \infty$ se e solo se $b-a \leq e$.

La maggiorazione per l'estrapolazione è

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{[a,b]}}{(n+1)!}$$

e la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}.$$

Si ha

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!, \ x \in [a,b].$$

e quindi

$$\left\| f^{(n+1)} \right\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = (n+1)!$$

Pertanto, la maggiorazione per l'estrapolazione è

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} = (b-a)^{n+1}$$

e la maggiorazione $(b-a)^{n+1}$ tende a zero per $n \to \infty$ se e solo se $b-a<1$. Invece, la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{4n^{n+1}(n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1} n!}{4n^{n+1}}.$$

Ora, usando l'approssimazione di Stirling, si ottiene

$$\frac{(b-a)^{n+1} n!}{4n^{n+1}} \sim \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{4n^{n+1}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(b-a) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{b-a}{e} \right)^n, \ n \to \infty,$$

e pertanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)^{n+1} n!}{4n^{n+1}} = 0, \ n \to \infty,$$

se e solo se $b-a \leq e$.

Esercizio. Si determini il rapporto tra la maggiorazione della norma del massimo dell'errore del polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio di $[a,b]$ (trovata in un precedente esercizio) e la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti. Mostrare che tale rapporto tende a $+\infty$ per $n \to \infty$. Costruire una tabella che fornisce i valori di tale rapporto per $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

Il rapporto tra la maggiorazione della norma del massimo dell'errore del polinomio di Taylor di grado $\leq n$ attorno al punto medio di $[a,b]$ e la maggiorazione di $\|e_n\|_{[a,b]}$ per nodi equidistanti è

$$\frac{\text{Taylor punto medio}}{\text{nodi equidistanti}} = \frac{\frac{(b-a)^{n+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(b-a)^{n+1}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}} = \frac{4n^{n+1}}{2^{n+1}n!}.$$

Usando l'approssimazione di Stirling si ha

$$\frac{4n^{n+1}}{2^{n+1}n!} \sim \frac{4n^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e}{2}\right)^n, \ n \to \infty,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^{n+1}}{2^{n+1}n!} = +\infty.$$

Una tabella dei valori di $\frac{4n^{n+1}}{2^{n+1}n!}$ per $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ è riportata sotto

n	$\frac{4n^{n+1}}{n!}$
1	1
2	2
3	3.4
4	5.3
5	8.1
6	$1.2 \cdot 10$
7	$1.8 \cdot 10$

Esercizio. Si osservi che per costruire il polinomio di interpolazione p_8 della funzione coseno nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$, sono richiesti i valori della funzione coseno nei nodi equidistanti

$$x_i = i\frac{\frac{\pi}{2}}{8} = i\frac{\pi}{16},\ i \in \{0, 1, \ldots, 8\}\,.$$

Per $i \in \{0, 4, 8\}$, i valori $\cos x_i$ sono $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$. Determinare i valori $\cos x_i$ per $i \notin \{0, 4, 8\}$ usando le formule trigonometriche di bisezione e di addizione a partire dal valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$ di coseno e seno in $\frac{\pi}{4}$. Questo mostra che non è necessario avere un modo di calcolare $\cos x$ per ogni x, al fine di costruire p_8, che fornisce approssimazioni con sette cifre decimali esatte.

Con le formule di bisezione

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
\sin\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
\cos\frac{\pi}{16} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\
\sin\frac{\pi}{16} &= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi, usando le formule di addizione

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\cos x_1 &= \cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\
\cos x_2 &= \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
\cos x_3 &= \cos\frac{3\pi}{16} = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}\right) = \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{16} \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cos x_7 &= \cos\frac{7\pi}{16} = \sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\
\cos x_6 &= \cos\frac{6\pi}{16} = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
\cos x_5 &= \cos\frac{5\pi}{16} = \sin\frac{3\pi}{16} = \sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}\right) = \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{16} \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.
\end{aligned}
$$

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = e^x, \; x \in [0,1],$$

su $n+1$ nodi equidistanti. Determinare n in modo da avere $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \mathrm{TOL} = 10^{-10}$.

Dal momento che

$$f^{(k)} = f, \; k \in \mathbb{N},$$

la condizione sulle derivate risulta soddisfatta con

$$M = \|f\|_{[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} e^x = e \quad \text{e } c = 1.$$

I valori della maggiorazione

$$\frac{M}{4(n+1)} \left(\frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1} = \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

di $\|e_n\|_{[0,1]}$ sono riportati nella tabella sottostante

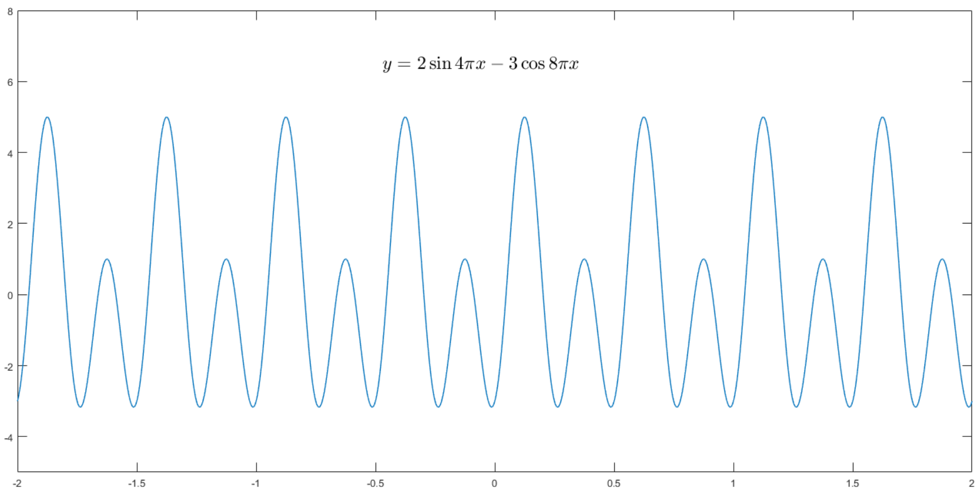
n	$\frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{1}{n} \right)^{n+1}$
1	$1.3 \cdot 10^{-1}$
2	$1.0 \cdot 10^{-2}$
3	$7.7 \cdot 10^{-4}$
4	$4.9 \cdot 10^{-5}$
5	$2.7 \cdot 10^{-6}$
6	$1.3 \cdot 10^{-7}$
7	$5.4 \cdot 10^{-9}$
8	$2.1 \cdot 10^{-10}$
9	$7.2 \cdot 10^{-12}$
10	$2.3 \cdot 10^{-13}$

Volendo $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \mathrm{TOL} = 10^{-10}$, si prende $n = 9$.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = 2\sin 4\pi x - 3\cos 8\pi x,\ \ x \in [-2,2],$$

su $n+1$ nodi equidistanti. Determinare n in modo da avere $\|e_n\|_{[-2,2]} \leq \mathrm{TOL} = 10^{-10}$.



Si ha

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),\ \ x \in [-2,2],$$

dove

$$f_1(x) = 2\sin 4\pi x$$

soddisfa la condizione sulle derivate con

$$M_1 = 2 \text{ e } c_1 = 4\pi,$$

e

$$f_2(x) = -3\cos 8\pi x$$

soddisfa la condizione sullr derivate con

$$M_2 = 3 \text{ e } c_2 = 8\pi.$$

Quindi la combinazione lineare $f = f_1 + f_2$, soddisfa la condizione delle derivate con

$$M = M_1 + M_2 = 5 \ \text{ e } \ c = \max\{c_1, c_2\} = 8\pi.$$

Osservare che nella maggiorazione

$$\frac{M}{4(n+1)}\left(\frac{(b-a)c}{n}\right)^{n+1} = \frac{5}{4(n+1)}\left(\frac{32\pi}{n}\right)^{n+1}$$

di $\|e_n\|_{[-2,2]}$, il fattore

$$\left(\frac{32\pi}{n}\right)^{n+1}$$

ha valori minori di 1 per $n > 32\pi = 100.53$. La seguente tabelle riportano i valori della maggiorazione per $n < 100$ e $n \geq 100$:

n	$\frac{5}{4(n+1)}\left(\frac{32\pi}{n}\right)^{n+1}$
10	$1.2 \cdot 10^{10}$
20	$3.2 \cdot 10^{13}$
40	$7.8 \cdot 10^{14}$
60	$9.7 \cdot 10^{11}$
80	$1.7 \cdot 10^{6}$

n	$\frac{5}{4(n+1)}\left(\frac{32\pi}{n}\right)^{n+1}$
100	$2.1 \cdot 10^{-2}$
105	$1.1 \cdot 10^{-4}$
110	$5.2 \cdot 10^{-7}$
115	$1.8 \cdot 10^{-9}$
120	$5.1 \cdot 10^{-12}$

Il minimo valore di n per cui la maggiorazione è minore di TOL $= 10^{-10}$ è $n = 118$.

Esercizio. Spiegare perché $p_{n,N}$ è una funzione continua.

La restrizione di $p_{n,N}$ a ogni sottointervallo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, è il polinomio $p_{n,N,i}$, che è una funzione continua. Da questo segue che $p_{n,N}$ è continua all'interno degli intervalli I_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, e nei nodi x_0 e x_n. Nei nodi $x_1, \ldots, x_{N-1}$, interni all'intervallo $[a, b]$, $p_{n,N}$ è continua dal momento che i vari pezzi $p_{n,N,i}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, si "saldano" su questi nodi: per $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_i^-} p_{n,N}(x) &= \lim_{x \to x_i} p_{n,N,i}(x) = f(x_i) = p_{n,N}(x_i) \\ \lim_{x \to x_i^+} p_{n,N}(x) &= \lim_{x \to x_i} p_{n,N,i+1}(x) = f(x_i) = p_{n,N}(x_i) \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x \to x_i} p_{n,N}(x) = p_{n,N}(x_i).$$

Esercizio. Dire su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = e^x, \; x \in [0,1],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con TOL $=$ 10^{-10}.

Nel caso dell'interpolazione lineare a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil = \left\lceil \frac{1 \cdot \sqrt{\|f\|_{[0,1]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{10^{10}} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{8}} \cdot 10^5 \right\rceil = 58292$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $N + 1 = 58293$.

Nel caso dell'interpolazione quadratica a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil = \left\lceil \frac{1 \cdot \sqrt[3]{\|f\|_{[0,1]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{10^{10}} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sqrt[3]{e}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot 10^{\frac{10}{3}} \right\rceil = 657$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $2N + 1 = 1315$.

Nel caso dell'interpolazione cubica a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)\sqrt[4]{\|f^{(4)}\|_{[a,b]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} \right\rceil = \left\lceil \frac{1 \cdot \sqrt[4]{\|f\|_{[0,1]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{10^{10}} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sqrt[4]{e}}{6} \cdot 10^{\frac{5}{2}} \right\rceil = 68$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è $3N + 1 = 205$.

Esercizio. Si consideri una tabella che contiene i valori $\sin x$ per

$$x = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 90^\circ.$$

Si supponga di calcolare i valori $\sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, interpolando linearmente a tratti i valori della tabella. Determinare la maggiorazione per il massimo modulo dell'errore di interpolazione lineare a tratti.

La maggiorazione è

$$\|e_{1,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^2 \, \|f''\|_{[a,b]}}{8} \cdot \frac{1}{N^2}$$

con $[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $N = 90$. Per cui

$$\|e_{1,90}\|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \| -\sin \|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}}{8} \cdot \frac{1}{90^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{8} \cdot \frac{1}{90^2} = 3.8 \cdot 10^{-5}.$$

Esercizio. Si voglia approssimare una funzione $f \in C^3([a,b])$ con una interpolazione lineare a tratti o quadratica a tratti utilizzando la formula

$$N = \frac{(b-a)\sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n\sqrt[n+1]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}}$$

per determinare il numero di sottointervalli (in realtà si dovrebbe prendere la parte intera superiore del membro destro).

Trovare per quali tolleranze TOL, l'interpolazione lineare utilizza un numero di punti in cui f deve essere nota inferiore a quello dell'interpolazione quadratica.

Si applichi il risultato trovato al caso della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [a,b],$$

dove $a \geq 1$.

Per l'interpolazione lineare a tratti il numero di sottointervalli è

$$N_1 = \frac{(b-a)\sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{TOL}}}$$

e il numero di punti è $N_1 + 1$. Per l'interpolazione quadratica a tratti il numero di sottointervalli è

$$N_2 = \frac{(b-a)\sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}}$$

e il numero di punti è $2N_2 + 1$.

Si vuole

$$N_1 + 1 < 2N_2 + 1$$

vale a dire

$$N_1 < 2N_2$$

vale a dire

$$\frac{(b-a)\sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathrm{TOL}}} < 2\frac{(b-a)\sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\mathrm{TOL}}}$$

vale a dire

$$\left(\frac{1}{\mathrm{TOL}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{\mathrm{TOL}}\right)^{\frac{1}{6}} < \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{12}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}.$$

Si ottiene

$$\frac{1}{\mathrm{TOL}} < \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{12}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}\right)^6$$

cioè

$$\mathrm{TOL} > \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{12}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}} \right)^{-6}.$$

Nel caso della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [a,b]\,,$$

con $a \geq 1$, si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(x) = \frac{2}{x^3} \text{ e } f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

e quindi

$$\|f''\|_{[a,b]} = \frac{2}{a^3} \text{ e } \|f'''\|_{[a,b]} = \frac{6}{a^4},$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{TOL} &> \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{12}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{6}{a^4}}}{\sqrt{\frac{2}{a^3}}} \right)^{-6} = \left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{12}} \cdot \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}} a^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} \right)^{-6} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}} a^{\frac{1}{6}} \right)^{-6} = \frac{1}{16a}. \end{aligned}$$