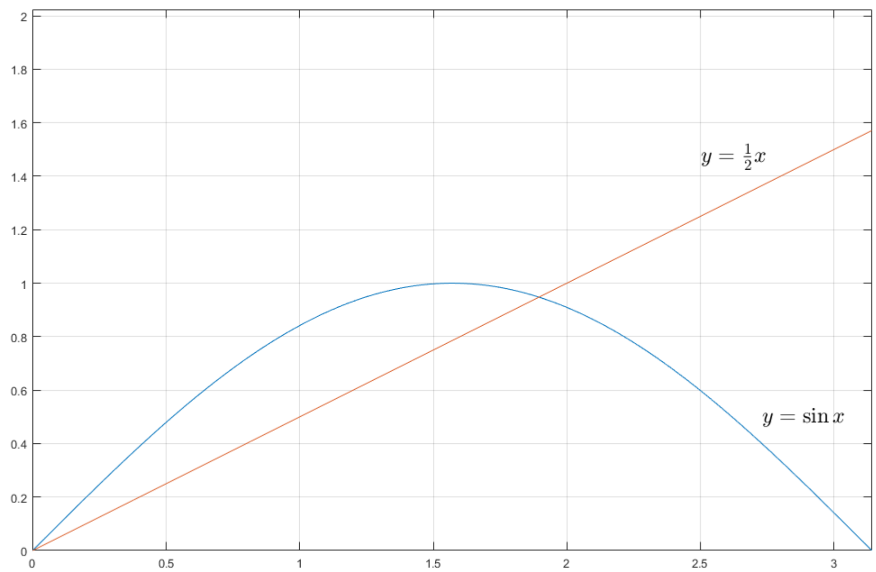
Esercizio. Provare che l'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}x$$

ha un'unica radice nell'intervallo $(0, \pi)$. Determinare un intervallo di localizzazione per essa.



Sia

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x, \; x \in [0, \pi].$$

Si ha

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}, \; x \in [0, \pi].$$

con

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0, \; 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ f'(x) &= 0, \; x = \frac{\pi}{3}, \\ f'(x) &< 0, \; \frac{\pi}{3} < x \leq \pi. \end{aligned}$$

Per cui f è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e decrescente in $\left[\frac{\pi}{3}.\pi\right]$. Avendosi

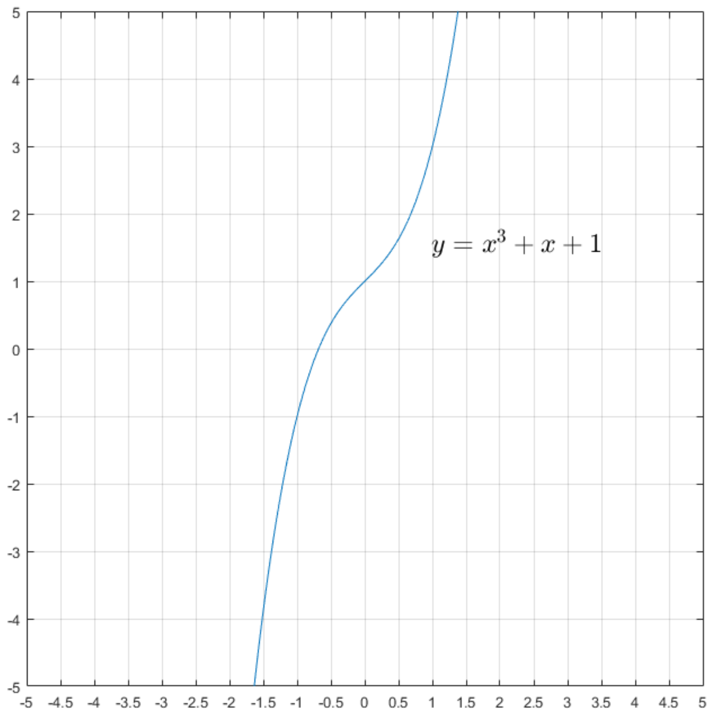
$$f(0) = 0, \; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0, \; f(\pi) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

ne viene che f ha un unico zero in $(0, \pi)$ e un suo intervallo di localizzazione è $\left[\frac{\pi}{3}.\pi\right]$.

Esercizio. Provare che l'equazione

$$x^3 + x + 1 = 0$$

ha un'unica radice. Determinare un intervallo di localizzazione di ampiezza minore o uguale a $\frac{1}{2}$ per essa.



Sia

$$f(x) = x^3 + x + 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Quindi f è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

si ha che f ha un unico zero. Si ha

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 > 0 \\ f(-1) &= -1 - 1 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Quindi $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ è un intervallo di localizzazione per lo zero di f.

Esercizio. Mostrare che la formula

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\mathrm{TOL}} \right) \right\rceil - 1$$

può anche scriversi come

$$n = \lceil 3.3219 \cdot (\log_{10}(b-a) + t) \rceil - 1$$

dove t è tale che $\mathrm{TOL} = 10^{-t}$.

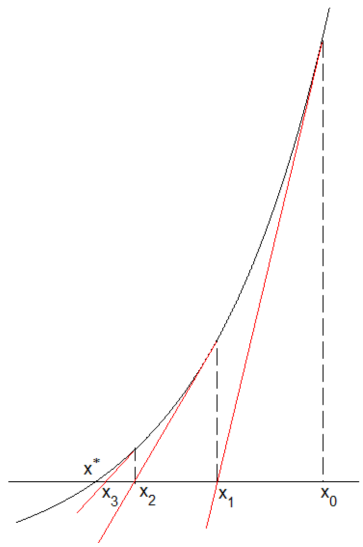
Si ha

$$\begin{aligned} n &= \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\mathrm{TOL}} \right) \right\rceil - 1 = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{10^{-t}} \right) \right\rceil - 1 \\ &= \left\lceil \log_2 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{b-a}{10^{-t}} \right) \right\rceil - 1 \\ &= \left\lceil \log_2 10 \cdot \big(\log_{10}(b-a) - \log_{10} 10^{-t} \big) \right\rceil - 1 \\ &= \lceil 3.3219 \cdot (\log_{10}(b-a) + t) \rceil - 1. \end{aligned}$$

Esercizio. In questo esempio del calcolo di $\sqrt{2}$, quante iterazioni del metodo di bisezione sono sufficienti per avere un'approssimazione con 20 cifre decimali esatte?

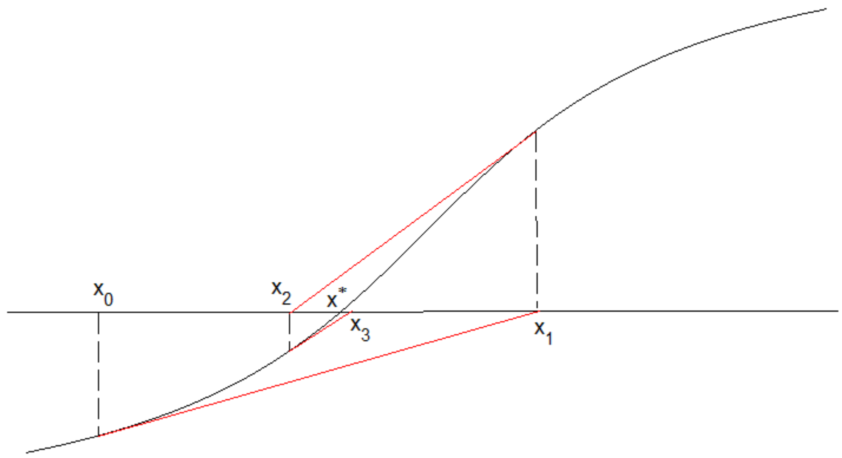
Si vuole
$$\left|c_n - \sqrt{2}\right| \leq 10^{-20} = \mathrm{TOL}.$$
Per cui, essendo $[a,b] = [1,2]$, risulta
$$n = \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\mathrm{TOL}}\right)\right\rceil - 1 = \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{10^{-20}}\right)\right\rceil - 1 = \left\lceil 20 \cdot \underbrace{\log_2 10}_{=3.3219}\right\rceil - 1 = 66.$$

Esercizio. Nella prima delle precedenti figure sono mostrate le iterate x_0, x_1, x_2, x_3 che stanno tutte a destra dello zero x^*. Affinchè questo continui a valere per tutte le successive iterate è sufficiente che la funzione f a destra di x^* abbia una certa proprietà. Quale?



La proprietà è che a destra di x^* la tangente $y = p(x)$ deve stare sempre sotto il grafico $y = f(x)$, vale a dire f deve essere convessa a destra di x^*.

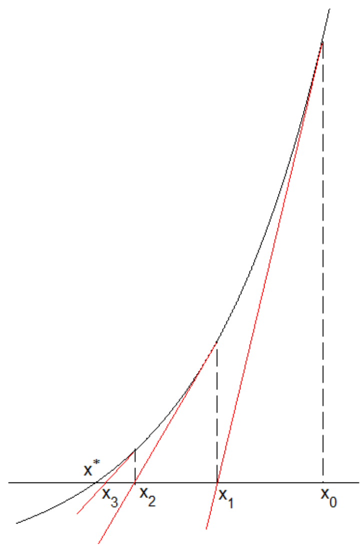
Esercizio. Nella seconda delle precedenti figure sono mostrate le iterate x_0, x_1, x_2, x_3 che stanno alternativamente a sinistra e a destra di x^*. Affinchè questo continui a valere per tutte le successive iterate è sufficiente che x^* abbia una certa proprietà. Quale?



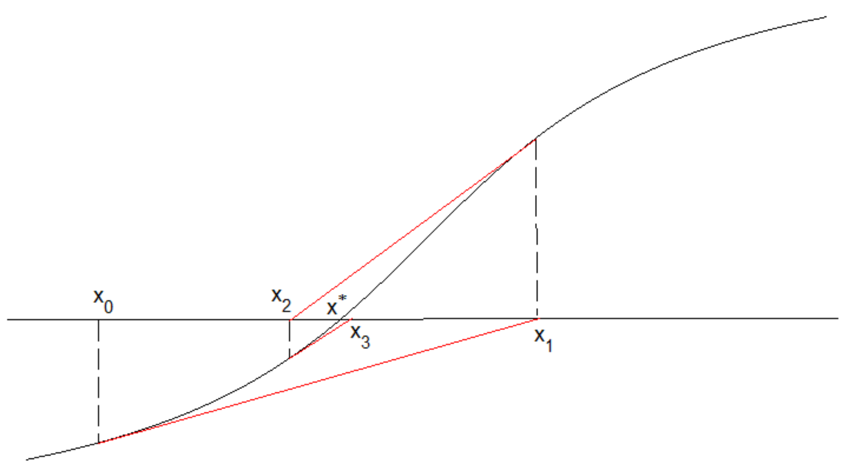
La proprietà è che a destra di x^* la tangente $y = p(x)$ deve stare sempre sopra il grafico $y = f(x)$ e a sinistra di x^* la tangente $y = p(x)$ deve stare sempre sotto il grafico $y = f(x)$, vale a dire f deve essere concava a destra di x^* e convessa a sinistra di x^*. In altri termini, la proprietà è che x^* è un punto di flesso con f concava a destra di x^* e convessa a sinistra di x^*.

Esercizio. Tracciare una figura in cui le successive approssimazioni si avvicinano a x^* rimanendo tutte a sinistra di x^* e una in cui si avvicinano stando alternativamente a destra e a sinistra, con x_0 che sta a destra.

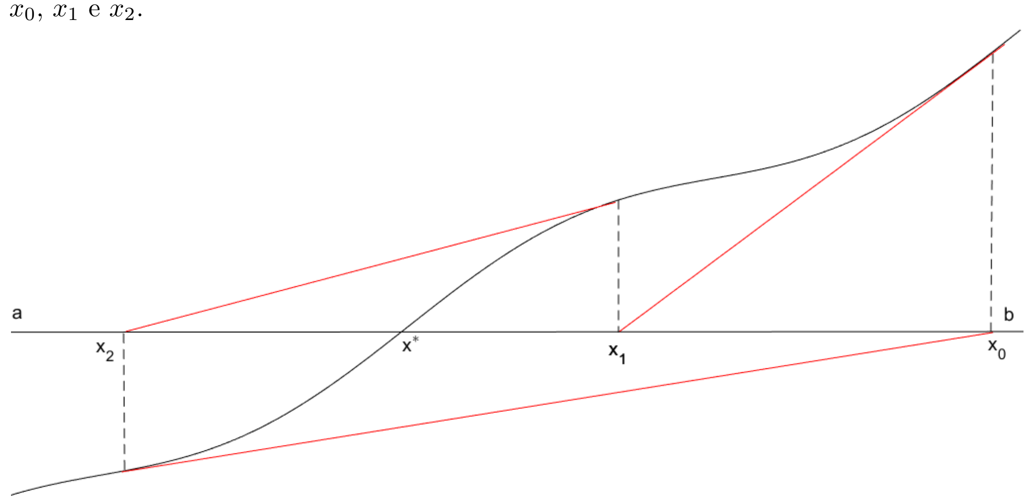
Per la prima situazione basta ribaltare la figura sotto, scambiando destra e sinistra.



Per la seconda situazione basta ribaltare la figura sotto, scambiando destra e sinistra.



Esercizio. Tracciare una figura in cui la successione $\{x_n\}$ ripeta periodicamente x_0, x_1 e x_2.



Esercizio. Nell'iterazione del metodo di Newton, determinare x_{n+1} quando $x_n = x^*$.

Si ha

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x^* - \frac{\overbrace{f(x^*)}^{=0}}{f'(x^*)} = x^*.$$

Esercizio. Descrivere l'iterazione del metodo di Newton nel caso

$$f(x) = mx + q, \ x \in [a, b].$$

Per $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ si ha

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{mx_n + q}{m} = -\frac{q}{m}.$$

Per cui, si ha

$$x_n = -\frac{q}{m}, \ n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Osservare che $-\frac{q}{m}$ è lo zero di f. Per cui, da x_1 in poi la successione concide con la zero in accordo con il precedente esercizio. Poiché la retta tangente coincide con il grafico della funzione f, è chiaro che alla prima iterazione del metodo di Newton viene ottenuto lo zero di f.

Esercizio. Si determini per ciascuna delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^3 - 8,\ x \in [-1,1], \\ f(x) &= \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \\ f(x) &= \arctan x,\ x \in [-1,1], \end{aligned}$$

un intorno circolare I_ε dello zero $x^* = 0$ che sia un intorno di convergenza del metodo di Newton. Osservare che i domini delle funzioni sono degli intervalli di localizzazione dello zero.

In tutti e tre i casi si ha $I_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$ per $\varepsilon > 0$.

Per

$$f(x) = (x+2)^3 - 8,\ x \in [-1,1],$$

si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x+2)^2,\ x \in [-1,1], \\ f''(x) &= 6(x+2),\ x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Si ha $I_\varepsilon \subseteq [a,b] = [-1,1]$ per $\varepsilon \leq 1$. Quindi consideriamo $\varepsilon \leq 1$. Poichè f'' è positiva in $[-1,1]$, si ha f' crescente (e positiva) in $[-1,1]$ e quindi

$$\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)| = f'(-\varepsilon) = 3(2-\varepsilon)^2.$$

Poichè f'' è crescente e positiva in $[-1,1]$ si ha

$$\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)| = 6(2+\varepsilon).$$

Quindi

$$d_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min\limits_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6(2+\varepsilon)}{3(2-\varepsilon)^2} = \frac{2+\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}$$

e la condizione $d_\varepsilon \varepsilon < 1$ risulta essere

$$\frac{2+\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}\varepsilon < 1$$

vale a dire

$$\begin{aligned} (2+\varepsilon)\varepsilon &< (2-\varepsilon)^2 \\ 2\varepsilon + \varepsilon^2 &< 4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 \\ 6\varepsilon &< 4 \\ \varepsilon &< \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Quindi I_ε è un intorno di convergenza del metodo di Newton per $\varepsilon < \frac{2}{3}$.

Per

$$f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \\ f''(x) &= -\sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Osservare che $x^* = 0$ è un punto di flesso per f. Si ha $I_\varepsilon \subseteq [a, b] = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ per $\varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$. Quindi consideriamo $\varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$. Risulta

$$\begin{aligned} \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)| &= \min_{x \in I_\varepsilon} |\cos x| = \cos \varepsilon \\ \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)| &= \max_{x \in I_\varepsilon} |\sin x| = \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi

$$d_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min\limits_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = \frac{1}{2} \tan \varepsilon$$

e la condizione $d_\varepsilon \varepsilon < 1$ risulta essere

$$\frac{1}{2} \tan \varepsilon \cdot \varepsilon < 1.$$

Avendosi $\varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$ si ha

$$\tan \varepsilon \leq \tan \frac{\pi}{4} = 1,$$

e quindi la precedente condizione è soddisfatta quando

$$\frac{1}{2} \varepsilon < 1$$

cioè

$$\varepsilon < 2.$$

Pertanto, I_ε è un intorno di convergenza del metodo di Newton per $\varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$.

Per

$$f(x) = \arctan x,\ x \in [-1, 1],$$

si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + x^2},\ x \in [-1, 1], \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1 + x^2)^2},\ x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Osservare che anche qui $x^* = 0$ è un punto di flesso per f. Si ha $I_\varepsilon \subseteq [a,b] = [-1,1]$ per $\varepsilon \leq 1$. Consideriamo quindi $\varepsilon \leq 1$. Risulta

$$\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)| = \min_{x \in I_\varepsilon} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}.$$

Inoltre, essendo

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -\frac{2 \cdot \left(1+x^2\right)^2 - 2x \cdot 2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} \\ &= -\frac{2\left(1+x^2\right) - 8x^2}{\left(1+x^2\right)^3} \\ &= -\frac{2-6x^2}{\left(1+x^2\right)^3} \\ &= 2\frac{3x^2-1}{\left(1+x^2\right)^3}, \quad x \in [-1,1], \end{aligned}$$

si ottiene che f'' è decrescente (e dispari) in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Per $\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha

$$\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)| = |f''(\varepsilon)| = \frac{2\varepsilon}{\left(1+\varepsilon^2\right)^2},$$

quindi

$$d_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{\min\limits_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^2}}{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$$

e la condizione $d_\varepsilon \varepsilon < 1$ risulta essere

$$\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} < 1$$

che è sempre soddisfatta.

Pertanto, I_ε è un intorno di convergenza del metodo di Newton per $\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Esercizio. Sia $x_0 \in [a,b]$. Provare che la condizione

$$\operatorname{sgn}(x_0 - x^*) = \operatorname{sgn}(f' f'')$$

del Teorema di convergenza non locale è equivalente a

$$\operatorname{sgn}(f(x_0)) = \operatorname{sgn}(f'') .$$

Dal Teorema di Lagrange si ha

$$f(x_0) = f(x_0) - f(x^*) = f'(\eta)(x_0 - x^*) ,$$

dove η è compreso tra x_0 e x^*. Quindi

$$\operatorname{sgn}(f(x_0)) = \operatorname{sgn}(f') \operatorname{sgn}(x_0 - x^*) .$$

Per cui

$$\operatorname{sgn}(x_0 - x^*) \quad = \quad \frac{\operatorname{sgn}(f(x_0))}{\operatorname{sgn}(f')} = \operatorname{sgn}(f(x_0)) \operatorname{sgn}(f') .$$

Inoltre

$$\operatorname{sgn}(f' f'') = \operatorname{sgn}(f') \operatorname{sgn}(f'')$$

Quindi

$$\operatorname{sgn}(x_0 - x^*) = \operatorname{sgn}(f' f'')$$

vale a dire

$$\operatorname{sgn}(f(x_0)) \operatorname{sgn}(f') = \operatorname{sgn}(f') \operatorname{sgn}(f'')$$

è equivalente a

$$\operatorname{sgn}(f(x_0)) = \operatorname{sgn}(f'') .$$

Esercizio. Sotto le assunzioni ii), iv) e v), sia $x_0 \in [a,b]$ tale che $\operatorname{sgn}(x_0 - x^*) = -\operatorname{sgn}(f'f'')$. Mostrare che se $x_1 \in [a,b]$, allora la successione $\{x_n\}$ del metodo di Newton converge a x^*, nel modo visto nel Teorema di convergenza non locale a partire da x_1.

Nella dimostrazione del teorema di convergenza non locale si è visto che risulta

$$\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x^*) = \operatorname{sgn}(f'f'')$$

anche quando $\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x^*) = -\operatorname{sign}(f'f'')$. Per cui, si ha

$$\operatorname{sgn}(x_1 - x^*) = \operatorname{sgn}(f'f'')$$

e se $x_1 \in [a,b]$, si può usare il Teorema di convergenza locale con iterata iniziale x_1 per concludere che la successione $\{x_n\}$ converge a x^*.

Esercizio. Scrivere l'iterazione di Newton per determinare i tre zeri della funzione
$$f(x) = x^3 - 3x + 1,\ x \in \mathbb{R},$$
di un esempio precedente. Per ciascun zero determinare un intervallo di localizzazione in cui valgano le condizioni ii), iv) e v) e trovare un'iterata iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione del metodo di Newton allo zero.

Si ha
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(x^2 - 1\right),\ x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) &= 6x,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Il metodo di Newton è
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 3},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$
Si è visto che i tre zeri hanno intervalli di localizzazione $[-2, -1]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$. Questi tre intervalli di localizzazione non soddisfano iv), in quanto, per tutti e tre gli intervalli, la derivata f' si annulla in uno degli estremi. Essendo
$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} + 1 > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 < 0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{27}{8} - \frac{9}{2} + 1 < 0, \end{aligned}$$
usiamo i nuovi intervalli di localizzazione
$$\left[-2, -\frac{3}{2}\right],\ \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$
in cui si ha f' diversa da zero e f'' diversa da zero nei punti interni.

In $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ si ha $\operatorname{sgn}(f'f'') = -1$ e quindi si prende $x_0 = -2$.

In $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ si ha $\operatorname{sgn}(f'f'') = -1$ e quindi si prende $x_0 = 0$.

In $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ si ha $\operatorname{sgn}(f'f'') = 1$ e quindi si prende $x_0 = 2$.

Esercizio. Scrivere l'iterazione di Newton per determinare l'unica radice nell'intervallo $(0, \pi)$ dell'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}x$$

di un esercizio precedente. Determinare un intervallo di localizzazione della radice in cui valgano le condizioni ii), iv) e v) e trovare un'iterata iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione del metodo di Newton alla radice.

Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - \frac{1}{2}x, \ x \in \mathbb{R}, \\ f'(x) &= \cos x - \frac{1}{2}, \ x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) &= -\sin x, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il metodo di Newton è

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - \frac{1}{2}x_n}{\cos x_n - \frac{1}{2}} = \frac{x_n \cos x_n - \sin x_n}{\cos x_n - \frac{1}{2}}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si è visto che $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ è un intervallo di localizzazione per lo zero. Questo intervallo non soddisfa iv), in quanto f' si annulla in $\frac{\pi}{3}$. Essendo

$$f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) - \frac{5}{24}\pi > 0,$$

usiamo il nuovo intervallo di localizzazione

$$\left[\frac{5}{12}\pi, \pi\right]$$

in cui si ha f' diversa da zero e f'' diversa da zero nei punti interni.

Si ha $\operatorname{sgn}(f'f'') = 1$ e quindi si prende $x_0 = \pi$.

Esercizio. Scrivere l'iterazione di Newton per determinare l'unica radice dell'equazione

$$x^3 + x + 1 = 0$$

di un esercizio precedente. Determinare un intervallo di localizzazione della radice in cui valgano le condizioni ii), iv) e v) e trovare un'iterata iniziale x_0 che garantisca la convergenza della successione del metodo di Newton alla radice.

Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}, \\ f'(x) &= 3x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) &= 6x,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il metodo di Newton è

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n + 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 + 1},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si è visto che $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ è un intervallo di localizzazione per lo zero. In questo intervallo si hanno f' e f'' diverse da zero.

Avendosi $\operatorname{sgn}(f'f'') = -1$, si prende $x_0 = -1$.

Esercizio. Sotto le assunzioni ii), iv) e v), per una successione $\{x_n\}$ con $\operatorname{sign}(x_0 - x^*) = \operatorname{sign}(f'f'')$, la quale converge a x^*, provare che si ha

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_{[a,b]},\ \ n \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

dove

$$d_{[a,b]} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|}.$$

Si è visto che

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_I,\ \ n \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

dove I è l'intervallo chiuso di estremi di estremi x^* e x_0 e

$$d_I := \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x\in I} |f''(x)|}{\min\limits_{x\in I} |f'(x)|}.$$

Poichè $I \subseteq [a, b]$, si ha

$$d_I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x\in I} |f''(x)|}{\min\limits_{x\in I} |f'(x)|} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|} = d_{[a,b]}.$$

Pertanto, essendola funzione $\log_{10}$ crescente si ha

$$t_{n+1} \geq 2t_n - \log_{10} d_I \geq 2t_n - \log_{10} d_{[a,b]},\ \ n \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Osservare che, a differenza di d_I, $d_{[a,b]}$ è una quantità calcolabile. Per calcolare d_I, si dovrebbe conoscere lo zero x^*.

Esercizio. Nell'esempio precedente, è garantito che x_4 abbia almeno dieci cifre decimali esatte. Guardando la tabella cosa si può dire in più riguardo al nummero di cifre decimali esatte di x_4? esatte.

Si ha

$$10^{-t_n} = |x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m'} = \frac{4.6 \cdot 10^{-15}}{1.3679} \leq 10^{-14}$$

e quindi $t_n \geq 14$.

Esercizio. Per ciascun zero della funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 1,\ x \in \mathbb{R},$$

di un esempio e di un esercizio precedenti, si determini un criterio di arresto dell'iterazione di Newton per approssimare tale zero.

Si ha

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Si è visto che i tre zeri hanno

$$\left[-2, -\frac{3}{2}\right],\ \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

come intervalli di localizzazione in cui valgono ii), iv) e v).

Per $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ si è visto che $x_0 = -2$ e quindi

$$m' = \left|f'\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \left|3\left(\frac{9}{4} - 1\right)\right| = \frac{15}{4}.$$

Il criterio di arresto è

$$|f(x_n)| \leq \frac{15}{4}\text{TOL}.$$

Per $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ si è visto che $x_0 = 0$ e quindi

$$m' = \left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|3\left(\frac{1}{4} - 1\right)\right| = \frac{9}{4}.$$

Il criterio di arresto è

$$|f(x_n)| \leq \frac{9}{4}\text{TOL}.$$

Per $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ si è visto che $x_0 = 2$ e quindi

$$m' = \left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|3\left(\frac{9}{4} - 1\right)\right| = \frac{15}{4}.$$

Il criterio di arresto è

$$|f(x_n)| \leq \frac{15}{4}\text{TOL}.$$

Esercizio. Per la radice in $(0, \pi)$ dell'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2} x$$

di esercizi precedenti, si determini un criterio di arresto dell'iterazione di Newton per approssimare tale radice.

Si ha

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Si è visto che lo zero ha $\left[\frac{5}{12}\pi, \pi\right]$ come intervallo di localizzazione in cui valgono ii), iv) e v).

Si è visto che $x_0 = \pi$ e quindi

$$m' = \left| f'\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right| = \left|\cos \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - \cos \frac{5}{12}\pi.$$

Il criterio di arresto è

$$|f(x_n)| \leq \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5}{12}\pi\right) \mathrm{TOL} = 0.2412 \cdot \mathrm{TOL}.$$

Esercizio. Per la radice dell'equazione

$$x^3 + x + 1 = 0$$

di esercizi precedenti, si determini un criterio di arresto dell'iterazione di Newton per approssimare tale radice.

Si ha

$$f'(x) = 3x^2 + 1, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Si è visto che lo zero ha $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ come intervallo di localizzazione in cui valgono ii), iv) e v).

Si è visto che $x_0 = -1$ e quindi

$$m' = \left| f'\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{4} + 1\right| = \frac{7}{4}.$$

Il criterio di arresto è

$$|f(x_n)| \leq \frac{7}{4}\mathrm{TOL}.$$