

# Interpolazione

S. Maset  
Dipartimento di Matematica e Geoscienze  
Università di Trieste  
maset@units.it

June 6, 2021

## 1 Introduzione

Ci occupiamo ora del problema di approssimare delle funzioni reali di una variabile reale con altre funzioni più semplici.

In particolare, queste funzioni più semplici saranno i polinomi e il tipo di approssimazione che si userà sarà l'*interpolazione*.

La scelta di usare i polinomi è dettata dal fatto che i valori dei polinomi sono facili da calcolare (si usano le operazioni aritmetiche di addizione, opposto e moltiplicazione) e che i polinomi si derivano e si integrano agevolmente.

L'approssimazione di una funzione con un polinomio corrisponde ad una *discretizzazione* della funzione: l'oggetto matematico infinito funzione, descritto da un numero infinito di numeri reali, viene approssimato dall'oggetto matematico finito polinomio, descritto da un numero finito di numeri reali (i suoi coefficienti).

## 2 Il problema di interpolazione di Lagrange

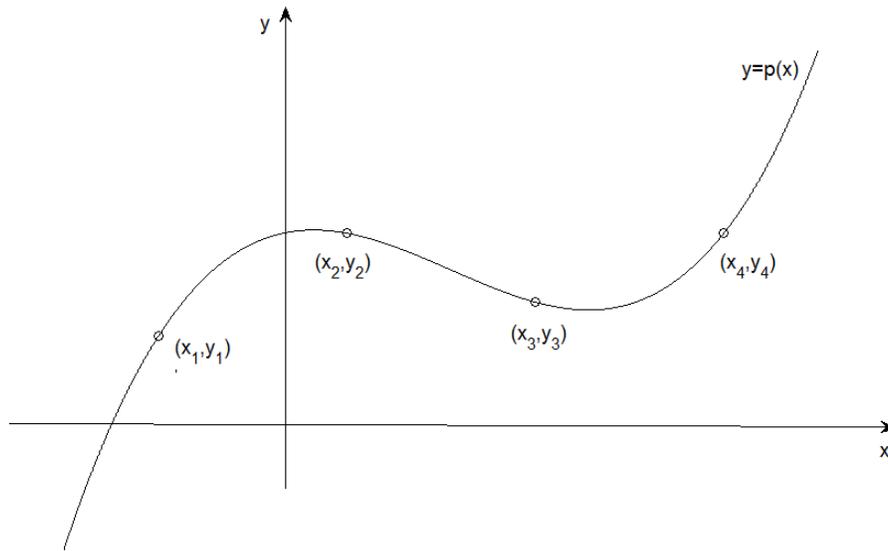
Il *problema di interpolazione di Lagrange* è così formulato: dati  $n + 1$  punti  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , nel piano  $\mathbb{R}^2$  tali che  $x_i \neq x_j$  per  $i \neq j$ , cioè  $n + 1$  punti a due a due non allineati verticalmente, trovare un polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

di grado  $\leq n$  tale che

$$p(x_i) = y_i \quad \text{per ogni } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Le ascisse  $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , sono dette *odi di interpolazione* e le ordinate  $y_i$  *valori di interpolazione*.



Le condizioni di interpolazione

$$p(x_i) = a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

possono scriversi in forma compatta come il sistema lineare di  $n + 1$  equazioni negli  $n + 1$  coefficienti incogniti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ x_{n-1}^n & x_{n-1}^{n-1} & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}}_{=V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}_{=a \in \mathbb{R}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{=y \in \mathbb{R}^{n+1}},$$

cioè

$$Va = y.$$

Infatti, per  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , le componenti  $(i + 1)$ -esime di  $Va$  e  $y$  sono  $p(x_i)$  e  $y_i$ , rispettivamente.

La matrice  $V$  è detta *matrice di Vandermonde* relativa ai nodi  $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , e il sistema  $Va = y$  è detto *sistema di Vandermonde*.

Casi speciali del problema di interpolazione di Lagrange sono:

- il trovare la retta che passa per due punti non allineati verticalmente ( $n = 1$ );
- il trovare la parabola che passa per tre punti a due a due non allineati verticalmente ( $n = 2$ ).

**Esempio 1** Per trovare la retta

$$y = a_1x + a_0$$

che passa per i due punti  $(-1, 3)$  e  $(2, -5)$ , si ha il sistema

$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix},$$

mentre, per trovare la parabola

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

che passa per i tre punti  $(-1, 1)$ ,  $(0, 2)$  e  $(1, -1)$ , si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Il problema di interpolazione di Lagrange ha una e una sola soluzione. Vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 2** La matrice di Vandermonde  $V$  è non singolare.

**Dimostrazione.** Proviamo che  $V$  è non singolare mostrando che  $\ker(V) = \{\underline{0}\}$ . Infatti, se  $\ker(V) = \{\underline{0}\}$ , allora

$$\text{rank}(V) = n + 1 - \dim(\ker(V)) = n + 1.$$

Mostriamo che  $\ker(V) \subseteq \{\underline{0}\}$  (l'altra inclusione è banale), cioè che per ogni  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $Vb = \underline{0}$ , si ha  $b = \underline{0}$ .

Sia  $b = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $Vb = \underline{0}$ . Il polinomio

$$q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

di grado  $\leq n$  si annulla negli  $n + 1$  punti distinti  $x_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Infatti, si ha

$$q(x_i) = b_nx_i^n + b_{n-1}x_i^{n-1} + \dots + b_1x_i + b_0 = (Vb)_{i+1} = 0, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

Ora, il polinomio  $q$  è un polinomio di un qualche grado  $k$ , dove  $k \in \{0, \dots, n\}$ , oppure è il polinomio nullo (quello che ha tutti i coefficienti nulli e in tal caso

$b = \underline{0}$ ). Nel primo caso,  $q$  ha al più  $k$  zeri reali, nel secondo caso  $q$  ha tutti i numeri reali come zeri.

Pertanto, avendo  $q$  almeno  $n + 1$  zeri e quindi più di  $k$  zeri,  $q$  deve essere il polinomio nullo. Quindi  $b = \underline{0}$  e si conclude che  $\ker(V) = \{\underline{0}\}$  ■

Poichè la matrice del sistema di Vandermonde  $Va = y$  è non singolare, tale sistema ha una e una sola soluzione. Quindi, il problema di interpolazione di Lagrange ha un unico polinomio soluzione, detto il *polinomio di interpolazione di Lagrange relativo ai dati*  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Esercizio. Si consideri l'interpolazione con un polinomio  $p$  di grado  $\leq 3$  dei dati  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Si assuma

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

e

$$y_0 < y_1, y_1 > y_2 \text{ e } y_2 < y_3.$$

Mostrare che  $p$  ha un massimo locale  $\eta \in (x_0, x_2)$  e un minimo locale  $\mu \in (x_1, x_3)$  con  $\eta < \mu$ .

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con  $n = 1$ , per quali dati  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  il polinomio di interpolazione ha grado  $\leq 0$ ?

Esercizio. Nel problema di interpolazione di Lagrange con  $n = 2$ , per quali dati  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  il polinomio di interpolazione ha grado  $\leq 1$ ?

### 3 La forma di Lagrange

Il polinomio di interpolazione di Lagrange si puo esprimere nella forma canonica

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove i coefficienti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  sono ottenuti risolvendo il sistema di Vandermonde. E' però possibile esprimere il polinomio di interpolazione anche in un'altra forma.

Per ogni  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , si introduca il polinomio di grado  $n$

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_j - x_n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

detto  $j$ -esimo *coefficiente di Lagrange* relativo ai nodi  $x_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Si noti che

$$\ell_j(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad i, j \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Infatti, per  $i = j$ , la produttoria ha tutti fattori uguali a uno mentre, per  $i \neq j$ , uno dei fattori, quello corrispondente a  $k = i$ , è nullo.

Consideriamo ora il polinomio di grado  $\leq n$ ,

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot \ell_j(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Per  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , dalla (1) si ha

$$p(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot \ell_j(x_i) = y_i.$$

Pertanto,  $p$  è un polinomio di grado  $\leq n$  che soddisfa le condizioni di interpolazione.

Quindi,  $p$  è il polinomio di interpolazione di Lagrange e la forma (2) in cui è espresso è detta *forma di Lagrange*.

**Esempio 3** *Nel problema di trovare la retta che passa per  $(-1, 3)$  e  $(2, -5)$ , si hanno i coefficienti di Lagrange*

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 2}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}(x - 2) \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio d'interpolazione risulta essere

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) \\ &= 3 \cdot \left( -\frac{1}{3}(x - 2) \right) + (-5) \cdot \frac{1}{3}(x + 1) \\ &= -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Invece, nel problema di trovare la parabola che passa per  $(-1, 1)$ ,  $(0, 2)$  e  $(1, -1)$ , si hanno i coefficienti di Lagrange*

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 0}{-1 - 0} \cdot \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}x(x - 1) \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} = -(x + 1)(x - 1) \\ \ell_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}(x + 1)x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio d'interpolazione risulta essere

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 \cdot \ell_0(x) + y_1 \cdot \ell_1(x) + y_2 \cdot \ell_2(x) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2}x(x - 1) + 2 \cdot (-(x + 1)(x - 1)) + (-1) \cdot \frac{1}{2}(x + 1)x \\ &= -2x^2 - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio. Determinare la retta e la parabola precedenti risolvendo il sistema di Vandermonde.

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange del polinomio di interpolazione nel caso  $n = 1$ , ritrovare la nota equazione

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

della retta passante per i punti  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

Esercizio. Utilizzando la forma di Lagrange, determinare il polinomio di interpolazione relativo ai seguenti dati

$x_i$	$y_i$
-2	0
-1	1
0	0
1	2
2	0

Suggerimento: non è necessario determinare tutti i coefficienti di Lagrange.

### 3.1 Base canonica e base dei coefficienti di Lagrange

L'insieme dei polinomi di grado  $\leq n$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n + 1$ .

Una base di tale spazio è costituita dai polinomi  $1, x, x^2, \dots, x^n$  ed è detta base canonica.

Un'altra base è data dagli  $n + 1$  coefficienti di Lagrange  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$  relativi ai nodi  $x_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Infatti, essi sono linearmente indipendenti: se

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_j = 0$$

(uguaglianza tra funzioni), allora

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \ell_j(x) = 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e prendendo, per ogni  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $x = x_i$  si ottiene

$$0 = \sum_{j=0}^n \alpha_j \underbrace{\ell_j(x_i)}_{\begin{cases} 1 \text{ se } j = i \\ 0 \text{ se } j \neq i \end{cases}} = \alpha_i.$$

Si osservi che quando scriviamo il polinomio di interpolazione come

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

lo stiamo esprimendo nella base canonica e le componenti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  in tale base sono la soluzione del sistema di Vandermonde. Invece quando lo scriviamo nella forma di Lagrange

$$p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_{n-1} \ell_{n-1}(x) + y_n \ell_n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

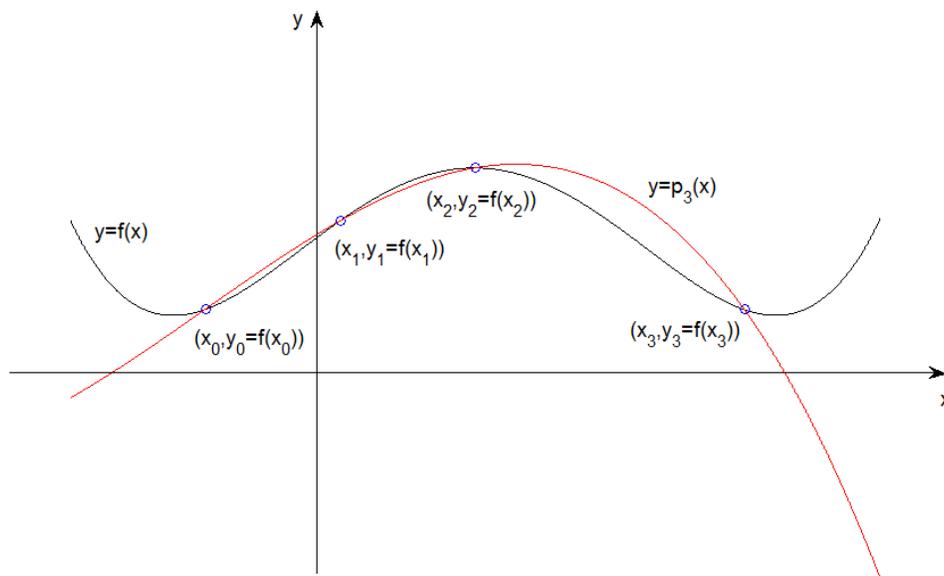
lo stiamo esprimendo nella base dei coefficienti di Lagrange e le componenti  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$  in tale base sono semplicemente i valori di interpolazione.

Così, al prezzo di complicare la base facendola dipendere dai particolari nodi, si ottengono componenti semplici e immediatamente ottenibili.

## 4 Interpolazione di una funzione

Veniamo ora al problema di approssimare una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante un polinomio di interpolazione di Lagrange.

Precisamente, dati gli  $n+1$  nodi distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , con  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , la funzione  $f$  viene approssimata con il polinomio di interpolazione di Lagrange  $p_n$  relativo ai dati  $(x_i, y_i = f(x_i))$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .



Chiameremo tale polinomio  $p_n$  il *polinomio di interpolazione di Lagrange della funzione  $f$*  relativo ai nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Esercizio. Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e siano  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  nodi di interpolazione con  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Nel caso in cui  $f$  sia un polinomio di grado  $\leq n$ , dire qual è il polinomio di interpolazione  $p_n$  di  $f$  relativo ai nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Esercizio. Usando l'esercizio precedente, mostrare che se  $f$  è un polinomio di grado  $\leq n$ , allora

$$\sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_j(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove  $\ell_j$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , sono i coefficienti di Lagrange relativi ai nodi  $x_j$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Dire poi, per  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , a cosa è uguale

$$\sum_{j=0}^n x_j^k \ell_j(x).$$

La funzione errore dell'interpolazione  $e_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è data da

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x), \quad x \in [a, b].$$

Per definizione di polinomio di interpolazione, sui nodi risulta

$$e_n(x_i) = p_n(x_i) - f(x_i) = \underbrace{y_i}_{=f(x_i)} - f(x_i) = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Al di fuori dei nodi l'errore è dato dal seguente teorema.

**Teorema 4** Sia  $f \in C^{n+1}([a, b])$ . Per ogni  $x \in [a, b]$ , si ha

$$e_n(x) = -\frac{w_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad (3)$$

dove  $w_{n+1}$  è il polinomio di grado  $n+1$  dato da

$$w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{R},$$

e  $\xi_x$  è un punto interno dell'intervallo  $I_x := [\min\{x_0, x\}, \max\{x_n, x\}]$ .

**Dimostrazione.** Sia  $x \in [a, b]$ . Si ha

$$w_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \circ x = x_2 \circ \cdots \circ x = x_n.$$

Quindi, la formula (3) vale quando  $x$  è un nodo (con  $\xi_x$  arbitrario) dal momento che ambo i membri sono zero.

Sia ora  $x$  un punto che non è un nodo. Consideriamo la funzione  $g_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , che dipende da  $x$ , data da

$$g_x(t) = f(t) - p_n(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(t), \quad t \in [a, b].$$

Notare che, essendo  $x$  un punto che non è un nodo, si ha  $w_{n+1}(x) \neq 0$  al denominatore.

Poichè  $f \in C^{n+1}([a, b])$ , si ha pure  $g_x \in C^{n+1}([a, b])$  con

$$g_x^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - p_n^{(k)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}^{(k)}(t) \\ t \in [a, b] \text{ e } k \in \{0, 1, \dots, n+1\}.$$

Per  $k = n+1$ , si ha

$$g_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(t)}_{=0} + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!} \\ = f^{(n+1)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)!, \quad t \in [a, b].$$

Infatti

$$p_n^{(n+1)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

essendo  $p_n$  un polinomio di grado  $\leq n$ , e

$$w_{n+1}(t) = (t - t_0)(t - t_1) \cdots (t - t_n) = t^{n+1} + q_n(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $q_n$  un polinomio di grado  $\leq n$  e quindi

$$w_{n+1}^{(n+1)}(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^{n+1} + q_n^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0 = (n+1)!, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proviamo ora che  $g_x^{(n+1)}$  si annulla in un punto  $\xi_x$  dell'intervallo  $I_x$ .

La funzione  $g_x$  si annulla nei nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e in  $x$ . Infatti, si ha

$$g_x(x_i) = \underbrace{f(x_i) - p_n(x_i)}_{=0} + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} \underbrace{w_{n+1}(x_i)}_{=0} = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

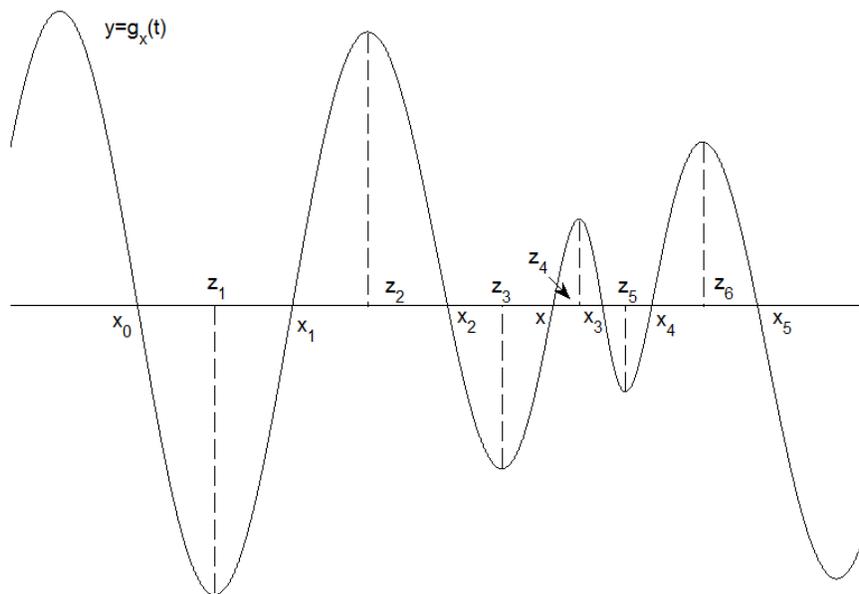
e

$$g_x(x) = f(x) - p_n(x) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(x) = 0.$$

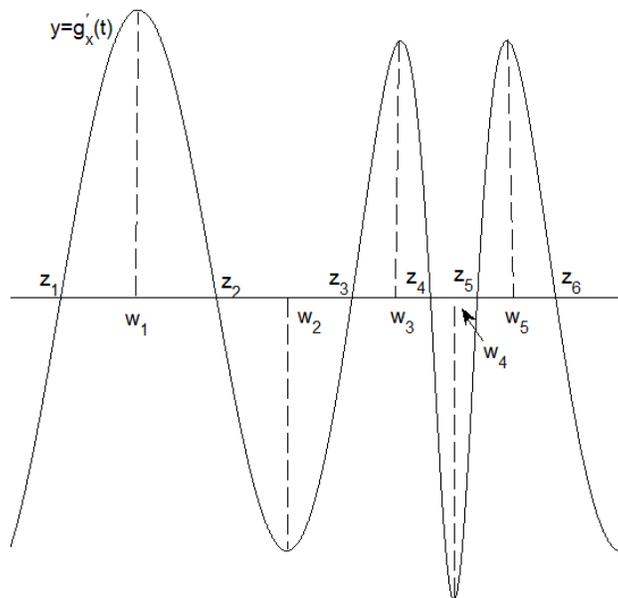
Per cui  $g_x$  si annulla in  $n+2$  punti distinti dell'intervallo  $I_x$  (ricordare che  $x$  non è un nodo).

Per il teorema di Rolle, all'interno di ciascuno degli  $n+1$  sottointervalli di  $I_x$  determinati dagli  $n+2$  punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e  $x$ , c'è un punto in cui  $g'_x$  si

annulla. Così,  $g'_x$  si annulla in  $n + 1$  punti distinti  $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$  all'interno di  $I_x$  (essendo tali punti all'interno di sottointervalli di  $I_x$ ).



Ripetendo il ragionamento si trova che, all'interno di ciascuno degli  $n$  sottointervalli di  $I_x$  determinati dagli  $n + 1$  punti  $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$  in cui si annulla  $g'_x$ , c'è un punto in cui  $g''_x$  si annulla. Così,  $g''_x$  si annulla in  $n$  punti distinti  $w_1, w_2, \dots, w_n$  all'interno di  $I_x$ .



Così continuando si prova che  $g_x^{(k)}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ , si annulla in  $n+2-k$  punti distinti all'interno di  $I_x$ . Quindi,  $g_x^{(n+1)}$  si annulla in  $(n+2) - (n+1) = 1$  punto  $\xi_x$  all'interno di  $I_x$ .

Ponendo  $t = \xi_x$  in

$$g_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)!$$

si ha

$$g_x^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) + \frac{p_n(x) - f(x)}{w_{n+1}(x)} (n+1)! = 0.$$

da cui

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x) = -\frac{w_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

■

#### 4.1 Maggiorare l'errore di interpolazione in un punto e su tutto l'intervallo

Nel seguito, per una funzione  $g \in C([a, b])$  e un intervallo chiuso  $I \subseteq [a, b]$ , misureremo la grandezza di  $g$  in  $I$  per mezzo della norma infinito o norma del massimo di  $g$  data da

$$\|g\|_I := \max_{x \in I} |g(x)|.$$

Per il modulo  $|e_n(x)|$  dell'errore di interpolazione in un punto assegnato  $x \in [a, b]$ , dal teorema precedente si ha la maggiorazione

$$|e_n(x)| = \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot |f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!} \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \max_{\xi \in I_x} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!},$$

cioè

$$|e_n(x)| \leq \frac{|w_{n+1}(x)| \cdot \|f^{(n+1)}\|_{I_x}}{(n+1)!}.$$

Per il massimo modulo  $\max_{x \in [a, b]} |e_n(x)|$  dell'errore di interpolazione in tutto  $[a, b]$ , si ha invece la maggiorazione

$$\max_{x \in [a, b]} |e_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |w_{n+1}(x)| \cdot \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!},$$

cioè

$$\|e_n\|_{[a, b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a, b]} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a, b]}}{(n+1)!}.$$

**Esempio 5** Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

e il polinomio di interpolazione di grado  $\leq 2$  relativo ai nodi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4},$$

dove la funzione assume i noti valori

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = \frac{1}{2}, \quad f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

I coefficienti di Lagrange sono

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-\frac{\pi}{6}}{0-\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{x-\frac{\pi}{4}}{0-\frac{\pi}{4}} = \frac{24}{\pi^2} \left(x-\frac{\pi}{6}\right) \left(x-\frac{\pi}{4}\right) \\ \ell_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-0}{\frac{\pi}{6}-0} \cdot \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}} = -\frac{72}{\pi^2} x \left(x-\frac{\pi}{4}\right), \\ \ell_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{\frac{\pi}{4}-0} \cdot \frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}} = \frac{48}{\pi^2} x \left(x-\frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il polinomio di interpolazione è

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0) \cdot \ell_0(x) + f(x_1) \cdot \ell_1(x) + f(x_2) \cdot \ell_2(x) \\ &= -\frac{36}{\pi^2} x \left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{24\sqrt{2}}{\pi^2} x \left(x-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{24\sqrt{2}-36}{\pi^2} x^2 + \frac{9-4\sqrt{2}}{\pi} x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Per l'errore di interpolazione nel punto  $x = \frac{\pi}{12}$ , si ha (essendo  $I_x = [0, \frac{\pi}{4}]$ )

$$\left|e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \leq \frac{|w_3(x)| \cdot \|f^{(3)}\|_{I_x}}{3!} = \frac{|w_3\left(\frac{\pi}{12}\right)| \|f^{(3)}\|_{[0, \frac{\pi}{4}]}}{3!}$$

dove

$$\left|w_3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \left|\left(\frac{\pi}{12}-0\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{2\pi^3}{12^3}$$

e

$$\|f^{(3)}\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} = \|\sin^{(3)}\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} = \|\cos\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} |\cos x| = 1.$$

Si ottiene così

$$\left|e_2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \leq \frac{\frac{2\pi^3}{12^3} \cdot 1}{3!} = 6.0 \cdot 10^{-3}.$$

Per il massimo modulo in  $[0, \frac{\pi}{4}]$  dell'errore di interpolazione si ha

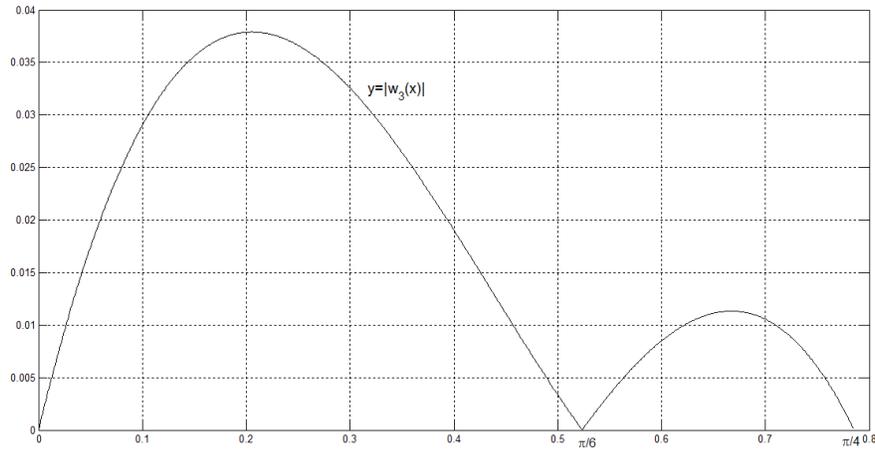
$$\|e_2\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} \leq \frac{\|w_3\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} \cdot \|f^{(3)}\|_{[0, \frac{\pi}{4}]}}{3!}$$

con

$$\|w_3\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} \left| x \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} \left| x^3 - \frac{5\pi}{12}x^2 + \frac{\pi^2}{24}x \right|$$

Con uno studio di funzione si trova

$$\|w_3\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$$



e quindi

$$\|e_2\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} \leq \frac{3.8 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{3!} = 6.3 \cdot 10^{-3}.$$

Esercizio. Effettuare lo studio di funzione con il quale si mostra  $\|w_3\|_{[0, \frac{\pi}{4}]} = 3.8 \cdot 10^{-2}$ .

Esercizio. Utilizzando il valore  $\sin \frac{\pi}{12}$ , determinare l'errore

$$e_2 \left( \frac{\pi}{12} \right) = p_2 \left( \frac{\pi}{12} \right) - \sin \frac{\pi}{12}$$

e confrontarlo con la maggiorazione trovata per il suo modulo.

Esercizio. Si considerino ora i due polinomi di interpolazione della funzione

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right],$$

il primo relativo ai nodi  $x_0, x_1, x_2, x_3$  e il secondo ai nodi  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ , dove  $x_0, x_1, x_2$  sono come nell'esempio sopra e

$$x_3 = \frac{\pi}{3} \text{ e } x_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Dare, sia per  $x = \frac{\pi}{12}$  sia per  $x = \frac{5}{12}\pi$ , le maggiorazioni per il modulo dell'errore di interpolazione in  $x$ .

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, 12].$$

Determinare il polinomio di interpolazione  $p_2$  di  $f$  relativo ai nodi

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 9,$$

dove  $f$  assume i valori

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 3.$$

Determinare la maggiorazione di  $|e_2(x)|$  per  $x = 2$ ,  $x = 3$  e  $x = 11$ . (Si osservi che  $p_2(x)$  è un'approssimazione di  $\sqrt{x}$ ). Si confronti poi la maggiorazione con  $e_2(x)$  determinato utilizzando  $\sqrt{x}$ . Si determini infine la maggiorazione per  $\|e_2\|_{[1,12]}$ .

## 4.2 Maggiorazioni per $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$

Una volta fissato il numero  $n + 1$  dei nodi di interpolazione, la maggiorazione

$$\frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}$$

di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  viene a dipendere dai due fattori:

- $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$ , che dipende dalla scelta particolare degli  $n + 1$  nodi di interpolazione, ma è indipendente dalla funzione da interpolare;
- $\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}$ , che dipende dalla funzione da interpolare, ma è indipendente dalla scelta dei nodi.

Ci concentreremo ora sul fattore  $\|w_{n+1}\|_{[a,b]}$  fornendo delle maggiorazioni per esso.

## 4.3 Maggiorazioni per l'estrapolazione

La prima maggiorazione che presentiamo è la seguente:

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1}.$$

Infatti, per ogni  $x \in [a, b]$ , si ha

$$|x - x_i| \leq b - a, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

e quindi

$$\begin{aligned} |w_{n+1}(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \\ &= |x-x_0||x-x_1|\cdots|x-x_n| \leq (b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq (b-a)^{n+1}.$$

Per  $\|e_n\|_{[a,b]}$  si ha allora la maggiorazione

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

Senza una qualche assunzione sui nodi, la maggiorazione

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1}$$

non può essere migliorata.

Infatti, nel caso di nodi di interpolazione ammassati verso uno degli estremi dell'intervallo  $[a, b]$  e di un punto  $x \in [a, b]$  all'altro estremo rispetto ai nodi



si ha

$$|x - x_i| \approx b - a, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

e quindi

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdots |x - x_n| \approx (b-a)^{n+1}.$$

L'approssimazione della funzione  $f$  con un polinomio di interpolazione relativo a nodi come quelli appena descritti, cioè ammassati tutti da una parte dell'intervallo  $[a, b]$ , è un'*estrapolazione*.

Con tale termine si intende l'approssimare la funzione  $f$ , mediante interpolazione ai nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (con  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ), al di fuori dell'intervallo  $[x_0, x_n]$ .

Alla luce di ciò, le precedenti maggiorazioni

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1},$$

e

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

sono dette *maggiorazioni per l'estrapolazione*.

## 4.4 Polinomi di Taylor come estrapolazione

Più in generale, per estrapolazione si intende l'approssimare la funzione  $f$  al di fuori della “zona” in cui si hanno le informazioni sulla funzione.

Un altro caso ben noto di estrapolazione è quando si approssima  $f$  con un polinomio di Taylor sviluppato attorno all'estremo  $a$ : in questo caso si usano informazioni sulla funzione  $f$  nel solo punto  $a$ , in particolare i valori delle derivate di  $f$  in  $a$ , per approssimare la funzione al di fuori di tale punto.

Il polinomio di Taylor di grado  $\leq n$  attorno all'estremo  $a$  è

$$q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

e l'errore è dato da

$$\delta_n(x) = q_n(x) - f(x) = -\frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad x \in [a, b],$$

dove  $\xi \in (a, x)$ . Quindi,

$$\|\delta_n\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\delta_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

La maggiorazione di  $\|\delta_n\|_{[a,b]}$  è la stessa di quella che abbiamo dato prima per l'interpolazione.

Esercizio. Si consideri ora l'approssimazione di  $f$  data dal polinomio di Taylor di grado  $\leq n$  attorno al punto medio  $c$  di  $[a, b]$ . Dare una maggiorazione per la norma del massimo della funzione errore.

## 4.5 Maggiorazioni per nodi ”spalmati”

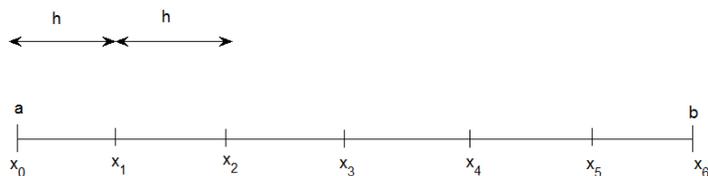
La maggiorazione per l'extrapolazione

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (b-a)^{n+1},$$

viene migliorata da un'altra maggiorazione nel caso in cui i nodi di interpolazione, invece di ammassarsi tutti da una parte dell'intervallo  $[a, b]$ , si “spalmino” su di esso.

Un esempio di nodi “spalmati” su  $[a, b]$  sono i *nodi equidistanti*

$$x_i = a + ih, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$



**Teorema 6** (Maggiorazioni per nodi “spalmati”). Sia

$$h := \max \left\{ x_0 - a, \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i), b - x_n \right\}.$$

Si ha

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq (n+1)!h^{n+1}$$

Inoltre, nel caso in cui  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , si ha

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$$

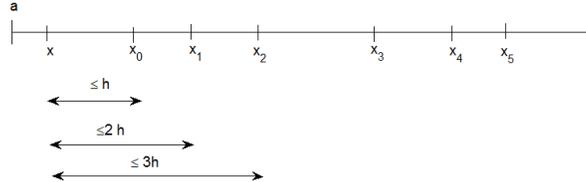
dove ora  $h = \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i)$ .

Esercizio. Cosa diventa la prima maggiorazione nel caso di nodi non “spalmati” ammassati tutti verso un estremo dell’intervallo  $[a, b]$ ? In tale situazione, la maggiorazione risulta migliore o peggiore di quella per l’extrapolazione?

**Dimostrazione.** Sia  $x \in [a, b]$ . Consideriamo le tre situazioni:  $x \in [a, x_0]$ ,  $x \in (x_n, b]$  e  $x \in [x_0, x_n]$ .

Se  $x \in [a, x_0]$ , allora

$$\begin{aligned} |w(x)| &= |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)| \\ &= |x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdot |x - x_2| \cdot \cdots \cdot |x - x_n| \\ &\leq h \cdot 2h \cdot 3h \cdot \cdots \cdot (n+1)h \\ &= (n+1)!h^{n+1} \end{aligned}$$



In modo analogo si prova che, se  $x \in (x_n, b]$ , allora

$$|w(x)| \leq (n+1)!h^{n+1}.$$

Supponiamo ora  $x \in [x_0, x_n]$ . Siano  $x_{i_0}$  e  $x_{i_1}$ , con  $x_{i_0} < x_{i_1}$ , i nodi consecutivi entro cui si trova  $x$ , cioè si ha  $x \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$ , e siano poi  $x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$  gli altri nodi ordinati per distanza crescente da  $x$ .



Si ha

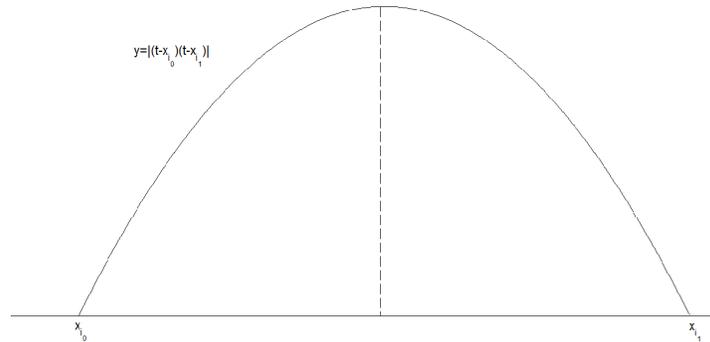
$$\begin{aligned} |w(x)| &= |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \\ &= |(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})(x-x_{i_2})(x-x_{i_3})\cdots(x-x_{i_n})| \\ &= |(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})| \cdot |x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \cdots \cdot |x-x_{i_n}|. \end{aligned}$$

Ora, maggioriamo prima il termine  $|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})|$  e poi l'altro termine  $|x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \cdots \cdot |x-x_{i_n}|$ .

Consideriamo il termine  $|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})|$ . Si ha, essendo  $x \in [x_{i_0}, x_{i_1}]$ ,

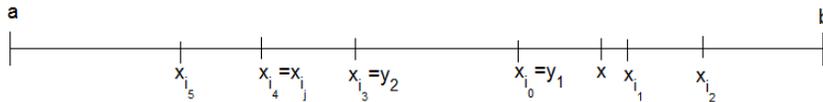
$$|(x-x_{i_0})(x-x_{i_1})| \leq \max_{t \in [x_{i_0}, x_{i_1}]} |(t-x_{i_0})(t-x_{i_1})| = \frac{(x_{i_1}-x_{i_0})^2}{4} \leq \frac{h^2}{4}.$$

con il massimo realizzato quando  $t$  è il punto medio dell'intervallo  $[x_{i_0}, x_{i_1}]$ .

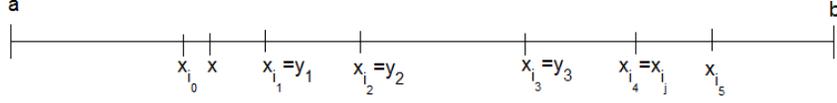


Consideriamo ora l'altro termine  $|x-x_{i_2}| \cdot |x-x_{i_3}| \cdot \cdots \cdot |x-x_{i_n}|$ .

Esaminiamo  $|x-x_{i_j}|$ ,  $j \in \{2, \dots, n\}$ . Andando da  $x$  e  $x_{i_j}$  si incontrano tra  $x$  e  $x_{i_j}$  consecutivamente i nodi  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , dove  $y_1 = x_{i_0}$  o  $y_1 = x_{i_1}$  e  $y_2, \dots, y_k$  sono alcuni (eventualmente tutti) tra i nodi  $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$ .



In questa figura,  $y_2, \dots, y_k$  sono solo alcuni tra i nodi  $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$ . Qui, andando da  $x$  a  $x_{i_j} = x_{i_4}$  si incontrano  $y_1 = x_{i_0}$  e  $y_2 = x_{i_3}$ . Tra i nodi  $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}} = x_{i_2}, x_{i_3}$  resta escluso  $x_{i_2}$ .



In quest'altra figura,  $y_2, \dots, y_k$  sono tutti i nodi  $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$ . Qui, andando da  $x$  a  $x_{i_j} = x_{i_4}$  si incontrano  $y_1 = x_{i_1}$  e  $y_2, y_3 = x_{i_2}, x_{i_3}$ .

I  $k-1$  elementi in  $y_2, \dots, y_k$  non sono più dei  $j-2$  elementi in  $x_{i_2}, \dots, x_{i_{j-1}}$ .

Pertanto  $k-1 \leq j-2$  e quindi  $k+1 \leq j$ . Risulta allora

$$|x - x_{i_j}| \leq \underbrace{|x - y_1|}_{\leq h} + \underbrace{|y_1 - y_2|}_{\leq h} + \dots + \underbrace{|y_{k-1} - y_k|}_{\leq h} + \underbrace{|y_k - x_{i_j}|}_{\leq h} \leq (k+1)h \leq jh.$$

Quindi

$$|x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \dots \cdot |x - x_{i_n}| \leq 2h \cdot 3h \cdot \dots \cdot nh \leq n!h^{n-1}.$$

Pertanto, nella situazione  $x \in [x_0, x_n]$ , risulta

$$\begin{aligned} |w(x)| &= |(x - x_{i_0})(x - x_{i_1})| \cdot |x - x_{i_2}| \cdot |x - x_{i_3}| \cdot \dots \cdot |x - x_{i_n}| \\ &\leq \frac{h^2}{4} \cdot n!h^{n-1} = \frac{n!h^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Si conclude che

$$|w(x)| \leq \begin{cases} (n+1)!h^{n+1} & \text{se } x \in [a, x_0) \cup (x_n, b] \\ \frac{n!h^{n+1}}{4} & \text{se } x \in [x_0, x_n]. \end{cases}$$

Avendosi  $\frac{n!h^{n+1}}{4} < (n+1)!h^{n+1}$ , si ottiene che

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq (n+1)!h^{n+1}.$$

Nel caso in cui  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , si ha  $[a, x_0) \cup (x_n, b] = \emptyset$ . Pertanto

$$\|w_{n+1}\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}$$

dove ora

$$\begin{aligned} h &= \max \left\{ \underbrace{x_0 - a}_{=0}, \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i), \underbrace{b - x_n}_{=0} \right\} \\ &= \max_{i \in \{0,1,\dots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

■

Per  $\|e_n\|_{[a,b]}$  si ha quindi la *maggiorazione per nodi "spalmati"*

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$

Infatti,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{(n+1)! h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.$$

Inoltre, per  $\|e_n\|_{[a,b]}$  si ha anche la *maggiorazione per nodi "spalmati" con  $x_0 = a$  e  $x_n = b$*

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)}.$$

Infatti,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\|w_{n+1}\|_{[a,b]} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{\frac{n! h^{n+1}}{4} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)}.$$

Applicata ai nodi equidistanti, i quali soddisfano  $x_0 = a$  e  $x_n = b$  e si ha  $h = \frac{b-a}{n}$ , la precedente maggiorazione di  $\|e_n\|$  diventa

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}.$$

che è la *maggiorazione per nodi equidistanti*.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 10],$$

interpolata ai nodi  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$  e  $x_3 = 8$ . Determinare il valore della maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per nodi "spalmati".

Fare lo stesso con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [0.1, 1],$$

interpolata ai nodi  $x_0 = 0.125$ ,  $x_1 = 0.25$ ,  $x_2 = 0.5$  e  $x_3 = 1$ . Questa nuova funzione  $f$  è l'inversa della precedente funzione  $f$ . Inoltre, rispetto alla precedente funzione, nodi e valori di interpolazione si scambiano.

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, b],$$

dove  $b > 1$ , interpolata in  $n+1$  nodi equidistanti. Determinare il valore della maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per nodi equidistanti e determinare quando questo valore converge a zero per  $n \rightarrow \infty$ .

Fare lo stesso con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \left[ \frac{1}{b}, 1 \right].$$

Esercizio. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{n+1}, \quad x \in [a, b],$$

interpolata su  $n + 1$  nodi, cioè con un polinomio di grado  $\leq n$ . Determinare il valore della maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per l'extrapolazione e il valore della maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per nodi equidistanti. Provare che il primo valore tende a zero per  $n \rightarrow \infty$  se e solo se  $b - a < 1$  e il secondo valore tende a zero per  $n \rightarrow \infty$  se e solo se  $b - a \leq e$ .

#### 4.6 Confronto tra la maggiorazione per l'extrapolazione e la maggiorazione per nodi spalmati

Il rapporto tra la maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per l'extrapolazione e la maggiorazione per nodi equidistanti è

$$\frac{\text{extrapolazione}}{\text{nodi equidistanti}} = \frac{\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}}{\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)}} = \frac{4n^{n+1}}{n!}.$$

Ora, usando l'*approssimazione di Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

dove

$$a_n \sim b_n, \quad n \rightarrow \infty,$$

significa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

si ha che

$$\frac{4n^{n+1}}{n!} \sim \frac{4n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{4\sqrt{n}e^n}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{n+1}}{n!} = +\infty.$$

Una tabella dei valori di  $\frac{4n^{n+1}}{n!}$  per  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$  è riportata sotto

$n$	$\frac{4n^{n+1}}{n!}$
1	4
2	16
3	54
4	$1.7 \cdot 10^2$
5	$5.2 \cdot 10^2$
6	$1.6 \cdot 10^3$
7	$4.6 \cdot 10^3$

L'elevato valore del rapporto tra le maggiorazioni ben spiega la differenza tra l'estrapolazione e l'*interpolazione vera e propria*, cioè l'approssimare la funzione  $f$  dentro l'intervallo  $[x_0, x_n]$  determinato dai nodi di interpolazione.

Le estrapolazioni dovrebbero essere evitate a favore delle interpolazioni vere e proprie. Quindi, un polinomio di interpolazione con nodi “spalmati” dovrebbe essere preferito ad un polinomio di Taylor sviluppato attorno al punto  $a$ , quando si vuole approssimare la funzione  $f$  su tutto  $[a, b]$  e non solo su un intorno di  $a$ .

Esercizio. Si determini il rapporto tra la maggiorazione della norma del massimo dell'errore del polinomio di Taylor di grado  $\leq n$  attorno al punto medio di  $[a, b]$  (trovata in un precedente esercizio) e la maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per nodi equidistanti. Mostrare che tale rapporto tende a  $+\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ . Costruire una tabella che fornisce i valori di tale rapporto per  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ .

## 5 Aumentare il numero dei nodi di interpolazione

Chiediamoci ora se l'approssimazione della funzione  $f$ , fornita dal polinomio di interpolazione  $p_n$ , diventa buona quanto si vuole all'aumentare del numero  $n+1$  dei nodi di interpolazione. Questo significa chiedersi se si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0. \quad (4)$$

### 5.1 La condizione sulle derivate

Se  $f \in C^\infty([a, b])$  e  $f$  soddisfa la seguente *condizione sulle derivate*

$$\exists M, c \geq 0 \forall k \in \mathbb{N} : \|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq M c^k,$$

allora si ha la (4), per ogni scelta dei nodi di interpolazione, vale a dire, precisando meglio, qualunque sia per ogni  $n \in \mathbb{N}$  la scelta degli  $n+1$  nodi di interpolazione in  $[a, b]$ .

Infatti, ricordando la maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per l'estrapolazione,

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{n+1}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} \leq \frac{(b-a)^{n+1} M c^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{((b-a)c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((b-a)c)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

ricordando il limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$

valido per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### 5.1.1 Funzioni che soddisfano la condizione sulle derivate

Esempi di funzioni che soddisfano la precedente condizione sulle derivate sono

$$f(x) = A \sin(\omega x), \quad g(x) = A \cos(\omega x), \quad h(x) = Ae^{\lambda x}, \quad x \in [a, b],$$

dove  $A, \omega, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Infatti, per  $k \in \mathbb{N}$ , detto  $r(k)$  il resto della divisione di  $k$  per 4 si ha,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \begin{cases} A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 0 \\ A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 1 \\ -A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 2 \\ -A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 3 \end{cases} \\ g^{(k)}(x) &= \begin{cases} A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 0 \\ -A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 1 \\ -A\omega^k \cos(\omega x) & \text{se } r(k) = 2 \\ A\omega^k \sin(\omega x) & \text{se } r(k) = 3 \end{cases} \\ h^{(k)}(x) &= A\lambda^k e^{\lambda x}, \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

e quindi

$$\|f^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot |\omega|^k, \quad \|g^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot |\omega|^k, \quad \|h^{(k)}\|_{[a,b]} \leq |A| \cdot \max_{x \in [a,b]} e^{\lambda x} \cdot |\lambda|^k.$$

Siano ora  $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^\infty([a, b])$  soddisfacenti la condizione sulle derivate, cioè per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tali che

$$\exists M_i, c_i \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} : \|f_i^{(k)}\|_{[a,b]} \leq M_i c_i^k.$$

Per ogni  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , la combinazione lineare

$$\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right) (x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x), \quad x \in [a, b],$$

pure soddisfa la condizione sulle derivate.

Infatti, per  $k \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\begin{aligned}
& \left\| \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right)^{(k)} \right\|_{[a,b]} = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{(k)} \right\|_{[a,b]} \\
& = \max_{x \in [a,b]} \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{(k)}(x) \right|}_{\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot |f_i^{(k)}(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i c_i^k} \\
& \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i \underbrace{c_i^k}_{\leq c^k} \leq \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i \right) \cdot c^k = M c^k
\end{aligned}$$

dove  $c = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} c_i$  e  $M = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| M_i$ .

Pertanto, ogni combinazione lineare di coseni, seni e esponenziali soddisfa la condizione sulle derivate.

### 5.1.2 Condizione sulle derivate e nodi equidistanti

Sotto la condizione sulle derivate,  $\|e_n\|_{[a,b]}$  converge a zero, per  $n \rightarrow \infty$ , per ogni scelta dei nodi di interpolazione. Tuttavia se si usano nodi "spalmati" la convergenza è più veloce. Usando la condizione sulle derivate nella maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per nodi equidistanti, si ottiene

$$\begin{aligned}
\|e_n\|_{[a,b]} & \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1} (n+1)} \leq \frac{(b-a)^{n+1} M c^{n+1}}{4n^{n+1} (n+1)} \\
& = \frac{M}{4(n+1)} \left( \frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Richiedendo

$$\|e_n\|_{[a,b]} \leq \text{TOL},$$

dove TOL è una tolleranza prefissata sul massimo modulo dell'errore di interpolazione su  $[a, b]$ , si prende il minimo  $n$  tale che

$$\frac{M}{4(n+1)} \left( \frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1} \leq \text{TOL}.$$

**Esempio 7** Consideriamo l'interpolazione della funzione

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Per una tale funzione la condizione sulle derivate risulta soddisfatta con  $M = 1$  e  $c = 1$  (essendo  $\cos x = A \cos(\omega x)$  con  $A = 1$  e  $\omega = 1$  e quindi  $M = |A|$  e

$c = |\omega|$ ). I valori di

$$\frac{M}{4(n+1)} \left( \frac{(b-a)c}{n} \right)^{n+1} = \frac{1}{4(n+1)} \left( \frac{\pi}{2n} \right)^{n+1}$$

sono riportati nella tabella sottostante

$n$	$\frac{1}{4(n+1)} \left( \frac{\pi}{2n} \right)^{n+1}$
1	$3.1 \cdot 10^{-1}$
2	$4.0 \cdot 10^{-2}$
3	$4.7 \cdot 10^{-3}$
4	$4.7 \cdot 10^{-4}$
5	$4.0 \cdot 10^{-5}$
6	$3.0 \cdot 10^{-6}$
7	$2.0 \cdot 10^{-7}$
8	$1.2 \cdot 10^{-8}$

Per cui, richiedendo ad esempio  $\text{TOL} = 10^{-7}$ , si prende  $n = 8$ .

Esercizio. Si osservi che per costruire il polinomio di interpolazione  $p_8$  della funzione coseno nell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sono richiesti i valori della funzione coseno nei nodi equidistanti

$$x_i = i \frac{\pi}{8} = i \frac{\pi}{16}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\}.$$

Per  $i \in \{0, 4, 8\}$ , i valori  $\cos x_i$  sono  $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$ . Determinare i valori  $\cos x_i$  per  $i \notin \{0, 4, 8\}$  usando le formule trigonometriche di bisezione e di addizione a partire dal valore  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  di coseno e seno in  $\frac{\pi}{4}$ . Questo mostra che non è necessario avere un modo di calcolare  $\cos x$  per ogni  $x$ , al fine di costruire  $p_8$ , che fornisce approssimazioni con sette cifre decimali esatte.

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1],$$

su  $n + 1$  nodi equidistanti. Determinare  $n$  in modo da avere  $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \text{TOL} = 10^{-10}$ .

Esercizio. Si consideri l'interpolazione della funzione

$$f(x) = 2 \sin 4\pi x - 3 \cos 8\pi x, \quad x \in [-2, 2],$$

su  $n + 1$  nodi equidistanti. Determinare  $n$  in modo da avere  $\|e_n\|_{[0,1]} \leq \text{TOL} = 10^{-10}$ .

## 5.2 Il fenomeno di Runge

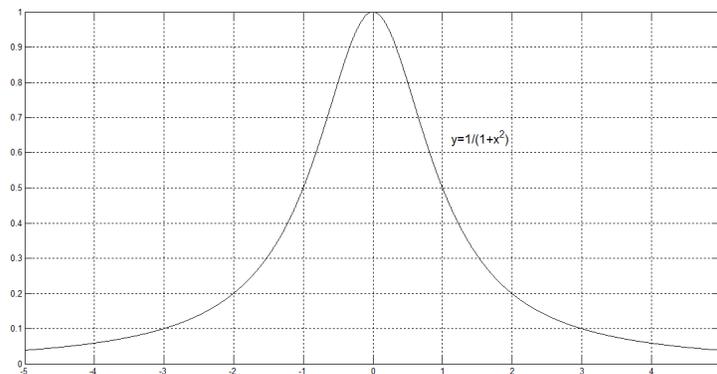
Per una funzione  $f \in C^\infty([a, b])$  che non soddisfa la condizione sulle derivate non è assicurato che valga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[a, b]} = 0,$$

nemmeno se si usano nodi ben "spalmati" sull'intervallo  $[a, b]$  come quelli equidistanti.

Ad esempio, consideriamo la funzione in  $C^\infty([-5, 5])$ ,

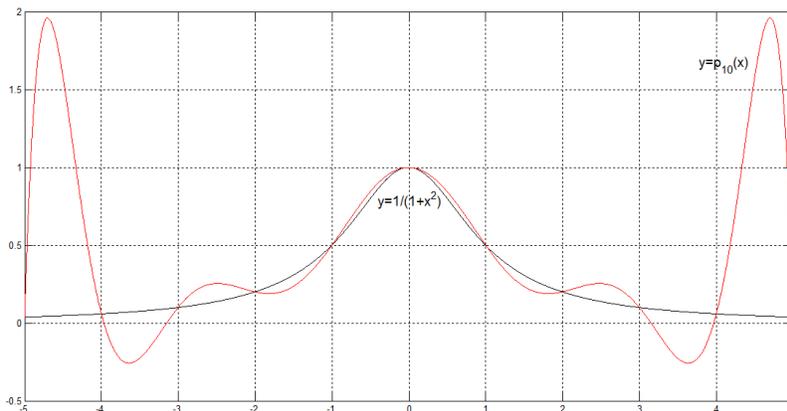
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$



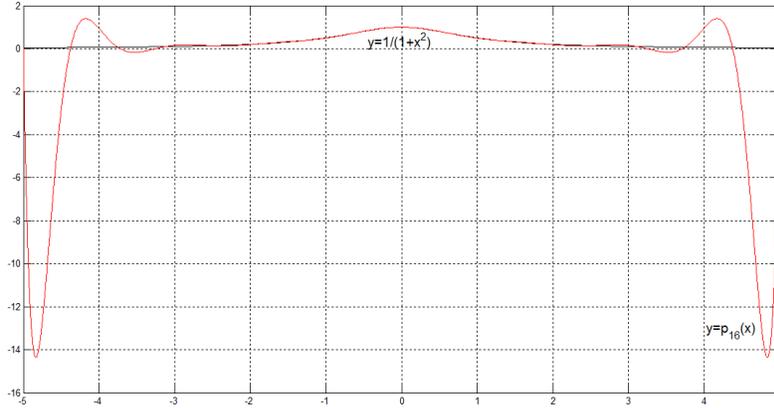
Interpolando tale funzione con i nodi equidistanti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[-5, 5]} = +\infty.$$

Come evidenza di questo, in figura è mostrato  $p_{10}$  per nodi equidistanti.



Ecco invece  $p_{16}$ , sempre per nodi equidistanti.



Il polinomio di interpolazione  $p_n$  approssima bene la funzione  $f$  in un intorno di 0, ma poi oscilla fortemente vicino agli estremi  $-5$  e  $5$ .

In questo caso, dove si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[-5,5]} = +\infty,$$

la  $f$  non soddisfa la condizione sulle derivate. Le derivate di  $f$  crescono più rapidamente della crescita prevista nella condizione sulle derivate. Dal momento che anche la maggiorazione di  $\|e_n\|_{[-5,5]}$  per nodi equidistanti tende a  $+\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1} (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[-5,5]}}{4n^{n+1} (n+1)} = +\infty,$$

si ha che la successione  $\|f^{(n+1)}\|_{[-5,5]}$  va a infinito più rapidamente di come va a infinito la successione  $\frac{n^{n+1}(n+1)}{10^{n+1}}$ .

Il divergere di  $\|e_n\|_{[a,b]}$ , per  $n \rightarrow \infty$ , prende il nome di *fenomeno di Runge*.

### 5.3 Nodi di interpolazione di Chebyshev

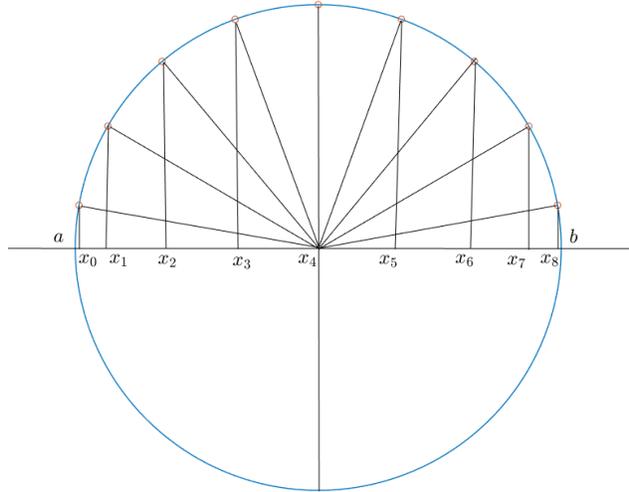
L'aumento del numero di nodi di interpolazione non è garanzia di una migliore approssimazione della funzione  $f$ . L'esempio visto sopra mostra che il fenomeno di Runge può presentarsi anche con una funzione  $f$  di classe  $C^\infty$  e nodi ben "spalmati" come quelli equidistanti.

Tuttavia esistono dei particolari nodi di interpolazione con i quali si evita il fenomeno di Runge e si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|_{[a,b]} = 0$  se  $f \in C^1([a,b])$ .

Questi particolari nodi di interpolazione sono i *nodi di Chebyshev* dati da

$$x_i = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Come si vede dalla formula che li definisce (vedi anche la figura sottostante),



i nodi di Chebyshev sono costruiti nel seguente modo: si considera la circonferenza di centro il punto medio dell'intervallo  $[a, b]$  e diametro l'intervallo  $[a, b]$  e poi la si percorre a metà dall'estremo  $a$  all'estremo  $b$  in senso orario con la curva

$$(x, y) = \underbrace{\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)}_{\text{centro della circonferenza}} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{\text{raggio della circonferenza}} (-\cos t\pi, \sin t\pi), \quad t \in [0, 1].$$

I nodi di Chebyshev sono le ascisse  $x$  dei punti corrispondenti ai tempi

$$t_i = \frac{2i+1}{2n+2}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Osservare che

$$t_0 = \frac{1}{2n+2}, \quad t_n = 1 - \frac{1}{2n+2}$$

e  $t_0, t_1, \dots, t_n$  sono equidistanti di  $\frac{2}{2n+2}$ . Per cui, i nodi di Chebyshev sono equidistanti sulla semicirconferenza, ma sull'intervallo  $[a, b]$  tendono ad ammassarsi verso gli estremi, in modo da evitare le forti oscillazioni che si osservano con i nodi equidistanti nel fenomeno di Runge.

Con i nodi di Chebyshev si ha

$$\|e_n\|_{[a,b]} = O\left(\frac{\log n}{n^k}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

se  $f \in C^k([a, b])$ .

## 6 Interpolazione a tratti

Un'altra possibilità (diversa da quella di utilizzare i nodi di Chebyshev), per ottenere approssimazioni sempre migliori di una funzione  $f$ , è quella data dalla *interpolazione di Lagrange a tratti* che ora descriviamo.

Siano  $n, N$  interi positivi fissati. Si introducono sull'intervallo  $[a, b]$  gli  $N + 1$  nodi equidistanti *primari*

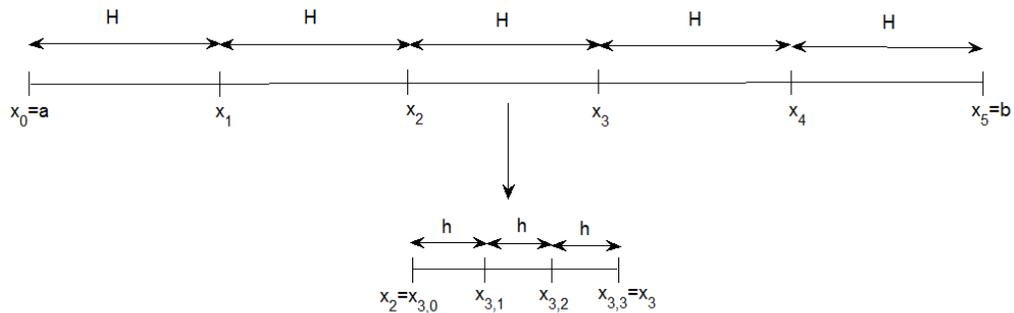
$$x_i = a + iH, \quad i \in \{0, 1, \dots, N\} \quad \text{e} \quad H = \frac{b-a}{N},$$

che suddividono l'intervallo  $[a, b]$  negli  $N$  sottointervalli di ampiezza  $H$

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

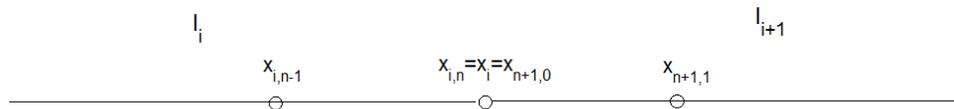
In ogni sottointervallo  $I_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , si introducono poi gli  $n + 1$  nodi equidistanti *secondari*

$$x_{i,j} = x_{i-1} + jh, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad h = \frac{H}{n}.$$



In ogni sottointervallo  $I_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , la funzione  $f$  viene approssimata dal polinomio di interpolazione di  $f$  relativo ai nodi  $x_{i,j}, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , che denoteremo con  $p_{n,N,i}$ . Osservare che  $p_{n,N,i}$  ha grado  $\leq n$ .

Notare che, per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ , l'ultimo nodo secondario  $x_{i,n} = x_i$  dell'intervallo  $I_i$  coincide con il primo nodo secondario  $x_{i+1,0} = x_i$  dell'intervallo  $I_{i+1}$ .



Per cui, nel nodo

$$x_{i,n} = x_i = x_{i+1,0}$$

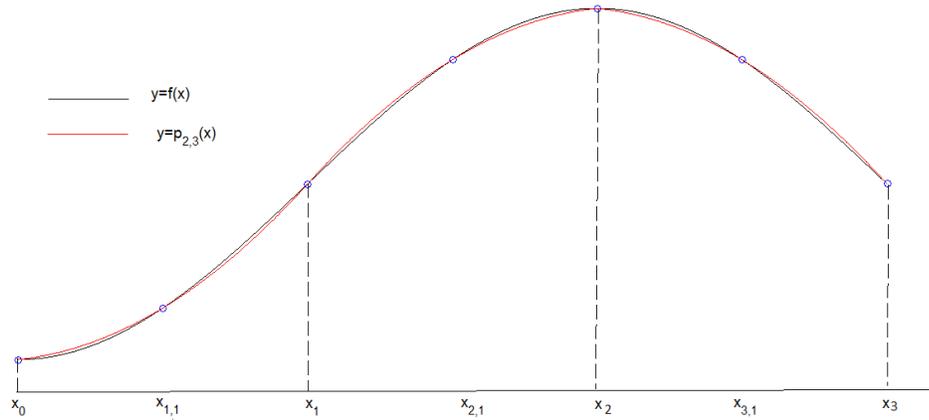
comune ai sottointervalli  $I_i$  e  $I_{i+1}$ , i polinomi  $p_{n,N,i}$  e  $p_{n,N,i+1}$  si "saldano": si ha

$$p_{n,N,i}(x_{i,n}) = f(x_i) = p_{n,N,i+1}(x_{i+1,0}).$$

Sull'intervallo  $[a, b]$ , la funzione  $f$  è quindi approssimata dal polinomio a tratti  $p_{n,N} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definito da

$$p_{n,N}(x) = p_{n,N,i}(x), \quad x \in I_i \text{ e } i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

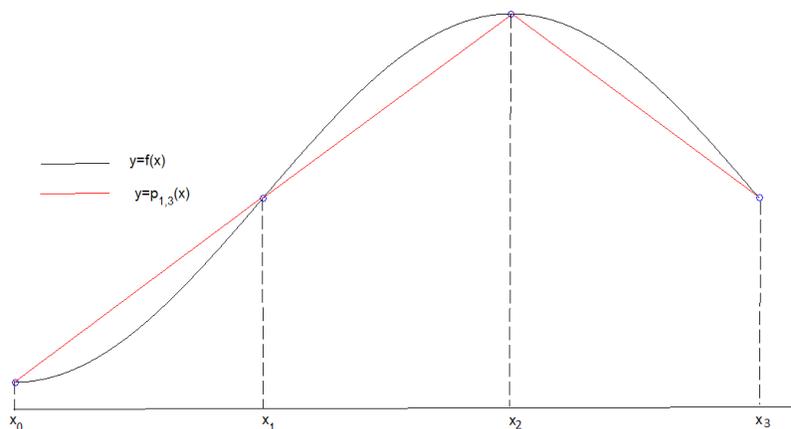
detto *polinomio di interpolazione di Lagrange a tratti* di  $f$  di grado  $\leq n$  su  $N$  sottointervalli.



Esercizio. Spiegare perché  $p_{n,N}$  è una funzione continua.

Nei casi  $n = 1, 2, 3$  si parla di *interpolazione lineare a tratti*, *quadratica a tratti*, *cubica a tratti*, rispettivamente.

Un'illustrazione dell'interpolazione lineare a tratti è data in figura.



## 6.1 L'errore dell'interpolazione a tratti

L'errore  $e_{n,N,i} : I_i \rightarrow \mathbb{R}$  sull'intervallo  $I_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , è dato da

$$e_{n,N,i}(x) = p_{n,N,i}(x) - f(x), \quad x \in I_i.$$

Ricordando la maggiorazione di  $\|e_n\|_{[a,b]}$  per nodi equidistanti, si ha, per una funzione  $f \in C^{n+1}([a, b])$ ,

$$\|e_{n,N,i}\|_{I_i} \leq \frac{H^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{4n^{n+1} (n+1)} = \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)}.$$

L'errore  $e_{n,N} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dell'interpolazione a tratti è dato da

$$e_{n,N}(x) = p_{n,N}(x) - f(x), \quad x \in [a, b],$$

e per  $x \in I_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , si ha

$$e_{n,N}(x) = p_{n,N}(x) - f(x) = p_{n,N,i}(x) - f(x) = e_{n,N,i}(x).$$

Si ottiene, per una funzione  $f \in C^{n+1}([a, b])$ ,

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1} (n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\|e_{n,N}\|_{[a,b]} &= \max_{i \in \{1,2,\dots,N\}} \|e_{n,N,i}\|_{I_i} \\
&\leq \max_{i \in \{1,2,\dots,N\}} \frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{I_i}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)} \cdot \max_{i \in \{1,2,\dots,N\}} \|f^{(n+1)}\|_{I_i} \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{N^{n+1} 4n^{n+1} (n+1)} \cdot \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}.
\end{aligned}$$

Tenendo fisso  $n$  e facendo tendere  $N$  all'infinito si ha, per ogni  $f \in C^{n+1}([a,b])$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|e_{n,N}\|_{[a,b]} = 0.$$

In particolare, si ha

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} = O\left(\frac{1}{N^{n+1}}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

Per cui, nell'interpolazione di Lagrange a tratti si ottengono approssimazioni sempre migliori aumentando il numero  $N$  dei sottointervalli, ma tenendo fisso il grado  $n$  dei polinomi di interpolazione in ogni sottointervallo, in modo da evitare il possibile fenomeno di Runge.

Per l'interpolazione lineare a tratti la maggiorazione dell'errore è

$$\|e_{1,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^2 \|f''\|_{[a,b]}}{8} \cdot \frac{1}{N^2}.$$

e l'ordine di convergenza è  $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

Per l'interpolazione quadratica a tratti la maggiorazione dell'errore è

$$\|e_{2,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^3 \|f'''\|_{[a,b]}}{96} \cdot \frac{1}{N^3}$$

e l'ordine di convergenza è  $O\left(\frac{1}{N^3}\right)$ .

Per l'interpolazione cubica a tratti la maggiorazione dell'errore è

$$\|e_{3,N}\|_{[a,b]} \leq \frac{(b-a)^4 \|f^{(4)}\|_{[a,b]}}{1296} \cdot \frac{1}{N^4}$$

e l'ordine di convergenza è  $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$ .

## 6.2 Determinare $N$ a partire da una tolleranza TOL sull'errore

Se si vuole

$$\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \text{TOL},$$

dove TOL è una tolleranza prefissata, basta prendere  $N$  tale che

$$\frac{(b-a)^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4n^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}} \leq \text{TOL},$$

vale a dire

$$N \geq \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n^{n+1} \sqrt[4]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}}.$$

Si prende allora

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt[n+1]{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n^{n+1} \sqrt[4]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil.$$

Nel caso in cui risulti difficile calcolare  $\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}$ , ma sia facile invece determinare una sua maggiorazione  $M$ , si prende  $N$  tale che

$$\frac{(b-a)^{n+1} M}{4n^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{1}{N^{n+1}} \leq \text{TOL},$$

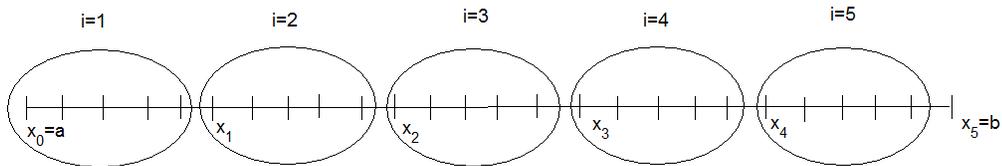
che comunque garantisce  $\|e_{n,N}\|_{[a,b]} \leq \text{TOL}$ . Si prende allora

$$N = \left\lceil \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt[n+1]{M}}{n^{n+1} \sqrt[4]{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil.$$

Notare che, con  $N$  sottointervalli, la funzione  $f$  deve essere nota su  $nN + 1$  punti, cioè sui punti

$$x_{i,0} = x_{i-1}, x_{i,1}, \dots, x_{i,n-1}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (5)$$

più  $x_n$ .



Notare che in (5) non si considera l'ultimo punto  $x_{i,n} = x_i$  per non contarlo due volte: si ha infatti  $x_{i+1,0} = x_i$  e quindi esso viene contato non come ultimo punto dell'intervallo  $i$ -esimo ma come primo punto dell'intervallo  $(i+1)$ -esimo.

Nel caso dell'interpolazione lineare a tratti il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a) \sqrt{\|f''\|_{[a,b]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è  $N + 1$ .

Nel caso dell'interpolazione quadratica a tratti il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a) \sqrt[3]{\|f'''\|_{[a,b]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è  $2N + 1$ .

Nel caso dell'interpolazione cubica a tratti il numero dei sottointervalli è

$$N = \left\lceil \frac{(b-a) \sqrt[4]{\|f^{(4)}\|_{[a,b]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\text{TOL}}} \right\rceil$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è  $3N + 1$ .

**Esempio 8** Determiniamo su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con  $\text{TOL} = 10^{-7}$ .

Nel caso dell'interpolazione lineare a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{\|-\cos\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{2\sqrt{8}} \cdot 10^{\frac{7}{2}} \right\rceil = 1757$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è  $N + 1 = 1758$ .

Nel caso dell'interpolazione quadratica a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt[3]{\|\sin\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}}{2\sqrt[3]{12}} \cdot \sqrt[3]{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{4\sqrt[3]{12}} \cdot 10^{\frac{7}{3}} \right\rceil = 74$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è  $2N + 1 = 149$ .

Nel caso dell'interpolazione cubica a tratti si ha

$$N = \left\lceil \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\|\cos\|_{[0, \frac{\pi}{2}]}}}{6} \cdot \sqrt[4]{10^7} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{12} \cdot 10^{\frac{7}{4}} \right\rceil = 15$$

e il numero di punti in cui deve essere nota la funzione è  $3N + 1 = 46$ .

Si è visto sopra che la funzione  $\cos$  è approssimata con  $\text{TOL} = 10^{-7}$  dal polinomio  $p_8$  di interpolazione di Lagrange non a tratti su nodi equidistanti utilizzando solo 9 valori della funzione. L'interpolazione di Lagrange a tratti ha però un senso anche in questo caso.

Infatti, se è necessario calcolare moltissimi valori della funzione  $\cos$ , invece di calcolare moltissime volte i valori del polinomio  $p_8$  di grado 8, può essere conveniente calcolare con  $p_8$  solo il numero richiesto di valori di  $\cos$  per costruire un polinomio di interpolazione a tratti  $p_{n,N}$  di grado  $n$  basso e, dopo, calcolare ogni valore di  $\cos$  con  $p_{n,N}$ , il quale richiede nel calcolo dei suoi valori meno operazioni di  $p_8$ .

Esercizio. Dire su quanti punti deve essere nota la funzione

$$f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1],$$

per interpolare linearmente, quadraticamente e cubicamente a tratti con  $\text{TOL} = 10^{-10}$ .

Esercizio. Si consideri una tabella che contiene i valori  $\sin x$  per

$$x = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 90^\circ.$$

Si supponga di calcolare i valori  $\sin x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , interpolando linearmente a tratti i valori della tabella. Determinare la maggiorazione per il massimo modulo dell'errore di interpolazione lineare a tratti.

Esercizio. Si voglia approssimare una funzione  $f \in C^3([a, b])$  con una interpolazione lineare a tratti o quadratica a tratti utilizzando la formula

$$N = \frac{(b-a)^{n+1} \sqrt{\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}}{n^{n+1} \sqrt{4(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{1}{\text{TOL}}}$$

per determinare il numero di sottointervalli (in realtà si dovrebbe prendere la parte intera superiore del membro destro).

Trovare per quali tolleranze  $\text{TOL}$ , l'interpolazione lineare utilizza un numero di punti in cui  $f$  deve essere nota inferiore a quello dell'interpolazione quadratica.

Si applichi il risultato trovato al caso della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [a, b],$$

dove  $a \geq 1$ .