1) Determinare il polinomio di interpolazione di Lagrange della funzione

$$f(x) = x^3 \quad , \quad x \in [0,1]$$

di grado $\leq n = 2$ relativo ai nodi

$$x_0 = 0 \, , \, x_1 = \frac{1}{2} \, , \, x_2 = 1 \, .$$

Determinare l'errore di interpolazione $e_2(x)$ nel punto $x = \frac{1}{4}$ e confrontarlo con la maggiorazione per il modulo di tale errore presentata durante il corso

Determinare infine la maggiorazione appropriata per il massimo modulo dell'errore di interpolazione su tutto l'intervallo $[0,1]$

x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0
$1/2$	$1/8$
1	1

$$P_2(x) = l_0(x)\cdot \underbrace{y_0}_{=0} + l_1(x)\cdot y_1 + l_2(x)\cdot y_2$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\cdot\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x}{1/2 - 0}\cdot\frac{x-1}{1/2 - 1}$$

$$= 4x(1-x)$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\cdot\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{1-0}\cdot\frac{x - 1/2}{1 - 1/2} = x(2x-1)$$

$$P_2(x) = \cancel{4}x(1-x)\cdot\frac{1}{\cancel{8}\,2} + x(2x-1)\cdot 1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$P_2(0) = 0 \quad , \quad P_2(1/2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = 1/8$$

$$P_3(1) = 3/2 - 1/2 = 1$$

$$e_2\left(\tfrac{1}{4}\right) = p_2\left(\tfrac{1}{4}\right) - f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{32} - \frac{4}{32} = -\tfrac{1}{32}$$

$$\left|e_2\left(\tfrac{1}{4}\right)\right| \le \frac{\left|w_3\left(\tfrac{1}{4}\right)\right| \, \|f^{(3)}\|_{[0,1]}}{3!} = \frac{|w_{n+1}(x)| \, \|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{\frac{3}{64}\cdot 6}{6} = \frac{3}{64}$$

$$w_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x - 1)$$

$$w_3\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{4} - 1\right) = \frac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{64}$$

$$\|f^{(3)}\|_{[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = 6$$

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6$$

$$\|e_2\|_{[0,1]} \le \frac{\|W_3\|_{[0,1]}\,\|f^{(3)}\|_{[0,1]}}{3!}$$

$$\|e_2\|_{[0,1]} \le \frac{(b-a)^{(n+1)}\,\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{(n+1)!} = \frac{\|f^{(3)}\|_{[0,1]}}{3!} = \frac{6}{6} = 1$$

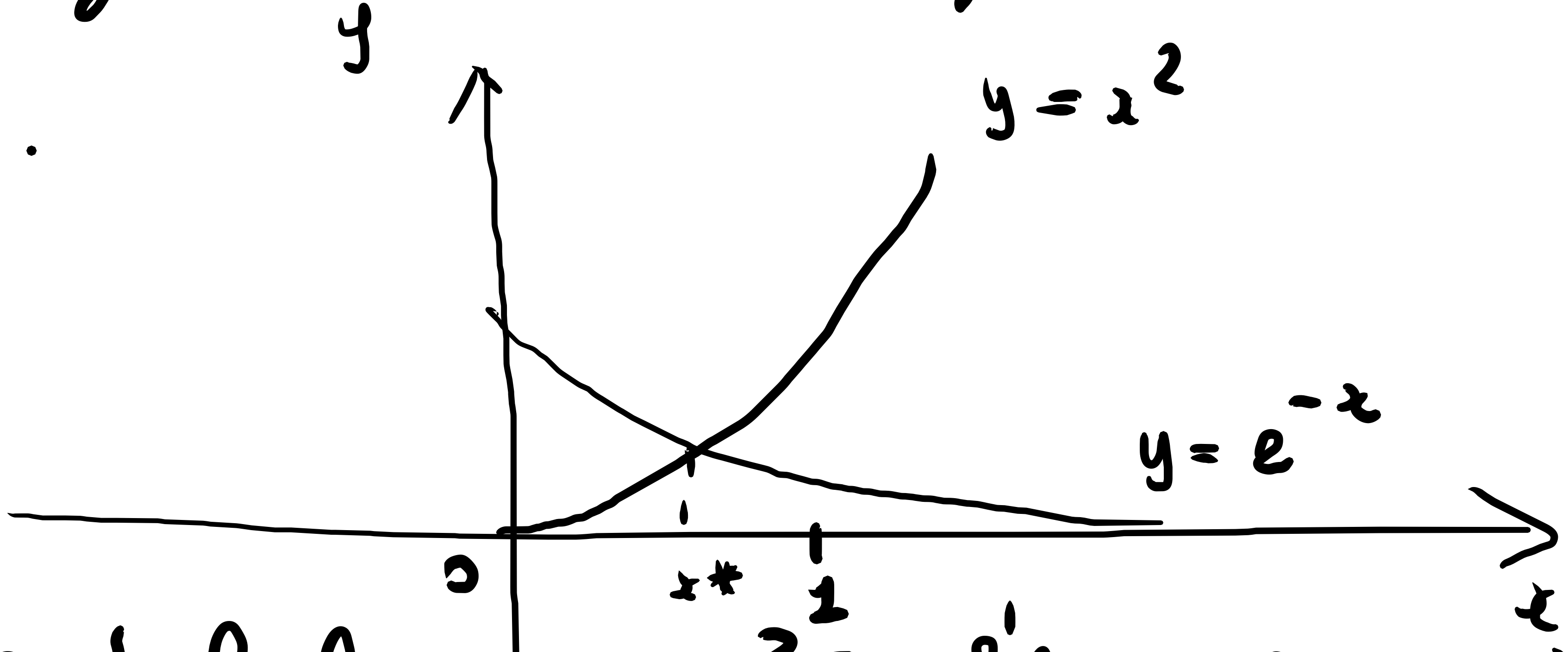
$$\|e_2\|_{[0,1]} \le \frac{h^{n+1}\,\|f^{(n+1)}\|_{[a,b]}}{4(n+1)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \|f^{(3)}\|_{[0,1]}}{4 \cdot 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cdot 6}{12} = \frac{1}{16}$$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 - e^{-x}, \quad x \in [0,1]$$

Spiegare graficamente perché la funzione ha un unico zero. Si utilizzi il metodo di Newton per il calcolo di questo zero. Determinare un'iterata iniziale x_0 per il metodo che garantisca la convergenza allo zero e si scriva il criterio d'arresto.



$$f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

$x^* \in (0,1)$ $[0,1]$ è un intervallo di localizzazione? SI $f'(x) = 2x + e^{-x} \geq e^{-x} > 0$ per $x \in [0,1]$ ✓

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - e^{-x_n}}{2x_n + e^{-x_n}} = \frac{x_n^2 + e^{-x_n}(x_n+1)}{2x_n + e^{-x_n}}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

x_0 ?

$$f'(x) = 2x + e^{-x} \geq e^{-x} > 0 \quad \text{per } x \in [0,1]$$

$$f''(x) = 2 - e^{-x} \geq 2 - 1 = 1 > 0 \quad \text{per } x \in [0,1]$$

$\text{Sign}(f' f'') > 0$

$x_0 = b = 1$

Criterio d'arresto:

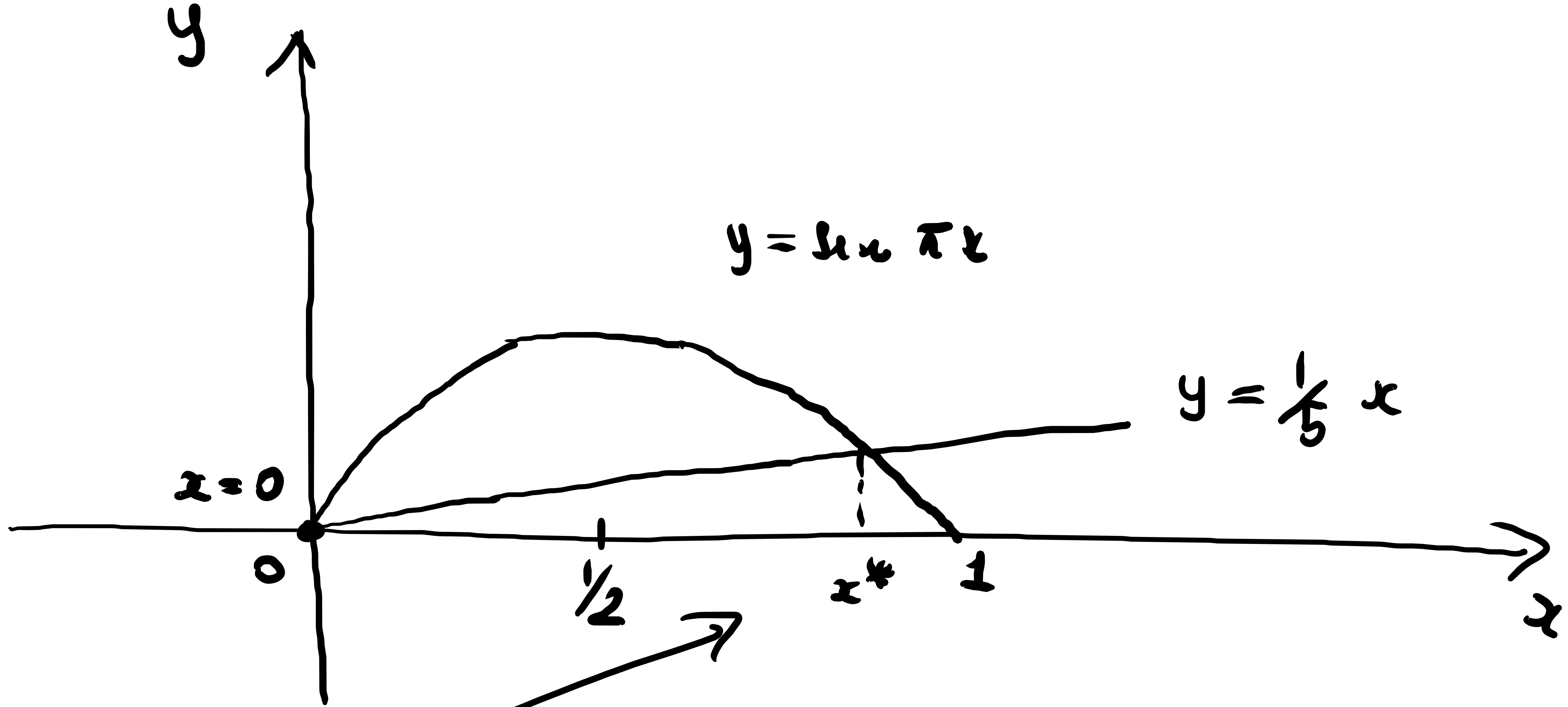
$$|f(x_n)| = |x_n^2 - e^{-x_n}| \leq \underbrace{m'}_{=1} \cdot TOL$$

$$m' = |f'(a)| = f'(0) = 1$$

2) Si consideri l'equazione

$$\frac{1}{5}x = \sin(\pi x) \quad , \quad x \in [0,1]. \qquad f(x) = \frac{1}{5}x - \sin \pi x = 0$$

Quante soluzioni ha quest'equazione? Determine queste soluzioni utilizzando, quando serve, il metodo di Newton



Le soluzioni sono 0 e x^*

$[1/2, 1]$ è intervallo di localizzazione? $\quad f(x) = \frac{1}{5}x - \operatorname{sen} \pi x$

$$f(1/2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{10} - 1 < 0$$

$$f(1) = \frac{1}{5} \cdot 1 - \operatorname{sen} \pi = \frac{1}{5} > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \pi \underbrace{\cos \pi x}_{\leq 0 \text{ per } x \in [1/2, 1]} \geq \frac{1}{5} > 0 \text{ per } x \in [1/2, 1]$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{1/5\, x_n - \sin \pi x_n}{1/5 - \pi \cos \pi x_n} = \frac{\sin \pi x_n - x_n \pi \cos \pi x_n}{\frac{1}{5} - \pi \cos \pi x_n}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \pi \cos \pi x > 0$$

$$f''(x) = \pi^2 \sin \pi x > 0 \quad \text{in } \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

x_0 ?

$$\text{Sign}\left(f' f''\right) > 0$$

$$x_0 = b = 1$$

Criterio d'arresto

$$|f(x_n)| = \left|\frac{1}{5} x_n - \sin \pi x_n\right| \leq \underbrace{m'}_{= 1/5} \cdot TOL$$

$$m' = \left|f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{5} - \pi \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{2}}_{=0} = \frac{1}{5}$$

4) Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x_1 x_2 + x_3 \,, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determinare i tre indici di condizionamento della funzione e spiegare perchè sono tutti minori di 1 per $x_1, x_2, x_3 > 0$

b) Mostrare che per $\dfrac{x_3}{x_1 x_2} \simeq -1$, la funzione è mal-condizionata

c) Determinare gli indici di stabilità dell'algoritmo basato sull'espressione di f presentata sopra e mostrare che l'algoritmo è instabile per $x_3 / x_1 x_2 \simeq -1$.

$$f(x) = x_1 x_2 + x_3$$

per $x_1, x_2, x_3 > 0$

a) $$K_1(f,x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot x_1}{f(x)} = \frac{x_2 \cdot x_1}{x_1 x_2 + x_3} = \frac{\overset{>0}{x_1 x_2}}{x_1 x_2 + \underset{>0}{x_3}} < 1$$

$$K_2(f,x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot x_2}{f(x)} = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 x_2 + x_3} = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + x_3} < 1$$

$$K_3(f,x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \cdot x_3}{f(x)} = \frac{1 \cdot x_3}{x_1 x_2 + x_3} = \frac{\overset{>0}{x_3}}{\underset{>0}{x_1 x_2} + \underset{>0}{x_3}} < 1$$

b)

$$K_1(f,x) = K_2(f,x) = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + x_3} = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x_3}{x_1 x_2}}_{=t}} = \frac{1}{1+t}$$

$$K_3(f,x) = \frac{x_3}{x_1 x_2 + x_3} = \frac{1}{\frac{x_1 x_2}{x_3} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} = \frac{t}{1+t}$$

$F = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

f è m.c. per $t = \frac{x_3}{x_1 x_2} \approx -1$

$\bar{F} \setminus F = \{-\infty, -1, +\infty\}$

$$\lim_{t \to -\infty} \underbrace{K_1(f,x)}_{= K_2(f,x)} = 0 \quad , \quad \lim_{t \to -1} K_1(f,x) = +\infty \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} K_1(f,x) = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty} K_3(f,x) = 1 = \lim_{t \to +\infty} K_3(f,x) \quad , \quad \lim_{t \to -1} K_3(f,x) = +\infty$$

c)

$$a = x_1 \cdot x_2 \qquad \rho_a \doteq \underbrace{\rho_{x_1}}_{=0} + \underbrace{\rho_{x_2}}_{=0} + \gamma_1$$

$$y = a + x_3$$

$$\varepsilon_{alg} = \rho_y \doteq \frac{a}{a+x_3} \cdot \rho_a + \frac{x_3}{a+x_3} \cdot \underbrace{\rho_{x_3}}_{=0} + \gamma_2$$

$$\doteq \frac{a}{a+x_3} \gamma_1 + \gamma_2$$

$$M_1(x) = \frac{a}{a+x_3} = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + x_3} = \frac{1}{1 + \frac{x_3}{x_1 x_2}} = \frac{1}{1+t} \xrightarrow[t \to -1]{} +\infty$$

$$M_2(x) = 1$$

Algoritmo è instabile per $t = \frac{x_3}{x_1 x_2} \simeq -1$

5) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^4 - 4x - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Si determini per ciascun zero di f un intervallo di localizzazione che soddisfi le proprietà i) - v) degli intervalli di localizzazione

b) Per ciascun zero di f si determini un'iterata iniziale x_0 del metodo di Newton che garantisca la convergenza delle iterate e si determini il criterio d'arresto.

$$f(x) = x^4 - 4x - 1$$

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

$$f''(x) = 12x^2 > 0$$

in $(-1, 0)$

$-$ $\quad$ 1 $\quad$ $+$

$$f(0) = -1$$

$$f(-1) = 1 - 4(-1) - 1 = 4 > 0$$

Per x_1^*, $[-1, 0]$ ~~può essere~~ è un intervallo di localizzazione che soddisfa i) - v)

$$f(1) = 1 - 4 - 1 = -4 < 0$$

Ci sono due zeri $x_1^* < 1$ e $x_2^* > 1$

$f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$

Per x_2^*, $[1, 2]$ NON può essere un intervallo di localizzazione

iv) non vale perché $f'(1) = 0$

$f(3/2) = (3/2)^4 - 4 \cdot 3/2 - 1 = \frac{81}{16} - 6 - 1 = \frac{81}{16} - 7 < 0$

$[3/2, 2]$ può essere un intervallo di localizzazione

iv) è soddisfatta e anche v) è soddisfatta

$[-1, 0]$ per x_1^* e $[3/2, 2]$ per x_2^*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$= \frac{3x_n^4 + 1}{4x_n^3 - 4} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

x_0 ?

Per x_1^* in $[-1, 0]$ sign $(f' f'') < 0$ essendo $f' < 0$ e $f'' > 0$ in $[-1, 0]$

$x_0 = a = -1$

Per x_2^* in $[3/2, 2]$ sign $(f' f'') > 0$ essendo $f' > 0$ e $f'' > 0$ in $[3/2, 2]$

$x_0 = b = 2$

Criterio d'arresto

Per x_1^*

$$|f(x_n)| = |x_n^4 - 4x_n - 1| \le \overbrace{m'}^{=4} \cdot TOL$$

$$m' = |f'(b)| = |f'(0)| = |-4| = 4$$

Per x_2^*

$$|f(x_n)| = |x_n^4 - 4x_n - 1| \le \overbrace{m'}^{=9.5} \cdot TOL$$

$$m' = |f'(a)| = f'(3/2) = 4\left(3/2\right)^3 - 4$$

$$= 4 \cdot \frac{27}{8} - 4 = \frac{27}{2} - 4 = \frac{19}{2} = 9.5$$