LA CLASSE CO-NP
TEOREMA DI SAVITCH

INFORMATICA

COMPLEMENTARE I PROBLEMI DI DECISIONE

- Dato un linguaggio L possiamo studiare il linguaggio $\bar{L} = \Sigma^\star - L$, ovvero il complementare di L
- Abbiamo che $w \in L \iff w \notin \bar{L}$
- Dato una classe di linguaggi $\mathscr{C}$ ci chiediamo se essa si chiusa rispetto alla complementazione, ovvero se $L \in \mathscr{C} \iff \bar{L} \in \mathscr{C}$
- Sia $\mathrm{co}\mathscr{P}$ la classe $\mathrm{co}\mathscr{C} = \{\bar{L} \mid L \in \mathscr{C}\}$, se $\mathscr{C}$ è chiusa rispetto alla complementazione, allora $\mathrm{co}\mathscr{C} = \mathscr{C}$

COMPLEMENTAZIONE PER TM DETERMINISTICHE

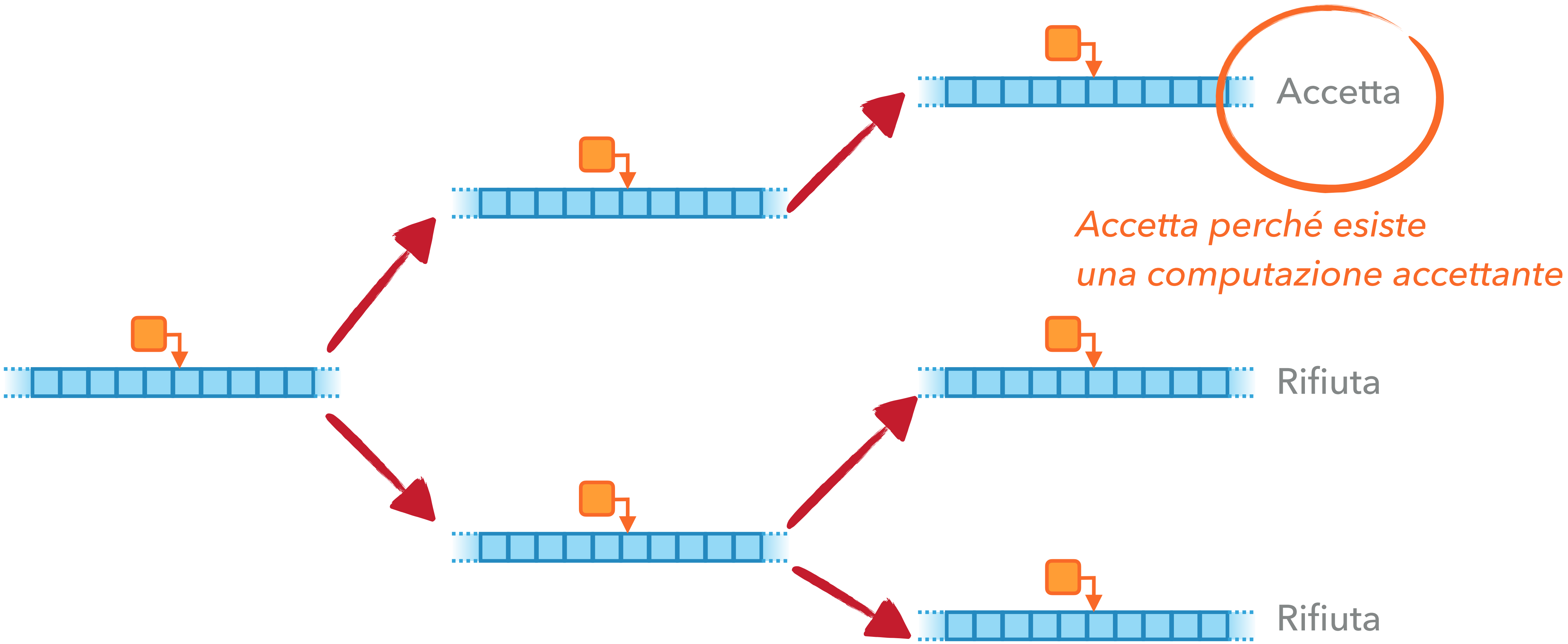
- Consideriamo un problema $L \in \mathrm{P}$
- Se L è in P allora esiste una TM deterministica $M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ che in tempo polinomiale accetta le parole in L e rifiuta le parole che non appartengono a L
- Se invertiamo gli stati accettante e rifiutante di M_L allora accettiamo le parole non in L e rifiutiamo quelle in L: abbiamo ottenuto una macchina che decide $\bar{L}$ in tempo polinomiale
- Quindi abbiamo $\mathrm{P} = \mathrm{coP}$

COMPLEMENTAZIONE PER TM NON DETERMINISTICHE

- Consideriamo ora $L \in \mathrm{NP}$
- Possiamo fare la stessa costruzione usata per le macchine deterministiche?
- Se invertiamo il ruolo di stato accettante e rifiutante…
- …otteniamo che passiamo da "esiste uno stato accettante" a "esiste uno stato rifiutante"
- Ma questo non è abbastanza per dire che rifiutiamo invece di accettare!

COMPLEMENTAZIONE PER TM NON DETERMINISTICHE

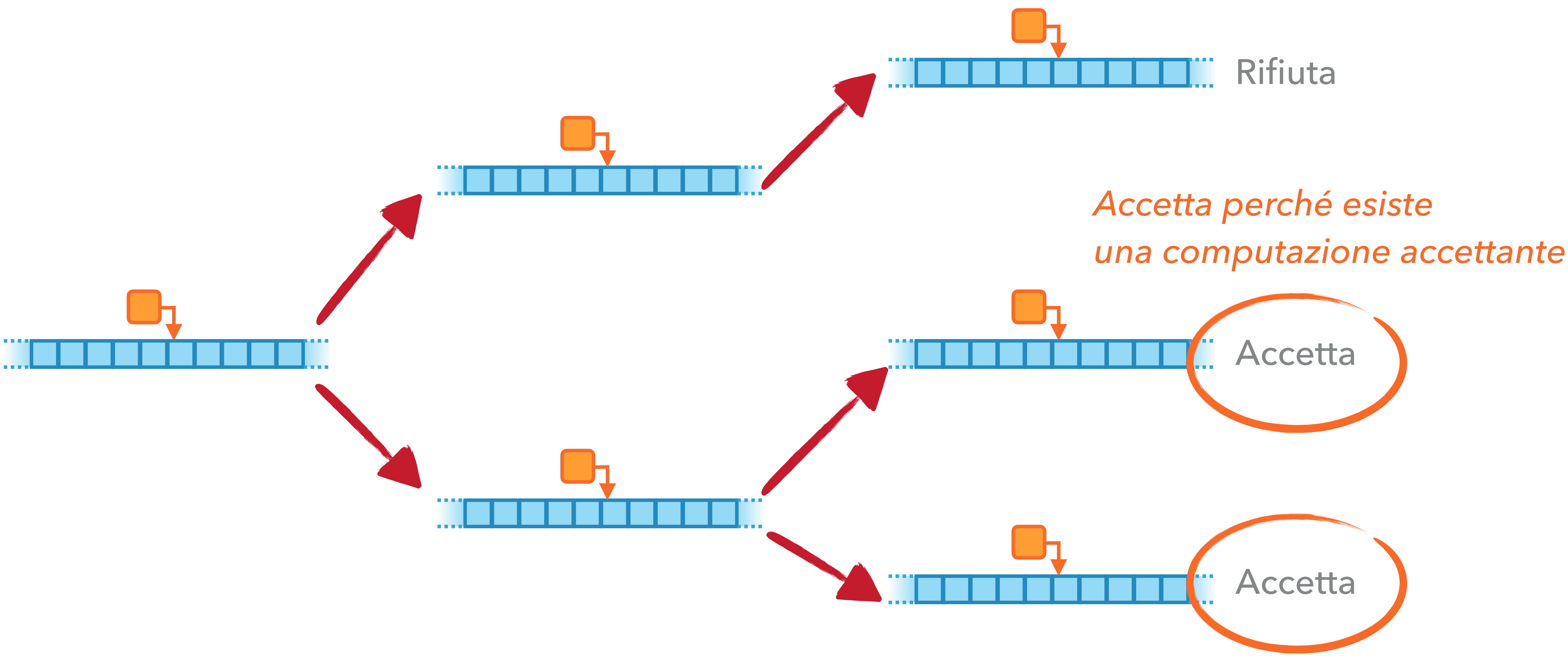
Albero di computazioni di una macchina non deterministica



Proviamo ad invertire il ruolo di stati accettanti e rifiutanti

COMPLEMENTAZIONE PER TM NON DETERMINISTICHE

Albero di computazioni di una macchina non deterministica



*Per rifiutare ci serve che **tutte** le computazioni siano rifiutanti!*

CO-NP

- Non è immediato che il complementare di un problema in NP sia anch'esso in NP
- La classe dei problemi complementari a quelli in NP è chiamata coNP
- Si ha $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{coNP}$, dato che quando complimentiamo i problemi in $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ riotteniamo la stessa classe di problemi
- Non è noto se $\mathrm{coNP} = \mathrm{NP}$

CO-NP

- Se $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ avremmo immediatamente $\mathrm{coNP} = \mathrm{NP} = \mathrm{P}$ dato che P è chiuso rispetto alla complementazione
- Se $\mathrm{coNP} \neq \mathrm{NP}$ avremmo immediatamente $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ perché non rispetteremmo la chiusura rispetto alla complementazione di P
- Ma potremmo avere $\mathrm{NP} = \mathrm{coNP}$ anche se $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$

CO-NP

- $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$, ma ci sono anche problemi che sappiamo essere in $\mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$ che non sappiamo essere in P:
  - **Fattorizzazione**: dati $x, a, b \in \mathbb{N}$ decidere se esiste un primo $p \in [a, b]$ che divide x
- Come NP, anche coNP ammette problemi completi
- Un esempio di problema coNP-completo:
  - **Tautology/validity**: Stabilire se una formula è una tautologia, ovvero tutti gli assegnamenti la soddisfano

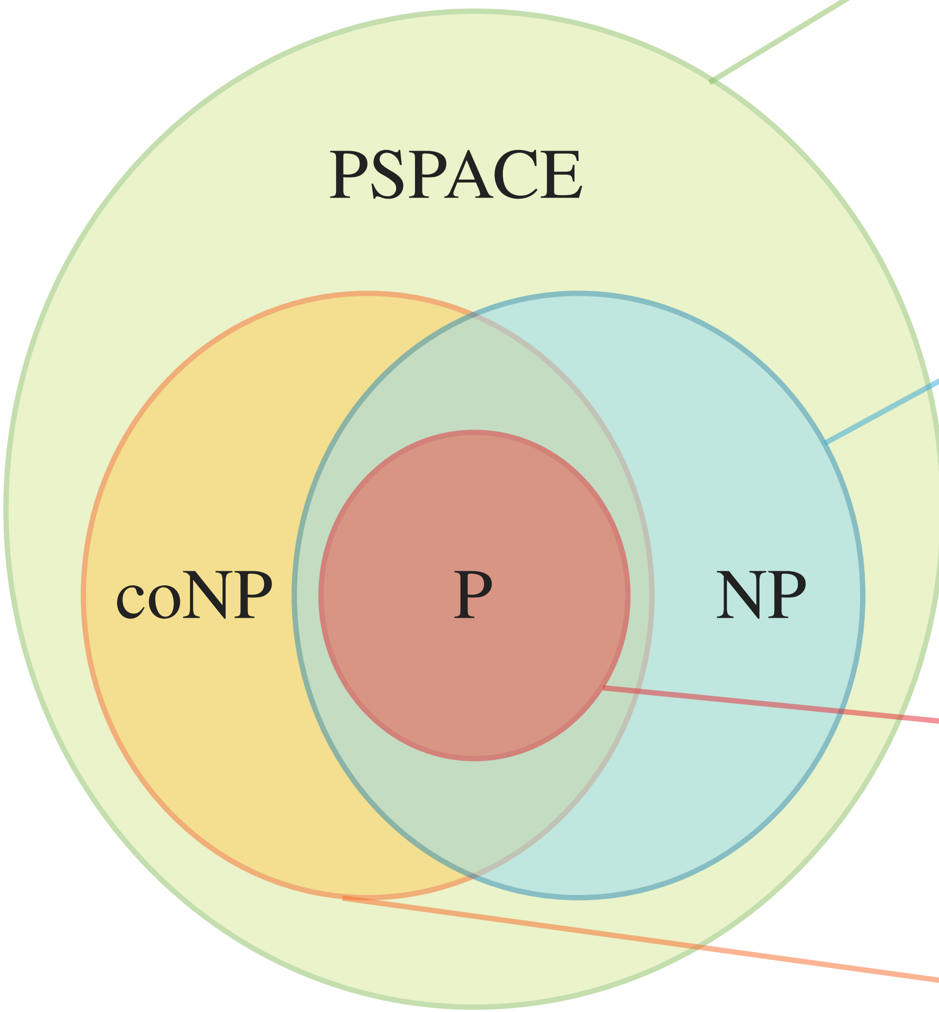
SPAZIO POLINOMIALE

- Abbiamo trattato quello che possiamo decidere in tempo polinomiale
- Studiamo ora cosa possiamo fare in spazio polinomiale
- Ricordate che abbiamo due classi PSPACE e $\mathrm{NPSPACE}$
- Mostriamo che $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$, quindi il non determinismo con un limite polinomiale di spazio non ci aiuta

TEOREMA DI SAVITCH

- Il teorema di Savitch, dimostrato nel 1970, lega spazio utilizzato da macchine deterministiche e non deterministiche
- Per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale per cui $f(n) \geq n$ si ha $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n)^2)$
- Questo mostra che $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$, dato che se $f(n)$ è un polinomio anche $f(n)^2$ è un polinomio

RIASSUNTO DELLE CLASSI DI PROBLEMI STUDIATE



Problemi risolvibili da TM deterministiche in spazio polinomiale

Problemi risolvibili da TM non deterministiche
in tempo polinomiale

Per nessuna di queste inclusioni
è noto se sia stretta o no

Problemi risolvibili da TM deterministiche
in tempo polinomiale

Complementari dei problemi in NP