OSSERVABILI (Variabili dinamiche)

In meccanica CLASSICA se conosco lo stato del sistema $(\bar{p}_0, \bar{q}_0)$ allora posso predire con certezza il risultato di una misura di un'osservabile $f(\bar{p}, \bar{q})$.

In meccanica QUANTISTICA, noto lo stato del sistema, posso predire solo la PROBABILITÀ di misurare un certo valore per l'osservabile.

Data una VARIABILE DINAMICA / OSSERVABILE essa deve essere descritta in MQ da un oggetto matematico che includa sia i possibili risultati di una misura di tale osservabile (autovalori), sia gli stati corrispondenti ai singoli risultati (autostati) (cioè gli stati in cui ho probab. 1 di misurare il risultato corrispondente).

Stati $\longleftrightarrow$ vettori in $\mathcal{H}$

Osservabili $\longleftrightarrow$ OPERATORI in $\mathcal{H}$
(lin. e autoaggiunti)

Operatori X e P in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$\langle x \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} x \, |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) \Big(\underbrace{x\,\psi(x)}_{(\hat{X}\psi)(x)} \Big) dx$$

$$\hat{X} : \psi(x) \mapsto x\,\psi(x)$$

$$= (\psi , \hat{X}\psi)$$

$$\langle P \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} p \, |\tilde{\psi}(p)|^2 dp \qquad \text{dove} \qquad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dx \, e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

$$= \text{"}(\psi , \hat{P}\psi)\text{"} \qquad \text{dove} \qquad \hat{P} : \tilde{\psi}(p) \mapsto p\,\tilde{\psi}(p)$$

$$\psi(x) \mapsto \; ?$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dp \, p \int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx'/\hbar} \psi(x')^* \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dp \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \, \psi(x')^* e^{ipx'/\hbar} \psi(x) \underbrace{p \, e^{-ipx/\hbar}}_{i\hbar \frac{d}{dx} e^{-ipx/\hbar}}$$

integraz. per parti

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dp \, \psi(x')^* e^{ipx'/\hbar} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) e^{-ipx/\hbar}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dx' \, \psi(x')^* \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) \right) \underbrace{\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip(x'-x)/\hbar}}_{\delta(x-x')}$$

$$\int \delta(y) f(y) dy = f(0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \ \psi(x)^* \Big(\underbrace{-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)}_{(\hat{P}\psi)(x)} \Big)$$

$\hat{P} : \psi(x) \longmapsto -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)$

$$= (\psi, \hat{P}\psi)$$

Data un' osservabile A ($\hat{A}$ è op. lineare autoaggiunto in $L^2(\mathbb{R})$) il suo valor medio è

$$\langle A \rangle_\psi = (\psi, \hat{A}\psi)$$

($\hat{X}$ e $\hat{P}$ sono operatori autoaggiunti)

Osservabile classico è una funzione di $\bar{p}$ e $\bar{q}$ (p e x)

$\rightsquigarrow$ $f(x, p)$

Domanda: in MQ $f \to f(\hat{X}, \hat{P})$?

Sì, ma con attenzione

↳ ES. se l'osservabile è $f(x,p) = xp$, l'op. associato è $\hat{X}\hat{P}$ o $\hat{P}\hat{X}$?

$\rightsquigarrow$ ambiguità nell'associazione un op. a una variabile dinamica classica.

In effetti $\hat{X}$ e $\hat{P}$ NON COMMUTANO

$$[\hat{X}, \hat{P}] \cdot \psi = (\hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X}) \cdot \psi =$$

$\forall \psi$

$$= \hat{X}\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)\right) - \hat{P}\left(x\psi(x)\right) =$$

$$= -i\hbar\, x \frac{d}{dx}\psi(x) + i\hbar \frac{d}{dx}\Big(x\,\psi(x)\Big) =$$

$$= -i\hbar\, \cancel{x \frac{d\psi(x)}{dx}} + i\hbar\,\psi(x) + \cancel{i\hbar\, x \frac{d}{dx}\psi(x)} = i\hbar\, \mathbb{1}\cdot\psi$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\, \mathbb{1}$$

1 grado di lib.

In 3d $\quad \psi(\bar{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3) \qquad \tilde{\psi}(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x\, e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}/\hbar}\, \psi(\bar{x})$

$$\bar{x} = (\overset{x}{x_1}, \overset{y}{x_2}, \overset{z}{x_3})$$

$$(\hat{\bar{X}}\psi)(\bar{x}) = \bar{x}\,\psi(\bar{x}) \qquad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}\,\mathbb{1}$$

$$(\hat{\bar{P}}\psi)(\bar{x}) = -i\hbar\,\bar{\nabla}\psi(\bar{x}) \qquad [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 \quad [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$$

→ Analogia con le parentesi di Poisson $\quad (x_i \leftrightarrow q_i)$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \{x_i, x_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0$$

"Quantizzazione" : $\bar{x}, \bar{p}$ sostituiti da op. in $\mathcal{H}$

e Parentesi di Poisson $\{\,,\}$ sost. da $\frac{1}{i\hbar}[\,,\,]$

In meccanica classica

$$\delta x = \epsilon \{x, G\} \qquad \text{trasf. infinitesima}$$

Se uso $G = P$

$$\delta x = \epsilon\{x, p\} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad x' = x + \epsilon$$

$\Rightarrow$ p è il generatore delle TRASLAZIONI

$p \to \hat{p}$

$\hat{p}$ è anche il generatore delle traslazioni in MQ:

$$\psi'(x) = \psi(x-\epsilon) = \psi(x) - \epsilon \frac{d\psi}{dx}(x) + \cancel{\ldots}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\psi = -\epsilon \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{\epsilon}{i\hbar}(\hat{p}\psi)(x)$$

Facendo la stessa cosa con $\hat{M}_i$ (mom. ang.) ottengo che la variaz. di ψ sotto $\underset{\substack{\text{attorno} \\ \text{a asse } x_i}}{\text{rotaz.}}$ è $\delta\psi = \frac{\epsilon}{i\hbar}\hat{M}_i\psi$.

Esempi di osservabili con analogo classico (senza ambiguità)

1) MOMENTO ANGOLARE

$$M_i = \sum_{k,j} \underset{\substack{\uparrow \\ j\neq k}}{\epsilon_{ijk}}\, x_j p_k \longleftrightarrow \hat{M}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\, \hat{X}_j \hat{P}_k$$

e $[\hat{X}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\,\underline{\delta_{jk}}$

2) HAMILTONIANA per sist. meccanici con forze prov. posizionali

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V(\bar{x}) \longleftrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{\bar{P}}^2}{2m} + V(\hat{\bar{x}})$$

Eq. di Schrödinger $\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2 + V(\bar{x})\right)\psi(\bar{x},t)}_{\hat{H}\psi(\bar{x},t)} = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}(\bar{x},t)$

$\hat{P} = -i\hbar\bar{\nabla}$

↳ $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\bar x,t) = \hat H \psi(\bar x,t)$ ← $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hat H}{i\hbar}\psi$

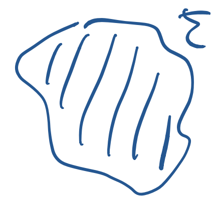
$\hat H$ è il gen. di trasl. temporali infinitesime

$\hat H, \hat P, \hat M$ generano (in MQ) le stesse trasf. che generavano in MC.

Consideriamo una particella di massa m che si muove in $\mathbb{R}^3$
→ il suo stato è descritto da una funz. d'onda (normalizzata) $\psi(\bar x,t)$ che soddisfa l'eq. di Sch.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\bar x,t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\bar\nabla^2 + V(\bar x)\right)\psi(\bar x,t)$$

Calcoliamo la variazione nel tempo della probabilità di trovare la particella in Σ :



$$P_\Sigma(t) = \int_\Sigma d^3x \, |\psi(\bar x,t)|^2$$

$$\frac{d}{dt}P_\Sigma(t) = \frac{d}{dt}\int_\Sigma d^3x \, \psi^*(\bar x,t)\,\psi(\bar x,t) = \int_\Sigma d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\cdot\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

Usiamo eq. di Schr.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\bar\nabla^2 + V\right)\psi$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\bar\nabla^2 + V\right)\psi^*$$

V è a valori reali

$$= \int_\Sigma d^3x \left[-\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\bar\nabla^2\psi^* + \cancel{V\psi^*}\right)\psi + \frac{1}{i\hbar}\psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\bar\nabla^2\psi + \cancel{V\psi}\right)\right]$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\int_\Sigma d^3x \left\{ \underbrace{\bar\nabla^2\psi^*\cdot\psi}_{\nabla\cdot[(\nabla\psi^*)\psi] - \cancel{\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi}} - \overbrace{\psi^*\bar\nabla^2\psi}^{\nabla\cdot[\psi^*\nabla\psi] - \cancel{\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi}} \right\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\int_\Sigma d^3x\; \bar\nabla\cdot\left[(\bar\nabla\psi^*)\psi - \psi^*\bar\nabla\psi\right]$$

definisco $\bar J(\bar x,t) \equiv \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\bar\nabla\psi - \psi\bar\nabla\psi^*\right] =$

CORRENTE DI PROBABILITA'

$$= \frac{1}{2m}\left[\psi^*(\hat{\bar P}\psi) + \psi(\hat{\bar P}\psi)^*\right]$$

$$\frac{d}{dt}P_\Sigma(t) = -\int_\Sigma d^3x\; \bar\nabla\cdot\bar J(\bar x,t) = -\int_{\partial\Sigma} d\Sigma\; \bar n\cdot\bar J$$

EQ. di CONTINUITA'

Flusso del vett. $\bar J$ attraverso il bordo di Σ

$$\int d^3x\, J_i(\bar x,t) = \frac{1}{2m}\int d^3x\left(\psi^*\hat P_i\psi + \psi(\hat P_i\psi)^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[(\psi,\hat P_i\psi) + (\hat P_i\psi,\psi)\right] \qquad = (\psi,\hat P_i\psi)$$

$\hat P_i$ è op. autoagg.

$$= \left(\psi, \frac{P_i}{m}\psi\right) = \left\langle \frac{P_i}{m}\right\rangle = \langle v_i\rangle$$

l'eq. di continuità dice che la probabilità che "esce" attraverso la superficie $\partial\Sigma$ è uguale alla diminuzione della probab. di trovare la particella in Σ

("probab. si conserva")