ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

[PS.11.1, S.28.1-2, W.19.1-2]

Una simmetria è una trasformazione dei campi e/o delle coordinate, che lascia invariata l'azione $S[\varphi]$ e la misura $\mathcal{D}\varphi$

Una simmetria è ROTTA ESPLICITAMENTE se un termine dell'azione (o la misura) non è invariante. Questo concetto è particolarmente utile se il termine che rompe la simmetria è PICCOLO, per esempio proporzionale ad un accoppiamento $\varepsilon \ll 1$ o una scala d'energia piccola rispetto alla scala rilevante, $m \ll E$.

Esempio:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4}_{\text{Invariante sotto } \mathbb{Z}_2:\ \varphi \to -\varphi} + \underbrace{\varepsilon\,\varphi^3}_{\text{rompe } \mathbb{Z}_2}$$

Dato che la simmetria $\mathbb{Z}_2$ è RIPRISTINATA per $\varepsilon \to 0$, possiamo essere sicuri che tutte le funzioni di Green dispari sotto $\mathbb{Z}_2$ DEVONO essere proporzionali ad ε.

Può anche succedere che la teoria ha una certa simmetria (S e $D\varphi$ invarianti) ma lo STATO DI VUOTO NON È INVARIANTE.

In questo caso la simmetria è

ROTTA SPONTANEAMENTE.

In questo caso la simmetria è ancora presente ma è nascosta: la sua realizzazione diventa non-lineare.

Esempio:

Prendiamo la teoria $\lambda\varphi^4$ ma con $\boxed{m^2 = -\mu^2 < 0}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

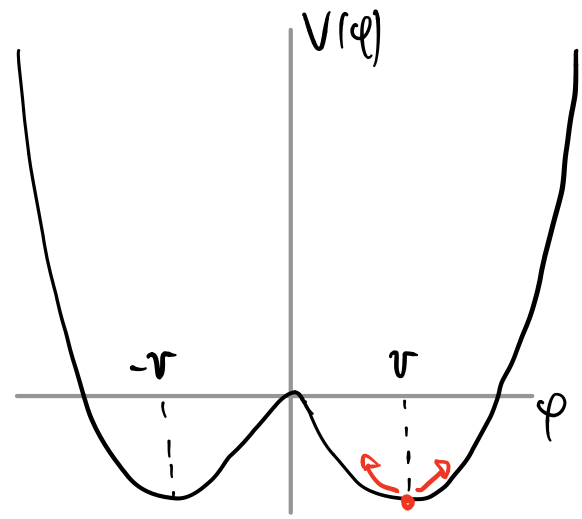
Invariante sotto $\mathbb{Z}_2$: $\varphi \to -\varphi$

Il POTENZIALE CLASSICO è dato da

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

Minimizzato per

$$\varphi_0 \equiv \pm v = \pm\sqrt{\frac{6\mu^2}{\lambda}}$$



Queste sono le configurazioni classiche del vuoto:

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \lim_{\hbar\to 0}\int \mathcal{D}\varphi\, e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, \mathcal{L}[\varphi]}\, \varphi = \varphi_0 = \pm v \leftarrow \left.\frac{d\mathcal{L}}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pm v} = 0$$

VALORE D'ASPETTAZIONE NEL VUOTO

(A livello quantistico, ovvero loop, può ricevere correzioni)

Uno qualsiasi di questi vuoti NON È invariante sotto $\mathbb{Z}_2$: $\langle\varphi\rangle \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \langle\varphi'\rangle = -\langle\varphi\rangle \neq \langle\varphi\rangle$

La simmetria è nel fatto che i 2 minimi a $\pm v$ sono simmetrici.

Possiamo descrivere fluttuazioni attorno alla configurazione di vuoto. Per esempio prendiamo $\varphi_0 = v$

$$\varphi(x) = v + \sigma(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda\mu^2}{6}}\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4$$

Descrive un campo di massa $2\mu^2$ e interazioni σ^3, σ^4.
La simmetria $\varphi \to -\varphi$ è nascosta ma mette in relazione questi 3 coefficienti.

In termini di $\sigma(x)$, $\mathbb{Z}_2$ è realizzata in maniera NON-LINEARE:

$$\varphi(x) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -\varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(x) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -\sigma(x) - 2v$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

Sappiamo che in meccanica quantistica il vuoto può essere la sovrapposizione di due stati,

$$|0\rangle = \alpha|0_+\rangle + \beta|0_-\rangle .$$

Se il vuoto fosse una configurazione simmetrica $|0_+\rangle + |0_-\rangle$ la simmetria non sarebbe rotta spontaneamente.

La simmetria sotto $\varphi \to -\varphi$ $(|0_\pm\rangle \leftrightarrow |0_\mp\rangle)$ fissa

$$\left.\begin{aligned} \langle 0_+|\hat{H}|0_+\rangle &= \langle 0_-|\hat{H}|0_-\rangle \equiv a \in \mathbb{R} \\ \langle 0_+|\hat{H}|0_-\rangle &= \langle 0_-|\hat{H}|0_+\rangle \equiv b \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad E_{vac} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gli autostati di $\hat{H}$ sono $|0_+\rangle \pm |0_-\rangle$ con autovalori $E_\pm = a \pm b$.

$\Rightarrow$ La sovrapposizione tra i due stati involve un integrale su configurazioni di campo che passano la barriera da $\varphi = v$ a $\varphi = -v$, soppresso da un fattore $\sim \exp(-C\, V)$, $C > 0$ e V: volume spazio-tempo.

$\Rightarrow$ Per $V \to \infty$ $b \to 0$ ed i 2 vuoti $|0_+\rangle \pm |0_-\rangle$ <u>sono praticamente degeneri</u>.

Una qualsiasi perturbazione, piccola a piacere, che preferisce uno dei due vuoti,

$$\langle 0_+|\delta\hat{H}|0_+\rangle \neq \langle 0_-|\delta\hat{H}|0_-\rangle,$$

Modificherà $\quad C_{ab} \to \begin{pmatrix} a+\delta H_+ & b \\ b & a+\delta H_- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a+\delta H_+ & 0 \\ 0 & a+\delta H_- \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ lo stato di vuoto COLLASSERÀ in

$|0_+\rangle$ o $|0_-\rangle$

Il fatto che $b \to 0$ per $V \to \infty$ può essere dimostrato [vedi W. 19.1]

La simmetria Z_2 non è continua, quindi non c'è un'identità di Ward-Takahashi, corrente e carica conservante, eccetera. Studiamo una SIMMETRIA CONTINUA.

MODELLO SIGMA LINEARE

Campo scalare COMPLESSO: $\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{\sqrt{2}}$

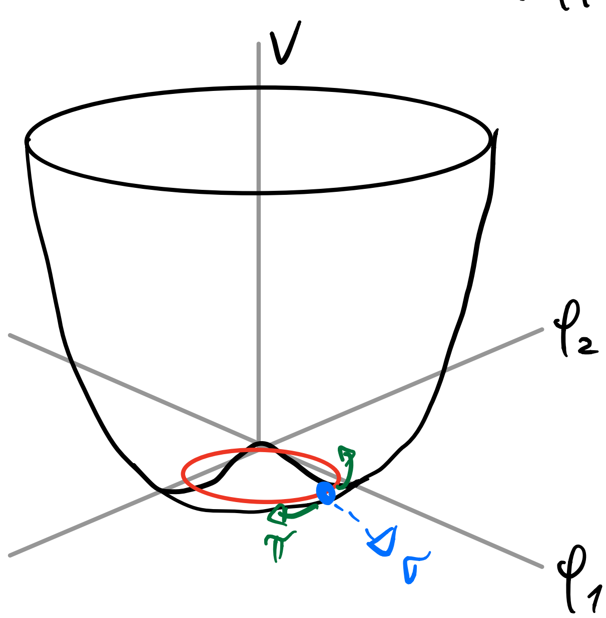
$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi) + \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \frac{\lambda}{4}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \quad , \quad \mu^2 > 0$$

$\mathcal{L}$ ha una simmetria $U(1)$: $\varphi(x) \to e^{i\alpha}\varphi(x)$.

Il potenziale classico $V(\varphi) = -\mu^2\varphi^\dagger\varphi + \frac{\lambda}{4}(\varphi^\dagger\varphi)^2$ è instabile a $\varphi = 0$ ma ha è minimizzato

per $\varphi^\dagger\varphi = \frac{2\mu^2}{\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}$

$\Rightarrow$ Adesso c'è un numero infinito di vuoti, che possiamo descrivere come



$$\langle 0_\vartheta | \varphi | 0_\vartheta \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\vartheta} \quad , \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}$$

Per simmetria, tutti i vuoti sono equivalenti.
È conveniente scegliere $\theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\langle 0|\varphi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}}$$

Descriviamo le fluttuazioni attorno al vuoto in coordinate POLARI:

costante arbitraria

$$\varphi(x) \equiv \frac{v + \sigma(x)}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi(x)}{f}} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^*\varphi = \frac{(v+\sigma)^2}{2}$$

$\Rightarrow$ $V(\varphi)$ dipende solo da $\sigma(x)$.

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 \frac{1}{f^2}(v+\sigma)^2$$

$$\underbrace{- \left(-\frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\,\mu\,\sigma^3 + \frac{1}{16}\lambda\sigma^4\right)}_{-V(\sigma)}$$

Scegliendo $f = v$ il termine cinetico di $\pi(x)$ è normalizzato canonicamente.

Il campo $\pi(x)$ è a MASSA NULLA ed è il Bosone di Goldstone di questa teoria.

Partendo da $\varphi(x)$ complesso (2 gradi di libertà) ora abbiamo:

$\sigma(x)$ - eccitazione radiale - $m_\sigma^2 = 2\mu^2$

$\pi(x)$ - " angolare $\Rightarrow$ bosone di Goldstone $m_\pi = 0$.

La simmetria $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$ adesso è realizzata <u>non-linearmente</u> come

$$\boxed{\begin{aligned} \pi(x) &\to \pi(x) + f\alpha \\ \sigma(x) &\to \sigma(x) \end{aligned}}$$

La presenza di un bosone di Goldstone a massa nulla è una conseguenza diretta e generale della rottura spontanea della simmetria continua.

TEOREMA DI GOLDSTONE

> Ad ogni rottura spontanea di una simmetria continua globale, corrisponde una particella scalare a massa nulla.

- "Ad ogni" : per ciascun generatore (indipendente) del gruppo di simmetria.
- "rottura spontanea" : $\mathcal{L}$ è invariante ma il vuoto $|0\rangle$ non lo è.
- "simm. globale continua" : la simmetria deve essere descritta da un parametro costante (globale) e continuo, esempio : $e^{i\alpha}$, $\alpha = \text{const}$.

La particella a massa nulla che ne segue è il **bosone di Goldstone**.

Anche in una teoria che pare non avere scalari, come la QCD, se c'è una rottura spontanea di simmetria sappiamo che devono esserci dei scalari leggeri nello spettro. In QCD abbiamo la rottura della simm. chirale $\Rightarrow$ i PIONI sono i Goldstone.

PARENTESI SUL POTENZIALE EFFETTIVO

L'azione effettiva $\Gamma(\Phi) = W[J] - \int d^4x\, \Phi(x)\, J(x)$,

con $\Phi(J) = \frac{\delta W}{\delta J}$ e $J = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi}$,

è il funzionale generatore dei diagrammi 1PI.

Nota che

$$\Phi(J) = \frac{\langle 0|\varphi(x)|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle_J} = -\frac{i}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] = \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J]$$

$\Gamma(\Phi)$ è l'estensione dell'azione includendo tutte le correzioni quantistiche.

CLASSICAMENTE: $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0 \rightarrow$ soluzioni di campo classiche

Mettendo a zero la corrente esterna

$$\left.\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi}\right|_{J=0} = 0 \Rightarrow$$

Le soluzioni sono

$$\Phi(J=0) = \frac{\langle 0|\varphi(x)|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} \equiv \varphi_{cl}(x).$$

Rappresentano le configurazioni del vuoto quantistico.

Affinché il vuoto sia invariante sotto traslazioni cerchiamo soluzioni $\varphi_{cl} = \text{const.}$

$$\Rightarrow \Gamma[\varphi_{cl} = \text{const}] = -(VT)\, V_{eff}(\varphi_{cl})$$

POTENZIALE EFFETTIVO

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_{cl}} = 0 \iff \boxed{\frac{\partial}{\partial \varphi_{cl}} V_{eff}(\varphi_{cl}) = 0}$$

La configurazione del vuoto quantistico è data dal minimo del potenziale effettivo.

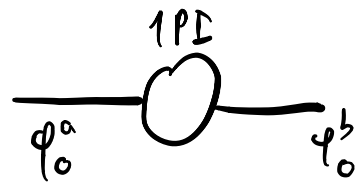
DIMOSTRAZIONE - POTENZIALE EFFETTIVO

Supponiamo di avere N campi $\varphi^a(x)$

Il minimo di V_{eff} è per φ_0^a :
$$\frac{\partial}{\partial \varphi^a} V_{eff} \Big|_{\varphi^a(x) = \varphi_0^a} = 0$$

Espandendo V_{eff} attorno al minimo:
[Per semplicità chiamo $V_{eff} \equiv V$]

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2} (\varphi^a - \varphi_0^a)(\varphi^b - \varphi_0^b) \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} V \right)_{\varphi_0} + \dots$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} V \right)_{\varphi_0} \equiv -$$  $$= -G^{-1}_{ab}(0) \equiv m^2_{ab}$$

inverso del propagatore

- è una matrice simmetrica
- gli autovalori sono le masse dei campi scalari

Una trasformazione infinitesima corrispondente ad una simmetria ha la forma

$$\varphi^a \to \varphi^a + \alpha \Delta^a(\varphi) \qquad , \qquad \alpha \ll 1$$

Essendo una simmetria, l'azione effettiva $\Gamma(\varphi)$ è invariante e quindi, per campi costanti, anche V_{eff} è invariante:

$$V(\varphi^a) = V(\varphi^a + \alpha\Delta^a(\varphi)) = V(\varphi^a) + \alpha\,\Delta^a(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi^a}V(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta^a(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi^a}V(\varphi) = 0$$

Derivando per φ^b e mettendo $\varphi = \varphi_0$ abbiamo:

$$0 = \left(\frac{\partial\Delta^a}{\partial\varphi^b}\right)_{\varphi_0}\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi^a}\right)_{\varphi_0}}_{=0} + \Delta^a(\varphi_0)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^a\partial\varphi^b}\right)_{\varphi_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta^a(\varphi_0)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^a\partial\varphi^b}\right)_{\varphi_0} = 0}$$

- Se il vuoto è invariante: $\varphi_0^a \to \varphi_0^a + \alpha\Delta^a(\varphi_0) \equiv \varphi_0^a$

  $\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0) = 0$ e la relazione è soddisfatta $\forall\, m^2_{ab}$.

- <u>Se il vuoto non è invariante</u> allora $\Delta^a(\varphi_0) \neq 0$

  $\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0)\, m^2_{ab} = 0$

  $\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0)$ è l'autovettore con autovalore di massa zero, ovvero il bosone di Goldstone.

DIMOSTRAZIONE - CARICHE CONSERVATE

Simmetria continua globale $\Rightarrow$ corrente di Nöther J^μ

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\Delta(\alpha)} \varphi_n^{(\alpha)}(x) \overset{\text{esempio}}{=} \varphi_n(x) + i\alpha \underbrace{T_{nm}}_{\text{generatore della simm.}} \varphi_m(x)$$

J^μ conservata sulle eq. del moto $\partial_\mu J^\mu = 0$.

La carica $Q = \int d^3x \, J_0(x) = \int d^3x \sum_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi_m} \frac{\delta \varphi_m}{\delta \alpha}$

è un operatore (II^a quantizzazione)

$\pi_m \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot\varphi_m}$ e $[\varphi_n(\vec x), \pi_m(\vec y)] = i\delta^3(\vec x - \vec y)\delta_{nm}$

$$\Rightarrow [Q, \varphi_n(\vec y)] = \sum_m \int d^3x [\pi_m(\vec x), \varphi_n(\vec x)] \frac{\delta \varphi_m(\vec x)}{\delta \alpha} = -i \underbrace{\frac{\delta \varphi_n(\vec y)}{\delta \alpha}}_{= T_{nm}\varphi_m(\vec y)}$$

Ovvero Q è il generatore della trasformazione di simmetria.

Dato che Q è conservata $[Q, H] = i\partial_t Q = 0$.

La simmetria è rotta spontaneamente se

$Q|0\rangle \neq 0 \Rightarrow$ il vuoto non è invariante.

Se il vuoto ha energia E_0, $H|0\rangle = E_0|0\rangle$

$$HQ|0\rangle = \overset{=0}{[H,Q]}|0\rangle + QH|0\rangle = E_0 Q|0\rangle$$

$\Rightarrow Q|0\rangle$ è degenere con $|0\rangle$.

Possiamo sempre creare degli stati di momento $\vec{p}$ a partire dal vuoto, con J_0:

$$|\pi(\vec{p})\rangle \equiv \frac{-2i}{f} \int d^3x \; e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \, J_0(x) |0\rangle$$

Avranno in generale energia $E(\vec{p}) + E_0$.

$|\pi(0)\rangle = \frac{-2i}{f} Q|0\rangle$ è proporzionale a $Q|0\rangle$ che è degenere con $|0\rangle$

$\Downarrow$

ha energia E_0

$\Rightarrow E(\vec{p}) \to 0$ per $\vec{p} \to 0$,

quindi $E(\vec{p})$ soddisfa la relazione di dispersione di uno stato a massa nulla.

$\Rightarrow |\pi\rangle$ ha massa nulla $\Rightarrow$ bosone di Goldstone.

MECCANISMO DI HIGGS

Riprendiamo la teoria del campo scalare complesso $\varphi(x)$, invariante sotto $\varphi(x) \to e^{i\alpha} \varphi(x)$, $\alpha \sim$ const, ed accoppiamo φ ad un fotone A_μ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - m^2 |\varphi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\varphi|^4$$

dove $\quad D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ie A_\mu \varphi$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \text{ è invariante sotto } \begin{cases} \varphi(x) \to e^{i\alpha(x)} \varphi(x) \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

Per $m^2 = -\mu^2 < 0$, come prima, la componente globale della simmetria $U(1)$ è rotta spontaneamente:

$$|\langle \varphi \rangle| = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}$$

Definiamo come prima $\quad \varphi(x) = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \, e^{i\frac{\pi(x)}{v}}$

La Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2\left(A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu\tilde{\pi}\right)\left(A^\mu + \frac{1}{ev}\partial^\mu\tilde{\pi}\right)\left(1+\frac{h}{v}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \left(-\frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{1}{2}(2\mu^2)h^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\mu h^3 + \frac{\lambda}{16}h^4\right)$$

- Dal termine $\mathcal{L} \supset \frac{1}{2}e^2v^2 A_\mu A^\mu$ sembra che il fotone abbia preso una massa, ma c'è un mescolamento con $\partial_\mu \pi$
- $\pi(x)$ non ha un termine di massa
- $m_h^2 = 2\mu^2 = \frac{\lambda v^2}{2}$ $\leftarrow$ massa del bosone di Higgs.

Sotto una trasformazione di gauge

$$\begin{cases} A_\mu \to A_\mu' = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \\ \pi \to \pi' = \pi + v\alpha \\ h \to h \end{cases}$$

GAUGE UNITARIA per $\alpha = -\frac{\pi(x)}{v}$ $\Rightarrow$ $\pi'(x) = 0$

$A'(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{ev}\partial_\mu\pi(x)$

Chiamando $A' \equiv A$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - V(h)$$

- Bosone massivo $m_A^2 = e^2v^2$
- Scalare massivo di Higgs : $m_h^2 = \frac{1}{2}\lambda v^2$

Un bosone massivo ha 3 gradi di libertà, le 2 polarizzazioni trasverse + 1 longitudinale.
Queste corrispondono alle 2 trasverse del fotone massless ed una del bosone di Goldstone π.

$\Rightarrow$ Il bosone di gauge ha "mangiato" il bosone di Goldstone, diventando la sua polarizzazione longitudinale.

MASSE DEI FERMIONI CHIRALI

Prendiamo una teoria di gauge tipo QCD in cui le componenti left e right del fermione hanno carica diversa [vedi nota]

$$\psi_L = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \quad : \quad Q_L = -1$$

$$\psi_R = \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \quad : \quad Q_R = 0$$

$$\mathcal{L}_{ferm,\,cinetico} = \bar{\psi}_L i \not{D} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R$$

$$D_\mu \psi_L = \partial_\mu \psi_L + ieQ_L A_\mu \psi_L$$

Dato che il termine di massa

$$\mathcal{L} \supset -m\left(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L\right)$$ è vietato dalla simmetria

come facciamo a dare massa al fermione?

⇒ Aggiungiamo un campo scalare complesso con massa negativa, come nel modello di Higgs.

$$\varphi(x), \quad Q = +1$$

$$\Rightarrow \quad |\langle \varphi \rangle| = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}$$

Ora possiamo scrivere un termine di Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y\,\varphi^* \bar{\psi}_L \psi_R - y\,\varphi\, \bar{\psi}_R \psi_L \quad , \quad y > 0$$

$$= -\underbrace{\frac{yv}{\sqrt{2}}}_{m_\psi}\underbrace{\left(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L\right)}_{\bar{\psi}\psi}\left(1 + \frac{h(x)}{v}\right) \quad \leftarrow$$ Nella gauge unitaria $(\pi(x) = 0)$

⇒ La massa del fermione è data da $m_\psi = \frac{yv}{\sqrt{2}}$

L'interazione con l'Higgs è  $= -\frac{y}{\sqrt{2}}$

(*) <u>Nota</u>: teorie come questa, in cui i fermioni left- e right-handed hanno carica $U(1)$ diversa possono essere inconsistenti a causa dell'<u>ANOMALIA DI GAUGE</u>. Questo caso infatti soffre di questo e va preso solamente come un esempio illustrativo per la Lagrangiana di Yukawa. Nel Modello Standard le anomalie di gauge si cancellano grazie alla presenza di quark e leptoni con specifiche cariche $U(1)$.