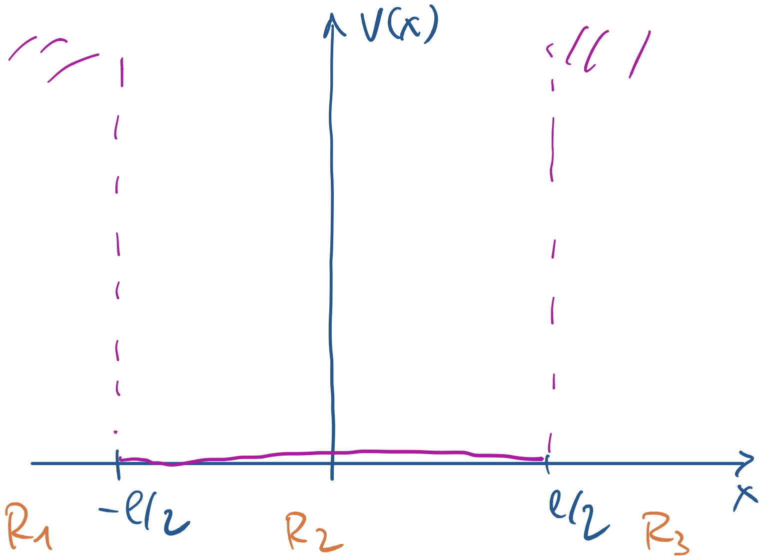
# BUCA RETTANGOLARE INFINITA




$\left.\begin{array}{l} V_1, V_3 \to \infty \\ V_2 = 0 \end{array}\right\}$ V ha disc. INFINITE nei due pti $x_1 = -\ell/2$, $x_2 = \ell/2$

$\downarrow$

$\psi_E$ dovranno essere continue in $x_1$ e $x_2$ (ma non abbiamo condiz. su $\psi_E'$)

$$\psi_E'' = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\psi_E \qquad (\star)$$

$R_1, R_3$) $\psi_E$ dev'essere limitata all'infinito e anche $\psi_E''$

$$\xRightarrow{(\star)} \quad \psi_E^{(1/3)}(x) = 0 \qquad x \in R_1, R_3$$

$R_2$) $\quad \psi_E'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_E \qquad p_2 = \sqrt{2mE}$

$$\rightarrow \quad \psi_E^{(2)}(x) = c_2^+ e^{i p_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-i p_2 x/\hbar}$$

Condiz. di raccordo

$$\begin{array}{l} \psi_E^{(2)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(1)}\left(-\frac{\ell}{2}\right) \\ \psi_E^{(2)}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_E^{(3)}\left(\frac{\ell}{2}\right) \end{array} \rightarrow \begin{cases} c_2^+ e^{-i p_2 \ell/2\hbar} + c_2^- e^{i p_2 \ell/2\hbar} = 0 \\ c_2^+ e^{i p_2 \ell/2\hbar} + c_2^- e^{-i p_2 \ell/2\hbar} = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

2 eq. lin. in 2 incognite
OMOGENEE

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2 \ell/2\hbar} & e^{ip_2\ell/2\hbar} \\ e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0$$

Ha sol. non-triv. solo se $\det = 0$, cioè se

$$\det = e^{-ip_2\ell/\hbar} - e^{ip_2\ell/\hbar} = 0$$

$$\Rightarrow e^{2ip_2\ell/\hbar} = 1 \Rightarrow \frac{2p_2\ell}{\hbar} = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \frac{p_2\ell}{\hbar} = n\pi$$ ← Condizione sull'ENERGIA ($p_2^2 = 2mE$)

$$\rightarrow \frac{2mE\ell^2}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\ell^2} \quad n \in \mathbb{Z}^* \downarrow n \in \mathbb{N}^*$$

possibili valori dell'energia

$$\frac{p_2\ell}{\hbar} = n\pi \Rightarrow e^{ip_2\ell/\hbar} = e^{i\pi n} = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-ip_2\ell/2\hbar} & e^{ip_2\ell/2\hbar} \\ e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0$$

$$\left| \, e^{\frac{ip_2\ell}{\hbar}} = e^{i\pi n} \right.$$

$$e^{i\pi n/2}\begin{pmatrix} e^{-i\pi n/2} & e^{i\pi n/2} \\ e^{i\pi n/2} & e^{-i\pi n/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi n} \\ \cancel{e^{i\pi n}} & \cancel{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_2^+ + e^{i\pi n} c_2^- = 0$$

$$c_2^+ + (-1)^n c_2^- = 0$$

$n$ pari $\quad c_2^- = -c_2^+ \quad n = 2K$

$$\psi_E^{(2)}(x) = c_2^+ \left( e^{ip_2x/\hbar} - e^{-ip_2x/\hbar} \right) =$$

$$= 2i\, c_2^+ \,\text{sen}\left(\frac{p_2 x}{\hbar}\right) = 2i c_2^+ \,\text{sen}\left(\frac{2k\pi x}{e}\right) \quad k \neq 0$$

DISPARI in $x \to -x$

$n$ dispari $\quad c_2^- = c_2^+ \quad n = 2k+1$

$$\psi_E^{(2)}(x) = c_2^+ \left( e^{ip_2x/\hbar} + e^{-ip_2x/\hbar} \right) =$$

$$= 2c_2^+ \cos\left(\frac{p_2 x}{\hbar}\right) = 2c_2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{e}\right)$$

PARI in $x \to -x$

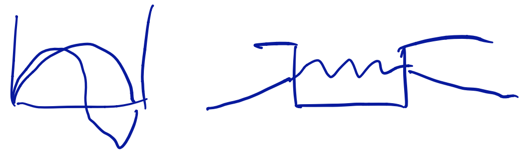
problema 1d

Lo spettro dell'ENERGIA $(\hat{H})$ è DISCRETO :

- per ogni valore $E_n$ dell'en. trovo UNA SOLA AUTOFUNZ.

(livelli energetici sono NON-DEGENERI)

- le autofunzioni $\in L^2(\mathbb{R})$ → possono rappresentare stati del sistema



- le autofunzioni sono REALI (a meno di un fattore complesso cost.)

- le autofunzioni hanno PARITÀ DEFINITA ($V(-x)=V(x)$)

↳ Queste sono proprietà generiche per problemi UNIDIMENSIONALI con spettro discreto.

- Lo spettro è limitato inferiormente ($V(x)\geq 0 \to E\geq 0$)

  → ∃ valore minimo dell'energia ← STATO FONDAMENTALE

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$$

↓

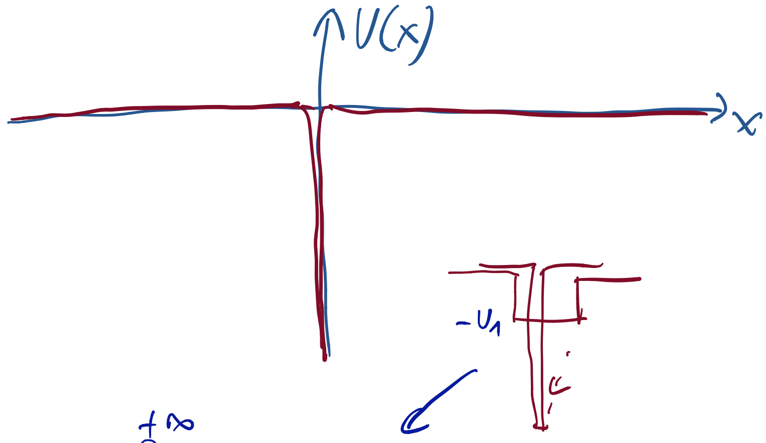
la particella non può avere energia nulla

↳ qto si può ricavare dal principio di indet. di Heisenberg $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$$\Delta x_{MAX} = l \Rightarrow \Delta p_{MIN} = \frac{\hbar}{2l} \rightsquigarrow E = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2}{4ml^2}$$

# POTENZIALE A DELTA DI DIRAC

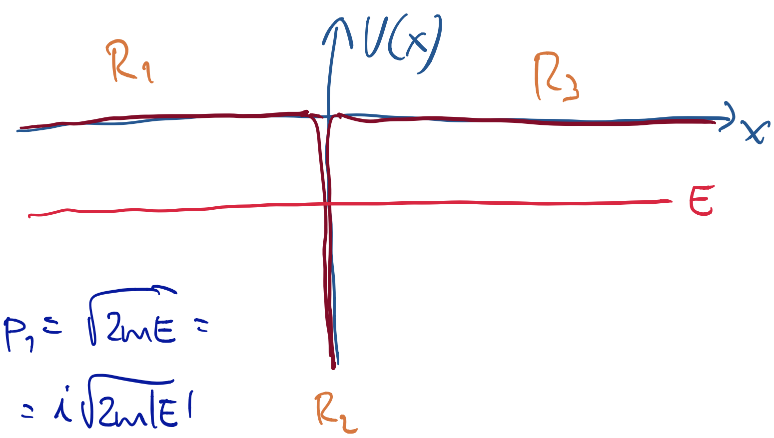
$$V(x) = -\alpha\,\delta(x) \qquad \alpha > 0$$

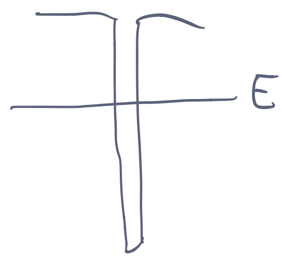




$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\,dx = -\ell U_1$$

Infatti se $V(x) = -\alpha\,\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\alpha)\,\delta(x)\,dx = -\alpha \qquad \text{con } \alpha = \ell U_1$$




$$p_1 = \sqrt{2mE} = i\sqrt{2m|E|} = i q_1 = p_3$$

$\boxed{E < 0}$

$$\psi_E^{(1)}(x) = \cancel{c_1^+ e^{-q_1 x/\hbar}} + c_1^- e^{q_1 x/\hbar} \qquad x < 0$$

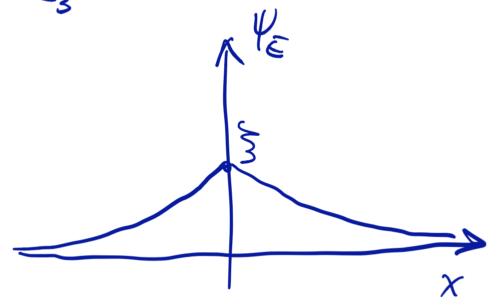
$$\psi_E^{(3)}(x) = c_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} + \cancel{c_3^- e^{q_1 x/\hbar}} \qquad x > 0$$

Condiz. di accettab. a $\pm\infty$ $\Rightarrow$ $c_1^+ = 0$ e $c_3^- = 0$

Condiz. di raccordo ($\psi_E$ continua): $\psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(3)}(0)$

$\Rightarrow \quad c_1^- = c_3^+ \qquad\qquad$ def. $\xi \equiv c_1^- = c_3^+$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \xi \, e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ \xi \, e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases}$$




$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E\psi$$

Integriamola in intervallo $]-\epsilon, \epsilon[$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi''\,dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon}V(x)\psi(x)\,dx = E\underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x)\,dx}_{\xrightarrow{\epsilon\to 0}\ 0}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right] = -\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(-\alpha)\,\delta(x)\psi(x)\,dx = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\psi(x)\,dx$$

$\epsilon \to 0$

$\Delta\psi'$ discontinuità di $\psi'$ in $0$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi'\big|_{x=0} = \alpha\,\psi(0)$$

$$\Delta\psi'\big|_{x=0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\underset{\xi}{\underset{\parallel}{\psi(0)}}$$

Imponiamo qta condiz. sulla soluzione trovata:

$$\psi_E' = \begin{cases} \frac{q_1\xi}{\hbar}\, e^{q_1 x/\hbar} & x < 0 \\ -\frac{q_1\xi}{\hbar}\, e^{-q_1 x/\hbar} & x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \Delta\psi'\big|_{x=0} = -\frac{2q_1\xi}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = \frac{m\alpha}{\hbar} \quad \xrightarrow[q_1=\sqrt{2m|E|}]{} \quad \boxed{E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}$$

$\Rightarrow$ c'è un solo autovalore dell'energia t.c. la relativa autofunz. risolve l'eq. (per $E<0$)

(per $E>0$ $\rightsquigarrow$ spettro continuo)

Spettro di $\hat{H}$ per $V(x) = -\alpha\delta(x)$ è

$$E \in [0,+\infty[ \; \cup \left\{-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}\right\}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \xi e^{q_1 x/\hbar} & x<0 \\ \xi e^{-q_1 x/\hbar} & x \geq 0 \end{cases}$$

(PARI e REALE)

Trovare $\xi$ t.c. $\psi_E(x)$ sia normalizzata, cioè $\|\psi_E\|^2 = 1$

$$\|\psi_E\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_E(x)|^2 dx = 2\int_0^\infty |\psi_E(x)|^2 dx = 2|\xi|^2 \int_0^\infty e^{-2q_1 x/\hbar} dx$$

$$= 2|\xi|^2 \left[-\frac{\hbar}{2q_1} e^{-2q_1 x/\hbar}\right]_0^\infty = \frac{\cancel{2}\hbar}{\cancel{2}q_1}|\xi|^2 = \frac{\hbar^2}{m\alpha}|\xi|^2$$

$q_1 = \sqrt{2mE} = m\alpha/\hbar$

$$\rightarrow \quad \| \psi_{\xi} \|^2 = 1 \quad \text{se} \quad |\xi|^2 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\text{cioè} \quad \xi = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar}} \quad \text{(A MENO DI UNA FASE)}$$

//