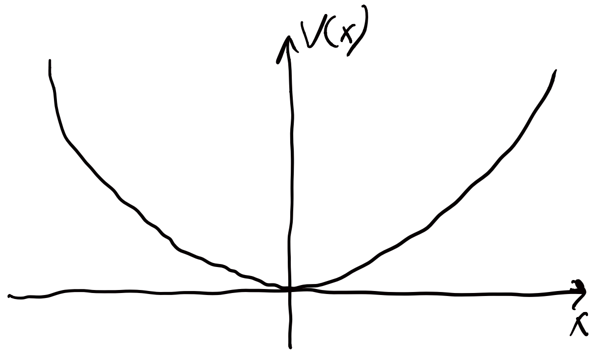
OSCILLATORE ARMONICO (1dim)



Hamiltoniana $\quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

Eq. Sch. indip. dal temp (cioè eq. agli autov. per $\hat{H}$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x) = E\psi(x)$$

Ridef. $\quad q \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{dq}{dx}\frac{d}{dq} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{dq}$

$$\varphi(q) \equiv \psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,q\right) \quad \rightarrow \quad \psi(x) = \varphi\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right)$$

$$\lambda = \frac{E}{\hbar\omega} \quad \rightarrow \quad E = \hbar\omega\lambda$$

$$-\frac{\cancel{\hbar^2}}{\cancel{2m}}\frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{\hbar}}\frac{d^2}{dq^2}\varphi(q) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m\omega^2}\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{m\omega}}q^2\varphi(q) = \frac{2}{\cancel{2}}\cancel{\hbar\omega}\lambda\varphi(q)$$

$$-\frac{d^2}{dq^2}\varphi(q) + q^2\varphi(q) - 2\lambda\varphi(q) = 0 \qquad (\star)$$

$\hookrightarrow$ cerchiamo φ e λ che risolvono l'eq. $(\star)$

$\rightarrow$ eq. diff. lineare del 2° ordine $\Rightarrow$ 2 soluz. indip.

A queste soluz. vanno imposte le condiz. di accettabilità (a $\pm\infty$)

$\rightsquigarrow$ l'op. diff. che agisce su φ $\quad \left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 - 2\lambda\right)$

è INVARIANTE per $q \rightarrow -q$ $\quad (\Leftarrow V(-x) = V(x))$

$\Rightarrow$ se $\varphi(q)$ è soluz., allora anche $\varphi(-q)$ è soluz. relativa allo stesso valore di λ.

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2}+q^2-2\lambda\right)\varphi(q)=0 \Rightarrow \left(-\frac{d^2}{d(-q)^2}+(-q)^2-2\lambda\right)\varphi(-q)=0$$

$$\left(\Rightarrow \left(-\frac{d^2}{dq^2}+q^2-2\lambda\right)\varphi(-q)=0\right)$$

φ in inv. $q\to -q$

$\Rightarrow$ sono soluz. relative allo stesso λ anche

$$\varphi_\pm(q)=\frac{\varphi(q)\pm\varphi(-q)}{2} \rightsquigarrow \underbrace{\varphi_\pm(-q)=\pm\varphi(q)}_{\text{sono soluz. a parità definita}}$$

$\to$ le soluzioni possono essere cercate tra le funzioni a parità definita

Condiz. di accettabilità (φ dovrebbe polinom. lin. a ∞)

$\downarrow$

Studiamo l'eq. diff a $q\to\pm\infty$ (andam. asintotico)

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2}+q^2-2\lambda\right)\varphi(q)=\left(\pm\frac{d}{dq}+q\right)\left(\mp\frac{d}{dq}+q\right)\varphi(q)-2\lambda\varphi(q)$$

$$\underbrace{\mp\frac{d}{dq}\left(q\varphi(q)\right)\pm q\frac{d}{dq}\varphi(q)}_{\mp\varphi(q)\mp \cancel{q\frac{d\varphi}{dq}}\pm\cancel{q\frac{d\varphi}{dq}}}$$

$$=\left[\left(\pm\frac{d}{dq}+q\right)\left(\mp\frac{d}{dq}+q\right)\mp 1-2\lambda\right]\varphi(q)\sim$$

$$\underset{q\to\pm\infty}{\sim} \left(\pm\frac{d}{dq}+q\right)\left(\mp\frac{d}{dq}+q\right)\varphi(q)$$

$\rightsquigarrow$ l'eq. asintotica è $\left(\pm\frac{d}{dq}+q\right)\left(\mp\frac{d}{dq}+q\right)\varphi(q)=0$

Soluz. asintotiche si trovano cercando soluz. di

$$\left(\mp\frac{d}{dq}+q\right)\varphi^{\pm}_{as}(q)=0 \quad\to\quad \frac{d}{dq}\varphi^{\pm}_{as}(q)=\pm q\,\varphi^{\pm}_{as}(q)$$

$$\rightsquigarrow \quad \varphi^{\pm}_{as}(q) = C_{\pm}\, e^{\pm q^2/2}$$

$\to$ per accettabilità possiamo accettare solo l'andam. $e^{-q^2/2}$ a $q\to\pm\infty$

Cerchiamo soluzioni nella forma

$$\varphi(q) = \Theta(q)\, e^{-q^2/2} \qquad (*)$$

Vediamo qual è l'eq. che $\Theta(q)$ deve soddisfare, affinchè $\varphi(q)$ soddisf. eq. iniziale: inseriamo $(*)$ in $(\star)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2}+q^2-2\lambda\right)e^{-q^2/2}\,\Theta(q) =$$

$$= -\frac{d}{dq}\left[-q\,e^{-q^2/2}\Theta(q)+e^{-q^2/2}\frac{d\Theta}{dq}\right]+(q^2-2\lambda)e^{-q^2/2}\Theta =$$

$$= e^{-q^2/2}\theta - \cancel{q^2 e^{-q^2/2}\theta} + q e^{-q^2/2}\frac{d\theta}{dq} + q e^{-q^2/2}\frac{d\theta}{dq}$$

$$- e^{-q^2/2}\frac{d^2\theta}{dq^2} + \cancel{q^2 e^{-q^2/2}\theta} - 2\lambda e^{-q^2/2}\theta$$

$$\hookrightarrow \left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0 \qquad (*')$$

- Ricordiamo che stiamo cercando soluz. $\varphi(q) = e^{-q^2/2}\theta(q)$ che siano a parità def. $e^{-q^2/2}$ è pari $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ $\theta(q)$ sarà a parità def. (con la stessa parità di $\varphi(q)$)

- le soluz. di un'eq. diff. del tipo $(*')$ sono analitiche

  $\rightarrow$ espandiamo θ in serie

$$\theta(q) = q^r \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r} \qquad r \in \mathbb{N}$$

$$a_0 \neq 0$$

θ è pari se r è pari
θ è dispari se r è disp.

Mettiamo $\theta(q)$ in $(*')$ e vediamo quali valori di a_s (che determinano univocam. $\theta(q)$) risolvono l'eq.

$$\frac{d\theta}{dq} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (2s+r) q^{2s+r-1}$$

$$\frac{d^2\theta}{dq^2} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s (2s+r)(2s+r-1) q^{2s+r-2}$$

$$\underbrace{-\sum_{s'=0}^{\infty} a_{s'}(2s'+r)(2s'+r-1)\,q^{2s'+r-2}}_{-a_0 r(r-1)q^{r-2}+\underbrace{\sum_{s'=1}^{\infty} a_{s'}(2s'+r)(2s'+r-1)q^{2s'+r-2}}_{\sum_{s=0}^{\infty} a_{s+1}(2s+r+2)(2s+r+1)q^{2s+r}}} + 2\sum_{s=0}^{\infty} a_s(2s+r)q^{2s+r} + (1-2\lambda)\sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r} = 0$$

$s' = s+1$

$$-\underset{\neq 0}{a_0}\, r(r-1)q^{r-2} + \sum_{s=0}^{\infty}\Big[-(2s+r+2)(2s+r+1)a_{s+1} + \big(2(2s+r)+1-2\lambda\big)a_s\Big]q^{2s+r} = 0$$

Una serie si annulla se sono zero tutti i coeff.

$$\Rightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 & \rightarrow \quad r = 0,1 \\ a_{s+1} = \dfrac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}\,a_s & (+\!\!\!+) \end{cases}$$

condizione iterativa che permette di calcolare tutti gli a_s una volta fissato a_0 (normalizzaz.)

Es. $r=0$:

$$a_1 = \frac{1-2\lambda}{2}a_0$$

$$a_2 = \frac{5-2\lambda}{12}a_1 = \frac{(5-2\lambda)(1-2\lambda)}{24}a_0$$

$\vdots$

$$a_i = (\ \dots\ )\ a_0$$

$$\Theta(q) = q^r \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s}$$

noti (dati da $(+\!\!\!+)$) → serie risolve l'eq. $(\ast')$.

Verifichiamo se la serie CONVERGE :

Per grandi $s \rightsquigarrow \frac{a_{s+1}}{a_s} \sim \frac{1}{s} \Rightarrow$ serie converge

$\to$ la serie ha lo stesso comportam. asintotico

di $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{2s}}{s!} = e^{q^2}$

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} \quad \frac{\frac{1}{(s+1)!}}{\frac{1}{s!}} = \frac{1}{s+1}$$

$\Rightarrow \quad \Theta(q)$ ha andam. asint. $\sim e^{q^2}$

$\to \varphi(q) = e^{-q^2/2}\,\Theta(q) \sim e^{q^2/2}$

ha andam. esp. per $q \to \pm\infty \Rightarrow$ non è accettab.

$\to$ sommare TUTTI gli infiniti termini (non-nulli) produce un andam. asintot. <u>non</u> accettab.

$\Rightarrow$ l'unico modo per avere un andam. asint. polinom. lim. (che non rovini $e^{-q^2/2}$ in $\varphi(q)$) è che la serie sia troncata a una somma finita ($\rightsquigarrow \Theta(q)$ è un POLINOMIO)

$$a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}\, a_s$$

se per qualche valore di s, diciamo $s = N+1$, il corrispondente coeff. è nullo ($a_{N+1}=0$),

allora $a_s = 0 \quad s > N$

$\to$ La soluz. è accettab. solo per i valori di λ (E)

per cui $\exists N$ t.c. $a_{N+1} = 0$ $\quad E = \hbar\omega\lambda$

$$a_{N+1} = 0 \quad (a_N \neq 0) \Rightarrow 4N + 2r + 1 - 2\lambda_{N,r} = 0$$

$$\rightarrow \lambda_{N,r} = \underbrace{r + 2N}_{= n \in \mathbb{N}} + \frac{1}{2} \qquad r = 0,1 \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

LIVELLI ENERGETICI DELL'OSCILLATORE ARMONICO quantistico

Per ogni valore E_n c'è un'autofunzione associata

$$a_{s+1} = \frac{4s + 2r + 1 - 2r - 4N - 1}{(2s+r+2)(2s+r+1)} a_s = \frac{-4(N-s)}{(2s+r+2)(2s+r+1)}$$

$$a_s = \frac{-4(N-s+1)}{(2s+r)(2s+r-1)} a_{s-1} = \frac{(-4)^2 (N-s+1)(N-s+2)}{(2s+r)(2s+r-1)(2s+r-2)(2s+r-3)} a_{s-2} =$$

$$\ldots = (-4)^s \frac{N!}{(N-s)!} \frac{r!}{(2s+r)!} a_0$$

$$\Theta_{N,r}(q) = \sum_{s=0}^{N} a_s \, q^{2s+r}$$

vengono chiamati POLINOMI DI HERMITE

$$\varphi_n(q) = e^{-q^2/2}\,\Theta_n(q) \rightarrow \psi_n(x)$$

autofunzioni di $\hat{H}$ per l'osc. arm. quant.

$n=0 \rightarrow r=0 \quad N=0$

$$\varphi_0 = e^{-q^2/2}\cdot a_0 \rightarrow \psi_0(x) = a_0\, e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$

PARI

STATO FONDAMENTALE (en. min.) dell' osc. arm. quant.

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \qquad \Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

$n=1 \rightarrow r=1 \quad N=0$

$$\varphi_1 = e^{-q^2/2}\,a_0 q \rightarrow \psi_1(x) = a_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\; x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

DISPARI

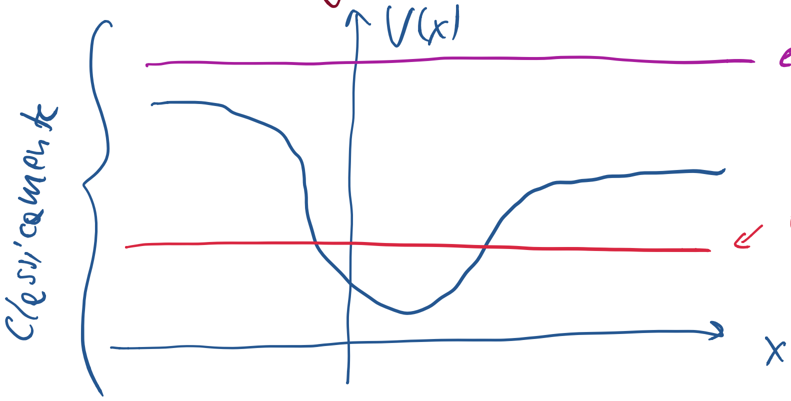
PRIMO LIVELLO ECCITATO

$$E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$$

Le autofunz. relative a n PARI sono pari in $x \rightarrow -x$
" " " " " DISPARI " dispari " "

$(V(-x) = V(x))$

Stati legati e stati "scattering"



← stato di scattering

(il corpo arriva dall'∞, interagisce col potenziale e torna a ∞)

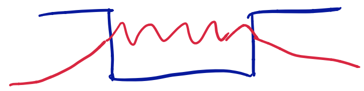
← E di stato legato

(sist. rimane localizzato in pta regione)

Quantisticam., qualitativam. è molto simile

$E < V(-\infty)$ e $E < V(+\infty)$ → stati legati

Le funz. d'onda sono localizzate nella regione classicam. proibita



$E > V(-\infty)$ e $E > V(+\infty)$ → stati di scatt.