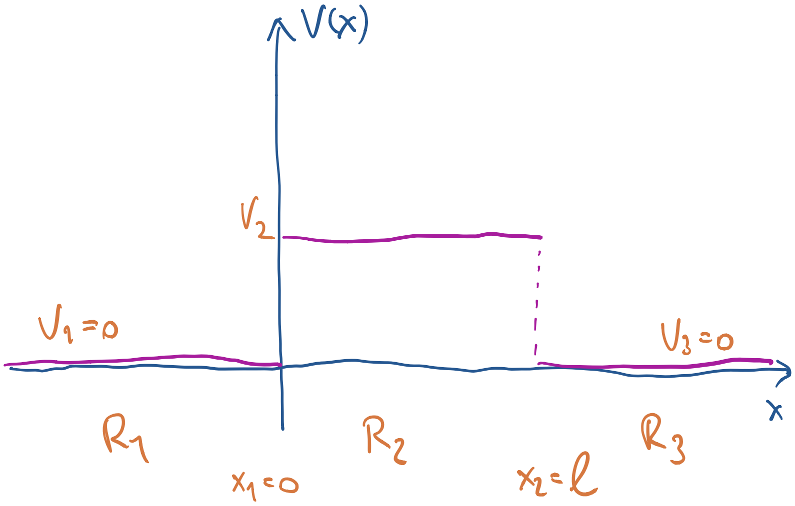
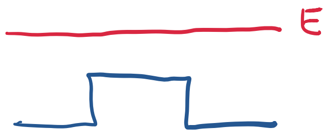
Barriera di Potenziale



$p_j = \sqrt{2m(E-V_j)}$

$e^{i p_j x/\hbar}$



Caso $E > V_2$

- ψ_E è oscillante in tutte le regioni R_j $(j=1,2,3)$
  $\longrightarrow$ limitata a $\pm\infty$.
- c_j^+, c_j^- $\longrightarrow$ 6 parametri
- 4 condiz. di raccordo (2 pti di disc., V ha disc. finite)

$$P_1 = P_3 = \sqrt{2mE} \qquad P_2 = \sqrt{2m(E-V_2)}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^+ e^{i p_1 x/\hbar} + c_1^- e^{-i p_1 x/\hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ e^{i p_2 x/\hbar} + c_2^- e^{-i p_2 x/\hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ e^{i p_1 x/\hbar} + c_3^- e^{-i p_1 x/\hbar} & x \in R_3 \end{cases}$$

Scegliamo soluz. partic. con $c_3^- = 0$

($\rightsquigarrow$ particella che arriva da sinistra)

4 condiz. di raccordo

$$\psi_E^{(1)}(0) = \psi_E^{(2)}(0) \qquad \psi_E^{(1)\prime}(0) = \psi_E^{(2)\prime}(0) \qquad \psi_E^{(2)}(\ell) = \psi_E^{(3)}(\ell) \qquad \psi_E^{(2)\prime}(\ell) = \psi_E^{(3)\prime}(\ell)$$

$$\begin{cases} c_1^+ + c_1^- = c_2^+ + c_2^- \\ p_1(c_1^+ - c_1^-) = p_2(c_2^+ - c_2^-) \\ c_2^+ e^{ip_2\ell/\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/\hbar} = c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar} \\ p_2 c_2^+ e^{ip_2\ell/\hbar} - p_2 c_2^- e^{-ip_2\ell/\hbar} = p_1 c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar} \end{cases}$$

$\to$ 4 eq. in 5 parametri

$\downarrow$

Soluz.

$$c_2^+ = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i(p_1-p_2)\ell/\hbar}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$c_2^- = \frac{1}{2} c_3^+ e^{i(p_1+p_2)\ell/\hbar}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right)$$

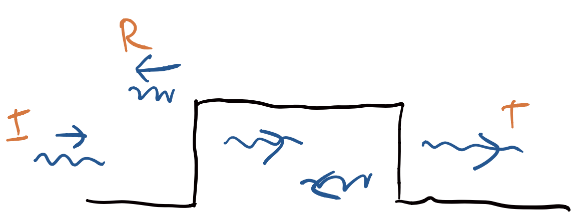
$$c_1^+ = c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar}\left\{\cos\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) - i\,\frac{p_1^2+p_2^2}{2p_1p_2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right)\right\}$$

$$c_1^- = c_3^+ e^{ip_1\ell/\hbar}\, i\,\frac{p_1^2-p_2^2}{2p_1p_2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right)$$

Posso fissare la normalizzazione scegliendo $c_3^+ = 1$

$\hookrightarrow$ ψ_E^* è indip. da ψ_E $\Rightarrow$ soluz. gen. $\alpha\psi_E + \beta\psi_E^*$.

$$J(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi_E^*\psi_E' - \psi_E'^*\psi_E\right) = \begin{cases} \underbrace{\frac{p_1}{m}|c_1^+|^2}_{J_I} - \underbrace{\frac{p_1}{m}|c_1^-|^2}_{J_R} & x\in R_1 \\ \frac{p_2}{m}|c_2^+|^2 - \frac{p_2}{m}|c_2^-|^2 & x\in R_2 \\ \underbrace{\frac{p_1}{m}|c_3^+|^2}_{J_T} & x\in R_3 \end{cases}$$



$$R = \left|\frac{J_R}{J_I}\right| = \left|\frac{C_1^-}{C_1^+}\right|^2 = \frac{(p_1^2-p_2^2)^2 \operatorname{sen}^2(p_2\ell/\hbar)}{4p_1^2p_2^2 + (p_1^2-p_2^2)^2\operatorname{sen}^2(p_2\ell/\hbar)}$$

$$T = \left|\frac{J_T}{J_I}\right| = \left|\frac{C_3^+}{C_1^+}\right|^2 = \frac{4\,p_1^2p_2^2}{4p_1^2p_2^2 + (p_1^2-p_2^2)^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right)} = \frac{4E(E-V_2)}{4E(E-V_2)+V_2^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_2)}\right)}$$

$$p_1^2 = 2mE \qquad p_2^2 = 2m(E-V_2)$$

sen² è min quando è = 0

$\Updownarrow$

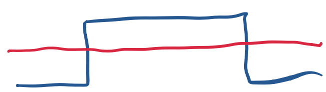
$\frac{p_2\ell}{\hbar} = n\pi \quad n\in\mathbb{Z}$ den. è min.

$\Updownarrow$

FENOMENO DI RISONANZA T è massimo

[Quando c'è risonanza, un pacchetto d'onda può rimanere per un tempo lungo in R_2]

Caso $0<E<V_2$



$$p_2 = \sqrt{2m(E-V_2)} = i\sqrt{2m(V_2-E)} \equiv i q_2$$

$\rightarrow$ soluz. in R_2 cambia in

$$C_2^+ e^{-q_2x/\hbar} + C_2^- e^{q_2x/\hbar} \qquad 0<x<\ell$$

- Siccome R_2 non contiene $\pm\infty$ (regione limitata), non devo imporre vincoli di accettabilità su $C_2^\pm$.

- Ancora scegliamo di studiare la soluz. partic. $c_3^- = 0$.

- Tutti i conti sono formalmente identici al caso $E > V_2$, ma ora sostituiamo $p_2 = i q_2 \in i\mathbb{R}$

  sen → senh
  cos → cosh

- Il coeff. di TRASMISSIONE diventa

$$T = \frac{4p_1^2 p_2^2}{4p_1^2 p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{p_2 \ell}{\hbar}\right)} = \frac{4E(V_2 - E)}{4E(V_2 - E) + V_2^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2m(V_2 - E)}\right)} \neq 0$$

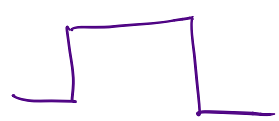
$$p_2 = i q_2 = i\sqrt{2m(V_2 - E)}$$

contrariamente al caso classico

$\boxed{\text{EFFETTO TUNNEL}}$ →

All'aumentare dell'argomento del senh, T diminuisce

$$\frac{\ell}{\hbar}\sqrt{2m(V_2 - E)}$$



T diminuisce all'aumentare di (a E fissata)

- ℓ lunghezza della barriera
- m massa della particella
- V_2 altezza della barriera

Nel limite in cui $\frac{q_2 \ell}{\hbar} \gg 1$

$$\operatorname{senh}\left(\frac{q_2 \ell}{\hbar}\right) \sim \frac{1}{2} e^{q_2 \ell / \hbar} \text{ "}\gg\text{" } 4E(V_2 - E) \leadsto$$

$$\rightsquigarrow \quad T \sim 16 \, \frac{E\,(V_2 - E)}{V_2^{\,2}} \, e^{-2 q_2 \ell / \hbar}$$

- Elettrone con $E = 1\,eV$, barriera $\ell = 1\,Å$ e alt. $V_2 = 2\,eV$

  $\rightsquigarrow \; T = 0{,}78$

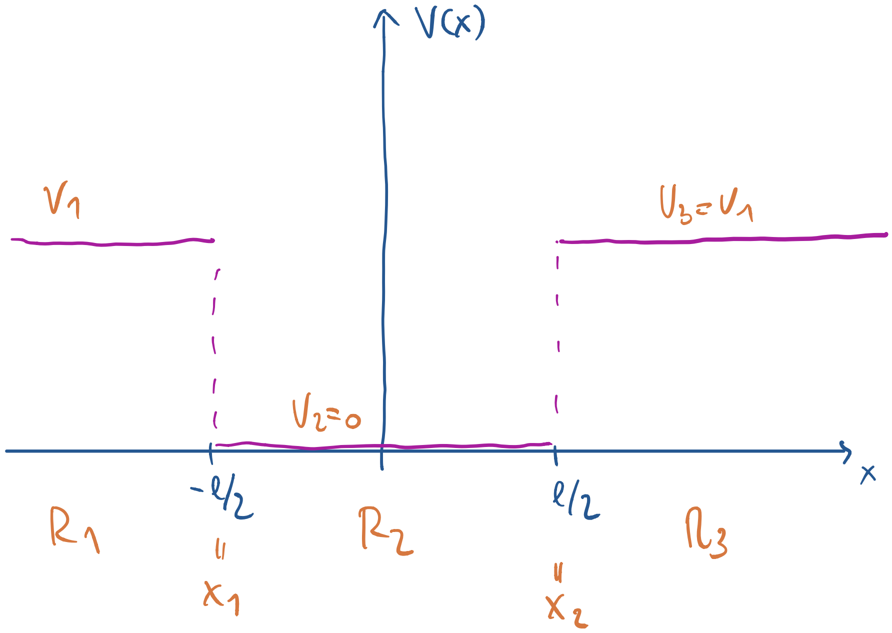
- Protone in situazioni analoghe

  $\rightsquigarrow \; T = 4 \cdot 10^{-19}$

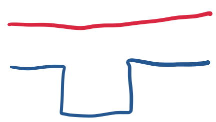
- Oggetti macroscopici

  $\rightsquigarrow \; T \sim 0$

BUCA RETTANGOLARE



Caso $E > V_1$



- soluz. oscillanti in tutte le regioni R_j $(j = 1, 2, 3)$

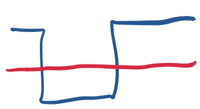
$$p_1 = \sqrt{2m(E - V_1)} \qquad p_2 = \sqrt{2mE} \qquad (*)$$

- le soluzioni $\psi_E(x)$ sono formalmente le stesse del caso della barriera di pot., ma con diversi valori di p_1, p_2.

Per es.

$$T = \frac{4p_1^2 p_2^2}{4p_1^2 p_2^2 + (p_1^2 - p_2^2)^2 \sin^2\left(\frac{p_2 \ell}{\hbar}\right)} \overset{(*)}{=} \frac{4(E - V_1)E}{4(E - V_1)E + V_1^2 \sin^2\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{2mE}\right)}$$

Caso $0 < E < V_1$



$$p_1 = p_3 = \sqrt{2m(E - V_1)} = i\sqrt{2m(V_1 - E)} \equiv i q_1$$

- Andamento oscillante in R_2 $(E > V_2 = 0)$.
- Andamento ESPONENZIALE nelle regioni (illimitate) R_1 e R_3

$$\underbrace{C_1^+ e^{-q_1 x/\hbar}}_{x \to -\infty \ \to \infty} + C_1^- e^{q_1 x/\hbar} \qquad x \in R_1 \qquad x < \ell/2$$

$$C_3^+ e^{-q_1 x/\hbar} + \underbrace{C_3^- e^{q_1 x/\hbar}}_{x \to +\infty \ \to \infty} \qquad x \in R_3 \qquad x > \ell/2$$

→ condizioni di accettabilità (limitatezza a $\pm\infty$)

$$\underline{c_1^+ = 0} \quad \text{e} \quad \underline{c_3^- = 0}$$

Soluzione:

$$\psi_E(x) = \begin{cases} c_1^- \, e^{q_1 x/\hbar} & x \in R_1 \\ c_2^+ \, e^{i p_2 x/\hbar} + c_2^- \, e^{-i p_2 x/\hbar} & x \in R_2 \\ c_3^+ \, e^{-q_1 x/\hbar} & x \in R_3 \end{cases}$$

FUNZIONE $\in L^2(\mathbb{R})$ (può rappresentare uno stato quantistico)

Imponiamo le condizioni di raccordo

In $x_1 = -\ell/2$

$$c_1^- e^{-q_1 \ell/2\hbar} = c_2^+ e^{-i p_2 \ell/2\hbar} + c_2^- e^{i p_2 \ell/2\hbar}$$

$$q_1 c_1^- e^{-q_1 \ell/2\hbar} = i p_2 \left(c_2^+ e^{-i p_2 \ell/2\hbar} - c_2^- e^{i p_2 \ell/2\hbar} \right)$$

In $x_2 = \ell/2$

$$c_2^+ e^{i p_2 \ell/2\hbar} + c_2^- e^{-i p_2 \ell/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1 \ell/2\hbar}$$

$$i p_2 \left(c_2^+ e^{i p_2 \ell/2\hbar} - c_2^- e^{-i p_2 \ell/2\hbar} \right) = -q_1 c_3^+ e^{-q_1 \ell/2\hbar}$$

4 eq. lin. nelle 4 incognite $c_1^-, c_2^+, c_2^-, c_3^+$
OMOGENEE

↳ Generalmente ho un'unica soluz.: $c_1^- = c_2^+ = c_2^- = c_3^+ = 0$

cioè $\psi_E \equiv 0$ che non è accettab.

⇓

Avrò soluzioni non-triviali solo per determinati valori dei coeff. del sist. lineare, cioè per determinati valori dell'ENERGIA E.

• Prime due eq. dicono che $c_1^- \neq 0$, altrimenti $c_2^+ = 0 = c_2^-$ e allora anche $c_3^+ = 0$ per le ultime due eq.

$\Rightarrow$ possiamo fissare la normalizzazione scegliendo $c_1^- = 1$

• Dalle prime due equazioni :

$$i p_2 \left[\cancel{c_1^-}\, e^{-q_1 \ell/2\hbar} = \cancel{c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar}} + \cancel{c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar}} \right] \cdot (-ip_2)$$

$$+ \quad q_1 \cancel{c_1^-}\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = i p_2 \left(\cancel{c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar}} - \cancel{c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar}} \right) \quad +$$

$$(q_1 + ip_2)\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = 2ip_2\, c_2^+\, e^{-ip_2\ell/2\hbar}$$

$$(q_1 - ip_2)\, e^{-q_1\ell/2\hbar} = -2ip_2\, c_2^-\, e^{ip_2\ell/2\hbar}$$

$$c_2^+ = \frac{q_1 + ip_2}{2ip_2}\, e^{-q_1\ell/2\hbar}\, e^{ip_2\ell/2\hbar}$$

$$c_2^- = -\frac{q_1 - ip_2}{2ip_2}\, e^{-q_1\ell/2\hbar}\, e^{-ip_2\ell/2\hbar}$$

• Andiamo a sostituire nelle ultime due eq.

$$c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}$$

$$ip_2 \left(c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} \right) = -q_1\, c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar}$$

$$c_3^+ = \frac{q_1 + ip_2}{2ip_2}\, e^{ip_2\ell/\hbar} - \frac{q_1 - ip_2}{2ip_2}\, e^{-ip_2\ell/\hbar}$$

$$\boxed{(q_1 + ip_2)^2\, e^{ip_2\ell/\hbar} = (q_1 - ip_2)^2\, e^{-ip_2\ell/\hbar}}$$

vincolo sui coeff. delle eq. lineari del sistema

$$\left(\frac{q_1 - ip_2}{q_1 + ip_2} \right)^2 = e^{2ip_2\ell/\hbar}$$

$\leftarrow$ qta diventa una condizione su E affinché esista la soluzione.

Metodo con MATRICI:

$$\begin{cases} c_1^- e^{-q_1 \ell/2\hbar} = c_2^+ e^{-ip_2 \ell/2\hbar} + c_2^- e^{ip_2 \ell/2\hbar} \\ q_1 c_1^- e^{-q_1 \ell/2\hbar} = ip_2 \left(c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{ip_2 \ell/2\hbar} \right) \\ c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} + c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} = c_3^+ e^{-q_1 \ell/2\hbar} \\ ip_2 \left(c_2^+ e^{ip_2\ell/2\hbar} - c_2^- e^{-ip_2\ell/2\hbar} \right) = -q_1 c_3^+ e^{-q_1\ell/2\hbar} \end{cases}$$

Sist. omogeneo in 4 eq.:

$$\begin{pmatrix} e^{-q_1\ell/2\hbar} & -e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0 \\ q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{-q_1\ell/2\hbar} \\ 0 & ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^- \\ c_2^+ \\ c_2^- \\ c_3^+ \end{pmatrix} = 0$$

↳ Ha soluz. diverse da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ solo se det ↓ $= 0$

$$\det = e^{-q_1\ell/\hbar} \left[-iq_1 p_2 e^{-ip_2\ell/\hbar} + p_2^2 e^{ip_2\ell/\hbar} - p_2^2 e^{-ip_2\ell/\hbar} - iq_1 p_2 e^{ip_2\ell/\hbar} \right]$$

$$+ e^{-q_1\ell/\hbar} \left[q_1^2 e^{-ip_2\ell/\hbar} - iq_1 p_2 e^{ip_2\ell/\hbar} - iq_1 p_2 e^{-ip_2\ell/\hbar} - q_1^2 e^{ip_2\ell/\hbar} \right]$$

$$= e^{-q_1\ell/\hbar} \left[e^{-ip_2\ell/\hbar} (q_1 - ip_2)^2 - e^{ip_2\ell/\hbar} (q_1 + ip_2)^2 \right] = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{q_1 - ip_2}{q_1 + ip_2} \right)^2 = e^{2ip_2\ell/\hbar}}$$

Quando questa condiz. è soddisfatta, le righe della matrice diventano lin. dipendenti → rimangono 3 eq. in 4 incognite

$$
\begin{pmatrix}
e^{-q_1\ell/2\hbar} & -e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0\\
q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0\\
0 & e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{-q_1\ell/2\hbar}\\
0 & ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1^-\\ c_2^+\\ c_2^-\\ c_3^+\end{pmatrix} = 0
$$

$c_1^- = 1 \leftarrow$ scelta di normalizzazione

$\rightsquigarrow$ se c_1^- fosse $=0$ $\rightsquigarrow$ le prime 2 righe darebbero $c_2^\pm = 0$
ma allora dalle altre eq. otterremmo $c_3^+ = 0$.

$$
\begin{pmatrix}
e^{-ip_2\ell/2\hbar} & e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0\\
ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar} & 0\\
e^{ip_2\ell/2\hbar} & e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -e^{-q_1\ell/2\hbar}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_2^+\\ c_2^-\\ c_3^+\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} e^{-q_1\ell/2\hbar}\\ q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar}\\ 0\end{pmatrix}
$$

$$(ab\ \ c)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (a\ \ c)\begin{pmatrix}bx\\ y\end{pmatrix}$$

$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix}
e^{-ip_2\ell/2\hbar} & e^{ip_2\ell/2\hbar}\\
ip_2 e^{-ip_2\ell/2\hbar} & -ip_2 e^{ip_2\ell/2\hbar}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_2^+\\ c_2^-\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} e^{-q_1\ell/2\hbar}\\ q_1 e^{-q_1\ell/2\hbar}\end{pmatrix}\\[2ex]
c_3^+ = e^{q_1\ell/2\hbar}\left(e^{ip_2\ell/2\hbar} c_2^+ + e^{-ip_2\ell/2\hbar} c_2^-\right)
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1\\ ip_2 & -ip_2\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} e^{-ip_2\ell/2\hbar} c_2^+\\ e^{ip_2\ell/2\hbar} c_2^-\end{pmatrix}
= e^{-q_1\ell/2\hbar}\begin{pmatrix} 1\\ q_1\end{pmatrix}
$$

$\det = -2ip_2$

Inversa: $-\dfrac{1}{2ip_2}\begin{pmatrix} -ip_2 & -1\\ -ip_2 & +1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_2^+ e^{-ip_2\ell/2\hbar}\\ c_2^- e^{ip_2\ell/2\hbar}\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2ip_2} e^{-q_1\ell/2\hbar}\begin{pmatrix} q_1 + ip_2\\ -q_1 + ip_2\end{pmatrix}$

$$C_3^+ = \frac{q_1 + i p_2}{2 i p_2} e^{i p_2 \ell / 2\hbar} - \frac{q_1 - i p_2}{2 i p_2} e^{-i p_2 \ell / \hbar}$$

$\rightarrow \quad C_2^+ , \; C_2^- , \; C_3^+ \qquad (C_1^+ = 1)$

$\rightarrow$ trovato la soluzione $\psi_E(x)$

Ora cerchiamo quali valori di E sono permessi dalla condizione

$$\boxed{\left(\frac{q_1 - i p_2}{q_1 + i p_2} \right)^2 = e^{2 i p_2 \ell / \hbar}}$$

$$\frac{q_1 - i p_2}{q_1 + i p_2} = \pm e^{i p_2 \ell / \hbar} = \pm \left(\cos \frac{p_2 \ell}{\hbar} + i \operatorname{sen} \frac{p_2 \ell}{\hbar} \right)$$

1) Segno negativo

$$-\cos\left(\frac{p_2 \ell}{\hbar}\right) = \frac{q_1^2 - p_2^2}{q_1^2 + p_2^2} \qquad + \operatorname{sen} \frac{p_2 \ell}{\hbar} = + \frac{2 q_1 p_2}{q_1^2 + p_2^2} > 0$$

può essere riscritta usando le formule di bisezione $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

$$\left| \cos \frac{p_2 \ell}{2\hbar} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos p_2 \ell / \hbar}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \frac{q_1^2 - p_2^2}{q_1^2 + p_2^2} \right]} = \frac{p_2}{\sqrt{q_1^2 + p_2^2}}$$

$$= \frac{p_2}{\sqrt{2 m V_1}} \qquad p_2 = \sqrt{2mE}$$

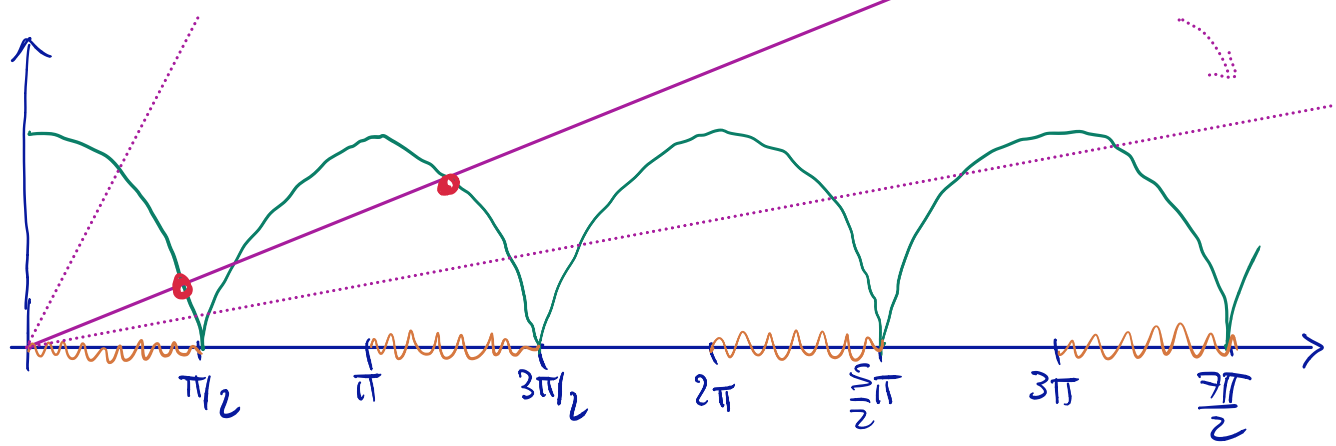
Definisco $x \equiv \frac{p_2 \ell}{2\hbar} = \frac{\ell}{2\hbar} \sqrt{2mE}$ $\qquad \xi \equiv \sqrt{\frac{2\hbar^2}{m V_1 \ell^2}}$

$\hookrightarrow$ dip. da E $\qquad \hookrightarrow$ indip. da E

$|\cos x| = \xi x$ (← è una delle eq. per trovare autovalori di $\hat{H}$)

Voglio sapere se ci sono valori di E che risolvono l'eq.

$|\cos x| = \xi x$ $\quad\quad \sin 2x > 0 \Rightarrow 0 < 2x < \pi \mod 2\pi$



diminuendo ξ, cala la pendenza della retta, ottenendo così un numero superiore di soluzioni

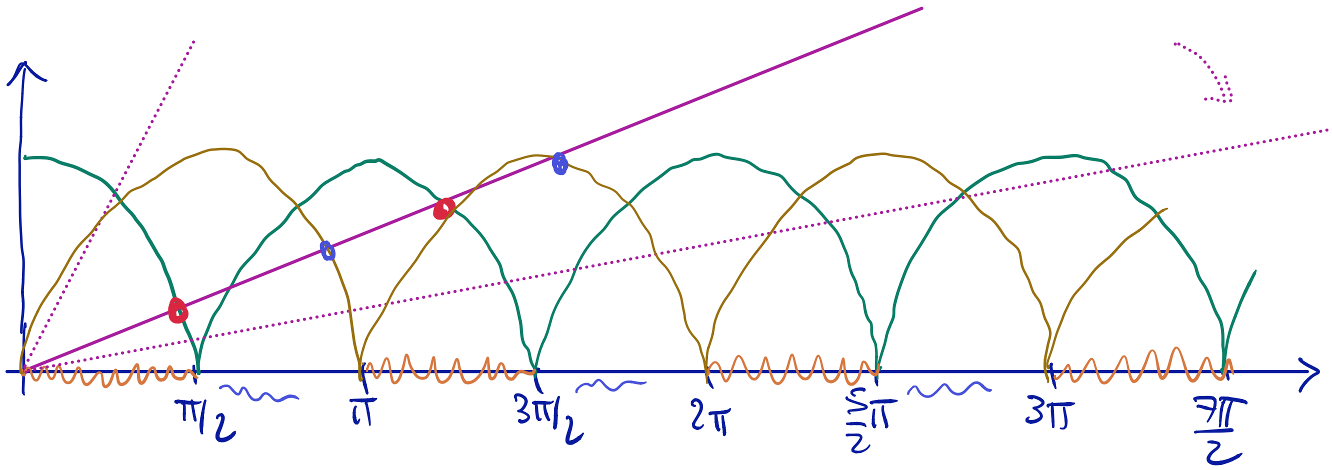
$\Rightarrow$ diminuendo ξ, aumenta il numero di autovalori

- c'è sempre almeno una soluzione (lo spettro di $\hat{H}$ non è vuoto)
- c'è un numero FINITO di valori possibili di E (lo spettro di $\hat{H}$ è DISCRETO e in particol. finito)

2) Segno positivo: $\left|\cos \frac{p_2 \ell}{2\hbar}\right| = \frac{q_1}{\sqrt{2mV_1}} \quad\quad \sin\left(\frac{p_2\ell}{\hbar}\right) = -\frac{2q_1p_2}{q_1^2+p_2^2} < 0$

$\hookrightarrow |\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{q_1^2}{2mV_1}} = \sqrt{1-1+(\xi x)^2} = \xi x$

$\sin 2x < 0$

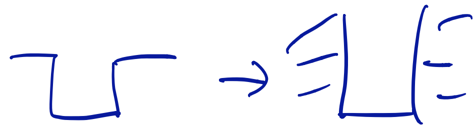


→ il NUMERO DI SOLUZIONI è ≥ 1 e FINITO
e AUMENTA al decrescere di $\xi = \sqrt{\frac{2\hbar^2}{mV_1 \ell^2}}$

cioè all' AUMENTARE di
- larghezza della buca (ℓ)
- altezza " " (V_1)
- massa

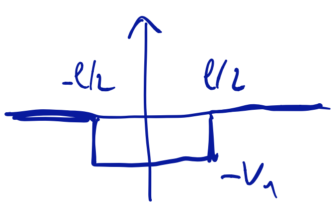
Lo spettro di $\hat{H}$ è NON-DEG.

Limiti della buca di potenz.



1) $V_1 \to \infty \Rightarrow \xi \to 0$
ℓ fisso
⟶ soluzioni per $x = n\frac{\pi}{2}$ $n \in \mathbb{N}^+$

$$x = \frac{p_2 \ell}{2\hbar} = \sqrt{\frac{m\ell^2 E}{2\hbar^2}} \to E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}$$

2) 

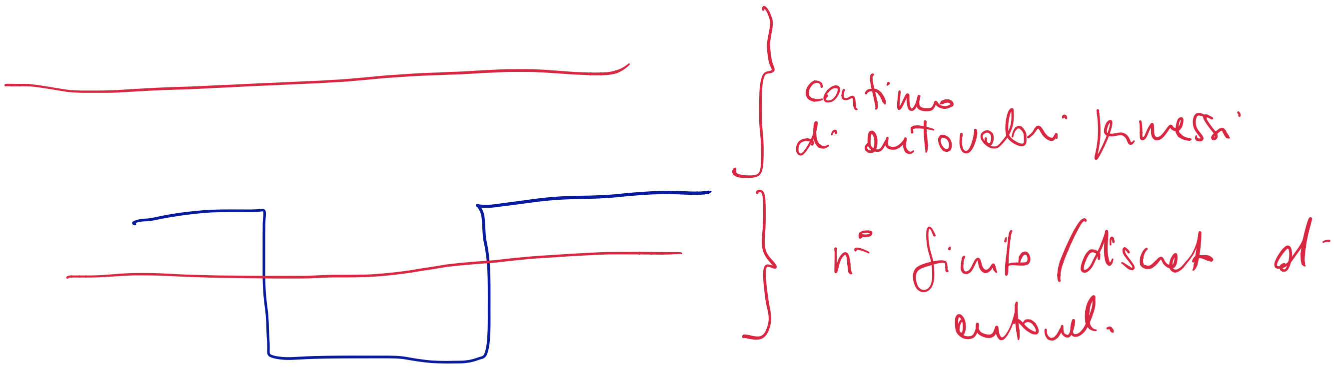
$p_2 = \sqrt{2m(E - V_1)}$

$V_1 \to \infty \quad \ell \to 0 \quad$ t.c. $\quad V_1 \cdot \ell = \alpha \quad$ cost

$\to \xi = \sqrt{\dfrac{2\hbar^2}{mV_1\ell^2}} \to \infty \quad \Rightarrow$ 1 sola soluzione

$\hookrightarrow E = -\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$

Spettro della buca finita



$$E \in [V_1, \infty[\; \cup \; \{E_k\}_{k=1,\dots,\#} \qquad \text{con } 0 < E_k < V_1$$