Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2020-2021, sessione estiva, primo appello

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $\overline{X}$ la chiusura di X in $\mathbb{R}$.

• Si dimostri che se $\sup X = +\infty$, esiste una successione strettamente crescente $\{x_n\}$ di punti di X con $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$\forall n \geq 0 \ \exists\ y_n \in X$ t.c. $n < y_n$ (perché altrimenti $\sup X \leq n$).
Si ha $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Tuttavia non è detto che $\{y_n\}$ sia crescente.
Definiamo una sottosuccessione $\{y_{n_k}\}$ strett crescente. $y_{n_1} = y_1$
Supponendo $y_{n_1} < \dots < y_{n_k}$, scegliamo n_{k+1} t.c. $y_{n_{k+1}} > y_{n_k}$
(n_{k+1} esiste perché $\lim y_n = +\infty$). Per induzione $\{y_{n_k}\}$ è strett cresc.
Infine, $x_k \overset{\text{def}}{=} y_{n_k}$

• Sia $X = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri irrazionali. Si dimostri che $\overline{X} = \mathbb{R}$.

Si tratta di dimostrare che $\forall\ a<b$ in $\mathbb{R}$ $\exists$
$r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ con $a<r<b$. Ricordando che $\pi \notin \mathbb{Q}$, consideriamo
$a+\pi < q < b+\pi$ con $q \in \mathbb{Q}$, dove utilizziamo densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
Allora $a < q-\pi < b$. Ma $q \in \mathbb{Q}$ e $\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow q-\pi \notin \mathbb{Q}$
cioè $q-\pi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

• Sia $X = \{\frac{n}{5} : n \in \mathbb{Z}\}$. Si dimostri che $\overline{X} = X$.

Utilizziamo $\mathbb{Z}' = \emptyset$ e $\overline{X} \supseteq X$ $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}$. Se per assurdo
$\overline{X} \supsetneq X$ ed in particolare se esistesse $\bar{x} \in X'$ t.c. $\forall\ \varepsilon > 0$
$\exists\ x \in X$ con $0 < |\bar{x} - x| < \varepsilon$ allora, essendo $x = \frac{n}{5}$
$0 < |5\bar{x} - n| < 5\varepsilon$, cioè avremmo che

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |5\bar{x} - n| < 5\varepsilon$.
$\Rightarrow 5\bar{x} \in \mathbb{Z}'$. Ma $\mathbb{Z}' = \emptyset$

ESERCIZIO N. 2. Per $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione biettiva $x \to (x + 2x^3 + 4x^7)$ e si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x+\arctan(x)} \frac{1}{g(t)} dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t-1)(t-2)^2} dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

Abbiamo per $h(x) \stackrel{\circ}{=} x + 2x^3 + 4x^7$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Per $x \to +\infty$

abbiamo $\operatorname{artg}(x) = \frac{\pi}{2} + o(1) \Rightarrow$ per $x \to +\infty$

$$\int_x^{x+\operatorname{artg}(x)} \frac{1}{g(t)} dt = \frac{\operatorname{artg}(x)}{g(c_x)} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0 \quad \text{con } x \leq c_x \leq x + \operatorname{artg} x$$

- si determini $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

$$\frac{t}{(t-1)(t-2)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-2)^2} + \frac{C}{t-2} \qquad A = \left.\frac{t}{(t-2)^2}\right|_{t=1} = 1 \qquad B = \left.\frac{t}{t-1}\right|_{t=2} = 2$$

Necessariamente $C = -1 \Rightarrow f(x) = \lg|t-1|\Big]_0^x - \lg|t-2|\Big]_0^x - \frac{2}{t-2}\Big]_0^x$

$$= \lg\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \lg\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{x-2} + 1 \xrightarrow{x\to-\infty} \lg 2 + 1$$

- si determini se $f(x)$ e' continua in $\mathbb{R}$;

$f \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 = f(0)$

$$g(t) = g(0) + g'(0)\, t + o(t) = 0 + \frac{1}{h'(0)} t + o(t) = t(1 + o(1))$$

$$\int_x^{x+\operatorname{artg} x} \frac{dt}{g(t)} = \int_x^{2x+o(x)} \frac{1}{t(1+o(1))} dt = \int_x^{2x+o(x)} \frac{1}{t}(1+o(1))\, dt = \int_x^{2x+o(x)} \frac{1}{t} + \int_x^{2x+o(x)} \frac{o(1)}{t} dt$$

- si calcoli $f'(x)$ dove e' definita

$$= \lg(2 + o(1)) + (x + o(x)) \left.\frac{o(1)}{t}\right|_{t=c_x} \xrightarrow{x\to0^+} \lg 2$$

Cioe' $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lg(2)$.

Per $x > 0$ $\quad f'(x) = \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{1}{g(x+\operatorname{artg} x)} - \frac{1}{g(x)}$

Per $x < 0$ $\quad f'(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2}$

Sia $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Sia

$\Delta \quad x_0 = 0 < x_1 < \cdots\cdots < x_N = 1$ con

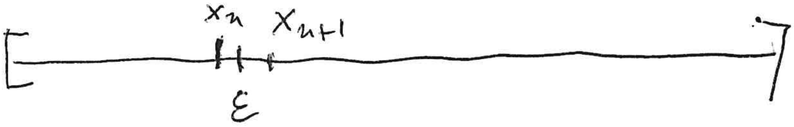
$|\Delta| < \delta$. Qui assumiamo $\delta << \varepsilon$ con valore preciso di δ da definire. Scegliamo $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$. Sia

$$S = \sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}).$$

Risulta $S \geq 0$ (da $f(x_j^*) \geq 0 \ \forall j$). Sia $1 \leq n < N$ t.c.

$$[0, x_1] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] \subseteq [0, \varepsilon] \quad e$$

$$[x_{n+1}, x_n] \nsubseteq [0, \varepsilon]$$



Allora $x_{n+1} \leq \varepsilon + \delta$. Allora

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n+1} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n+1} (x_j - x_{j-1}) = x_{n+1} \leq \varepsilon + \delta$$

Consideriamo ora $\displaystyle 0 \leq \sum_{j=n+2}^{N} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1})$

Nota che $[x_{n+1}, x_{n+2}] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, 1]$ contengono al massimo $\frac{1}{\varepsilon}$ punti della forma $\frac{1}{m}$. Infatti $\frac{1}{m} > \varepsilon \iff m < \frac{1}{\varepsilon}$

Ora per $x_j^* > \varepsilon$ risulta $f(x_j^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j^* \text{ non è della forma } \frac{1}{m} \\ 1 & \text{se } x_j^* = \frac{1}{m} \end{cases}$

Quindi al massimo $\frac{1}{\varepsilon}$ valori $f(x_j^*)$ sono diversi da 0

Ognuno di questi x_j^* è contenuto in al massimo due intervalli ~~$[x_{j-1}, x_{j}]$~~ $[x_{j-1}, x_j]$. Ma allora

$$0 \le \sum_{j=n+2}^{N} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) \le \delta \sum_{j=n+2}^{N} f(x_j^*) \le 2\frac{\delta}{\varepsilon}$$

segue che $\quad 0 \le S \le \varepsilon + \delta + 2\frac{\delta}{\varepsilon}$

possiamo imporre $\quad \cancel{\varepsilon} + \delta + 2\frac{\delta}{\varepsilon} < 2\varepsilon$

$$\iff \quad \delta < \frac{\varepsilon}{1 + 2/\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}$$

Quindi, se scegliamo $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon^2}{3} < \frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}$ (per $\varepsilon < 1$)

segue che per $|\Delta| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{N} f(x_j^*)(x_j - x_{j-1}) \right| < 2\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ L'integrale di Riemann di $f = 0$.

0

COGNOME e NOME ____________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

- Si scriva cosa significa che f e' integrabile per Riemann in $[0,1]$.

$\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. per ogni decomposizione Δ: $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ di calibro $|\Delta| < \delta_\varepsilon$ e $\forall$ $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$ si ha $\left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j^*) - A \right| < \varepsilon$.

- Siano f e rispettivamente g integrabili secondo Riemann in $[0,1]$ con integrali di Riemann A e rispettivamente B. Si dimostri che $f+g$ e' integrabile per Riemann in $[0,1]$ con integrale $A+B$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon^{(1)} > 0$ t.c. $\forall$ Δ': $x_0' < x_1' < \dots < x_{n'}' = 1$ $|\Delta'| < \delta_\varepsilon^{(1)}$ e $\forall x_j^* \in [x_{j-1}', x_j']$ si ha $\left| \sum_{j=1}^{n'} (x_j' - x_{j-1}') f(x_j^*) - A \right| < \varepsilon$;

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon^{(2)} > 0$ t.c. $\forall$ Δ'': $x_0'' < x_1'' < \dots < x_{n''}'' = 1$ $|\Delta''| < \delta_\varepsilon^{(2)}$ e $\forall y_j^* \in [x_{j-1}'', x_j'']$ si ha $\left| \sum_{j=1}^{n''} (x_j'' - x_{j-1}'') f(y_j^*) - B \right| < \varepsilon$

Sia ora $\delta_\varepsilon = \min(\delta^{(1)}_{\varepsilon/2}, \delta^{(2)}_{\varepsilon/2})$. Allora se Δ: $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n$

- Dimostrare che la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ se $x \neq 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 1$ se $x = 1/n$ per un $n \in \mathbb{N}$, ha integrale di Riemann uguale a 0.

con $|\Delta| < \delta_\varepsilon$ per ogni $z_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$ si ha

$$\left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \left(f(z_j^*) + g(z_j^*) \right) - A - B \right| \leq$$

$$\left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(z_j^*) - A \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) g(z_j^*) - B \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sia $|\Delta| < \delta$ Δ: $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{1+t+t^3}dt$:

Calcolare il polinomio di McLaurin $p_6(x)$ di $f(x)$ di ordine 6;

$$f = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^3}\,dt - \int_0^2 \frac{1}{1+t+t^3} \quad f(0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^3} = 1 - (x+x^3) + (x+x^3)^2 - (x+x^3)^3 + (x+x^3)^4 - (x+x^3)^5 + o(x^5)$$

$$= 1 - x - x^3 + (x^2+2x^4) - (x^3+3x^5) + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

$$= 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 4x^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{3x^5}{5} - \frac{2}{3}x^6 + o(x^6)$$

ESERCIZIO N. 5. Sia $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$, definita da $[x] \le x < [x] + 1$.

- Dimostrare che $\frac{\cos(x)}{x}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.

Integrazione per parti

$$\int_2^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt = \int_2^x \frac{\sin'(t)}{t}\,dt = \frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(2)}{2} + \int_2^x \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$$

$$\xrightarrow{x\to+\infty} 0 - \frac{\sin(2)}{2} + \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt \quad \text{dove}$$

$\frac{\sin(t)}{t^2}$ e' assolutamente integrabile in $[2,+\infty)$.

- Dimostrare che $\frac{\cos(x)}{[x]}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.

$$\cos(x)\frac{1}{[x]} = \frac{\cos x}{x} + \cos x\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{\cos x}{x} + \cos x \; \frac{x-[x]}{x[x]}$$

$\frac{\cos x}{x}$ e' integrabile in $[2,+\infty)$

$$\left|\cos x \; \frac{x-[x]}{x[x]}\right| \le \frac{1}{x[x]} < \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{assolutamente integrabile}$$

per confronto in $[2,+\infty)$

ESERCIZIO N. 2. Per $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione biettiva $x \to (x^{\frac{1}{3}} + 2x^3 + 4x^7)$ e si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x+\arctan(x)} \frac{1}{g(t)} dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t-1)(t-2)^2} dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

- si determini $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

- si determini se $f(x)$ e' continua in $\mathbb{R}$; $g\left(x^{\frac{1}{3}} + 2x^3 + 4x^7\right) = x$.

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{g(y)}{y^p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x^{\frac{1}{3}} + 2x^3 + 4x^7)}{(x^{\frac{1}{3}} + 2x^3 + 4x^7)^p} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^{\frac{p}{3}}(1 + o(1))}$$

$= 1$ per $p = 3$. Cioe' $g(t) = t^3(1 + o(1))$ per $t \to 0$

$$\Rightarrow \int_x^{x+\arctan x} \frac{1}{g(t)} dt = \arctan(x) \frac{1}{g(\xi_x)} \geq \frac{\arctan x}{2(x + \arctan x)^3} \xrightarrow{x \to 0^+} +\infty$$

- si calcoli $f'(x)$ dove e' definita