

Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2020-2021, sessione estiva, primo appello

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} e sia \overline{X} la chiusura di X in \mathbb{R} .

• Si dimostri che se $\sup X = +\infty$, esiste una successione strettamente crescente $\{x_n\}$ di punti di X con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

• Sia $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri irrazionali. Si dimostri che $\overline{X} = \mathbb{R}$.

• Sia $X = \{\frac{n}{5} : n \in \mathbb{Z}\}$. Si dimostri che $\overline{X} = X$.

ESERCIZIO N. 2. Per $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione biettiva $x \rightarrow (x + 2x^3 + 4x^7)$ e si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{x+\arctan(x)} \frac{1}{g(t)} dt & \text{se } x > 0, \\ \int_0^x \frac{t}{(t-1)(t-2)^2} dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

• si determini $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

• si determini $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

• si determini se $f(x)$ è continua in \mathbb{R} ;

• si calcoli $f'(x)$ dove è definita

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_2^x \frac{1}{1+t+t^3} dt$:

Calcolare il polinomio di McLaurin $p_6(x)$ di $f(x)$ di ordine 6;

ESERCIZIO N. 5. Sia $[x] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$, definita da $[x] \leq x < [x] + 1$.

• Dimostrare che $\frac{\cos(x)}{x}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.

• Dimostrare che $\frac{\cos(x)}{[x]}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.