Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2020/2021 - 21 giugno 2021
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di soluzione di un sistema lineare.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Struttura per sistemi lineari omogenei e non omogenei.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

$\mathrm{rg}\, A = 2 = \dim \mathrm{Im} f$, $\quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Teorema di dimensione: $3 = \mathrm{rg}\, f + \dim \ker f \Rightarrow \dim \ker f = 3 - 2 = 1$

Equazioni di $\ker f$: $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, una soluzione non nulla è $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(r)$ della retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x_1 & = -t \\ x_2 & = t \\ x_3 & = t \end{cases}$$

$r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \ker f \quad \Rightarrow \quad f(r) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim f(r) = 0$ e non ha una base

(d) **(3 punti)** Si dica se il seguente sistema è compatibile, e in caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dove $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

Osservo che $\mathrm{rg}\, A = 2 = \mathrm{rg}\left(A \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, quindi per Rouché - Capelli il sistema è compatibile e la generica soluzione dipende da $n - \mathrm{rg}\, A = 3 - 2 = 1$ parametro.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} + \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema è equivalente al

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Pongo $x_3 = c \Rightarrow x_2 = c$
$\Rightarrow x_1 = 1 - c$

l'insieme delle soluzioni è $\left\{\begin{pmatrix} 1-c \\ c \\ c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}$

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$P_B(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & 2 \\ -1 & 2 & 2-x \end{pmatrix} = -x(x-3)(x-6)$$

$$S_p(L_B) = \{0, 3, 6\}$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{equazioni} \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \quad V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{equazioni} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad V_3 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$$

$$V_6 = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{equazioni} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad V_6 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

perché è una matrice ortogonale

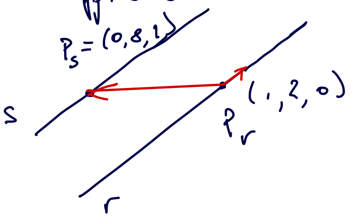
(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x &= -\tau \\ y &= 8+\tau \\ z &= 1-2\tau \end{cases}$$

Si dica se sono parallele, o incidenti oppure sghembe. Nel caso siano complanari, si trovi un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Le giaciture verificano $W_r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$, $W_s = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ e siccome i due vettori sono proporzionali, le giaciture sono uguali, quindi le rette sono parallele.

Sappiamo che due rette parallele sono complanari.



Il piano $H \supseteq r \cup s$ ha come giacitura

$$W_H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{P_rP_s}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}\right)$$

eq. cartesiana di H: $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 6 & y-2 \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} = 0$

$$13x + 3y - 5z = 19$$

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(1,1,1)$ e parallelo al piano

$$H : \begin{cases} x = & 1-s \\ y = & -2+3t+s \\ z = & -3+t. \end{cases}$$

$$W_H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = W_{H'}$$

H' : $\begin{cases} x = 1-s \\ y = 1+3t+s \\ z = 1+t \end{cases}$, eq. cartesiana

$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 3 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & z-1 \end{pmatrix} = 0$, $\quad x + y - 3z = -1$