Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2020-2021, sessione estiva, primo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $\overline{X}$ la chiusura di X in $\mathbb{R}$.

• Si dimostri che se $\sup X = +\infty$, esiste una successione strettamente crescente $\{x_n\}$ di punti di X con $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$\forall n$ so che $\exists\ y_n \in X$ t.c. $n < y_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$

Quindi abbiamo trovato $\{y_n\}$ in X con $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Definiamo $x_k = y_{n_k}$ in modo tale che $\{x_k\}$ sia strett. crescente.

$x_1 = y_{n_1}$. Supponiamo per induzione che $\underset{y_{n_1}}{x_1} < \underset{y_{n_2}}{x_2} < \dots < \underset{y_{n_k}}{x_k}$. $\exists ?\ m \in \mathbb{N}$

con $m > n_k$ ed $y_m > y_{n_k}$? Sì! Allora poniamo $n_{k+1} = m$

$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ $\quad y_{n_1} < y_{n_2} < \dots < y_{n_k} < y_{n_{k+1}}$

$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1}$

• Sia $X = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri irrazionali. Si dimostri che $\overline{X} = \mathbb{R}$.

• Sia $X = \{\frac{n}{5} : n \in \mathbb{Z}\}$. Si dimostri che $\overline{X} = X$.

$\overline{X} = X \cup X'$

Abbiamo visto che $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ perché $\mathbb{Z}' = \emptyset$

Se per assurdo fosse $\overline{X} \supsetneq X \Rightarrow \exists\ \bar{x} \in X'$.

Cioè $\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x \in X \text{ t.c. } 0 < |\bar{x} - x| < \varepsilon.}$

$x = \frac{n}{5}$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |\bar{x} - \frac{n}{5}| < \varepsilon$

$\iff 0 < |5\bar{x} - n| < 5\varepsilon$. Cioè $5\bar{x}$ soddisfa:

che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |5\bar{x} - n| < 5\varepsilon \iff$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |5\bar{x} - n| < \varepsilon$.

$\Rightarrow 5\bar{x} \in \mathbb{Z}'$ assurdo

$\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty \implies$

$\forall K > 0 \ \exists M_K$ t.c.

$n > M_K \implies y_n > M_K$.

Se fisso $K = y_{n_k}$ $\exists M$ t.c.

$n > M \implies y_n > y_{n_k}$

$\implies$ $\exists$ infinite m con $m > M \implies y_m > y_{n_k}$

t.c.

$m > n_k$

ESERCIZIO N. 2. Per $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione biettiva $x \to (x + 2x^3 + 4x^7)$ e si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x+\arctan(x)} \frac{1}{g(t)}\,dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t-1)(t-2)^2}\,dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;

- si determini $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

- si determini se $f(x)$ e' continua in $\mathbb{R}$;

- si calcoli $f'(x)$ dove e' definita

0

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

• Si scriva cosa significa che f e' integrabile per Riemann in $[0, 1]$.

• Siano f e rispettivamente g integrabili secondo Riemann in $[0, 1]$ con integrali di Riemann A e rispettivamente B. Si dimostri che $f + g$ e' integrabile per Riemann in $[0, 1]$ con integrale $A + B$.

• Dimostrare che la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ se $x \neq 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = 1$ se $x = 1/n$ per un $n \in \mathbb{N}$, ha integrale di Riemann uguale a 0.

$$f(x) = \boxed{\int_2^x (1-t+t^2-2t^3+3t^4-4t^5)\,dt} + \int_2^x o(t^5)\,dt \quad \boxed{\int_2^0 o(t^5)\,dt}$$

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_2^x \frac{1}{1+t+t^3}dt$: $= \int_0^x \frac{1}{1+t+t^3}dt - \int_0^2 \frac{1}{1+t+t^3}$ $f(0)$

Calcolare il polinomio di McLaurin $p_6(x)$ di $f(x)$ di ordine 6;

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^3}dt + f(0)$$

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^{5} (-1)^j y^j + o(y^5) \qquad y = t+t^3 \qquad o((t+t^3)^5) = o(t^5)$$

$$\frac{1}{1+t+t^3} = \sum_{j=0}^{5} (-1)^j (t+t^3)^j + o(t^5) = \sum_{j=0}^{5} (-1)^j t^j (1+t^2)^j + o(t^5) =$$

$$= 1 - t(1+t^2) + t^2 \underbrace{(1+t^2)^2}^{1+2t^2+t^4} - t^3 \underbrace{(1+t^2)^3}_{(1+3t^2+\dots)} + t^4(1+t^2)^4 - t^5(1+t^2)^5 + o(t^5)$$

$$= 1 - t - t^3 + t^2 + 2t^4 - t^3 - 3t^5 + t^4 - t^5 + o(t^5)$$

$$= 1 - t + t^2 - 2t^3 + 3t^4 - 4t^5 + o(t^5)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t+t^3}dt = \int_0^x (1-t+t^2-2t^3+3t^4-4t^5)\,dt + \int_0^x o(t^5) \quad o(x^6)$$

ESERCIZIO N. 5. Sia $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$, definita da $[x] \le x < [x] + 1$.

- Dimostrare che $\frac{\cos(x)}{x}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.

E' integrabile, cioe' $\lim_{R \to +\infty} \int_2^R \frac{\cos x}{x}dx \in \mathbb{R}$.

$$\int_2^R \frac{\cos x}{x}dx = \int_2^R \frac{(\sin x)'}{x} = \frac{\sin x}{x}\Big]_2^R + \int_2^R \frac{\sin x}{x^2}dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\Big]_2^R = -\frac{\sin(2)}{2} \quad \text{e inoltre} \quad \lim_{R\to+\infty} \int_2^R \frac{\sin x}{x^2}dx$$

esiste finito perché $0 \le \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \in L([2,+\infty))$

$$\Rightarrow \frac{|\sin x|}{x^2} \in L[2,+\infty)$$

- Dimostrare che $\frac{\cos(x)}{[x]}$ e' integrabile in $[2, +\infty)$.

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x^2} \in L[2,+\infty)$$

$$\frac{\cos x}{[x]} = \cos x \left(\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos x}{x} + \cos x\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)$$

integr.

$$[x] \le x < [x]+1$$
$$0 \le x - [x] < 1$$

$$0 \le |\cos x| \frac{x-[x]}{[x]\,x} \le |\cos x| \frac{1}{x[x]} \le$$

$$[x] = x + [x] - x = x\left(1 + \frac{[x]-x}{x}\right) \quad o(1)$$

$$\le \frac{1}{x^2(1+o(1))} = \frac{1}{x^2}(1+o(1)) \in L[2,+\infty) \qquad = x(1+o(1))$$

$$\Rightarrow \cos x\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) \text{ e' ass. integrabile.}$$

Se $\boxed{f(x) = P(x) + o(x^n)}$ con grado $P \leq n$

allora $P(x)$ è il polinomio di McLaurin

di $f(x)$

$$f(x) = P(x) + \underbrace{(f(x) - P(x))}_{o(x^n)}$$