Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2020-2021, sessione estiva, primo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

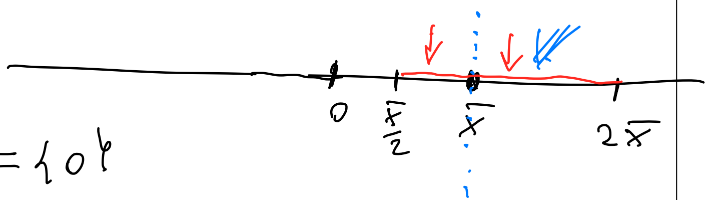
N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $\overline{X}$ la chiusura di X in $\mathbb{R}$.

• Si dimostri che se $\inf X = -\infty$, esiste una successione strettamente crescente $\{x_n\}$ di punti di X con $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

• Sia $X = \{\pi q : q \in \mathbb{Q}\}$. Si dimostri che $\overline{X} = \mathbb{R}$.



• Sia $X = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Si trovi $\overline{X}$. $X' = \{0\}$

Infatti $0 \in X'$ perché $0 = \lim_{n\to-\infty} 2^n$.

Non ci sono altri punti di accumulazione. Infatti se $\bar{x} < 0$ allora $|2^n - \bar{x}| = 2^n - \bar{x} > -\bar{x} > 0 \Rightarrow \bar{x} \notin X'$

se $\bar{x} > 0$ so che solo per un numero finito di n ho $2^n \in [\frac{\bar{x}}{2}, 2\bar{x}] \Rightarrow \bar{x} \notin X'$.

$f(x) = \tan(e^x)$ $\qquad P_3$

$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$

$f(0) = \tan(1)$

$f'(x) = (1+\tan^2(e^x))\, e^x$

$f'(0) = (1+\tan^2(1))$

$f''(x) = f'(x) + 2\tan(e^x)(1+\tan^2(e^x))\, e^{2x}$

ESERCIZIO N. 2. Per $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione biettiva $x \to (x^{\frac{1}{3}} + 2x^3 + 4x^7)$ e si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x+\arctan(x)} \frac{1}{g(t)}dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t-1)(t-2)^2}dt & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- si determini $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

- si determini $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

- si determini se $f(x)$ e' continua in $\mathbb{R}$;

- si calcoli $f'(x)$ dove e' definita

0

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

• Si scriva cosa significa che f e' integrabile per Riemann in $[0, 1]$.

• Siano f e rispettivamente g integrabili secondo Riemann in $[0, 1]$ con integrali di Riemann A e rispettivamente B. Si dimostri che se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora $A \leq B$.

• Dimostrare che la funzione $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ se $x \neq 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = n$ se $x = 1/n$ per un $n \in \mathbb{N}$, e' integrabile in senso imporprio in $(0, 1]$ e calcolarne l'integrale improprio in $(0, 1]$.

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{1+t+t^3}dt$:

Calcolare il polinomio di McLaurin $p_6(x)$ di $f(x)$ di ordine 6;

ESERCIZIO N. 5. Sia $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la parte intera di $x \in \mathbb{R}$, definita da $[x] \leq x < [x] + 1$.

- Dimostrare che $\frac{\sin(x)}{x}$ e' integrabile in $(-\infty, -2])$.

- Dimostrare che $\frac{\sin(x)}{[x]}$ e' integrabile in $(-\infty, -2])$.