Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2020-2021, sessione estiva, secondo appello

COGNOME STAMPATELLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Z}$.

• Si dimostri che se $\sup X < +\infty$ allora esiste $\max X$. Sia $S := \sup X$ e fissiamo $x_0 \in X$. Allora $Y = \{x \in X : x_0 \le x \le S\}$ è finito ed ha $\max Y$. Se $y \in Y$ ovviamente $y \le \max Y$. Se $x \in X \setminus Y$ allora $x < x_0 \le \max Y$. Quindi $\max Y = \max X$.

• Si dimostri che se $\inf X > -\infty$ allora esiste $\min X$.

Si può o ripetere con opportune modifiche, oppure si può definire $Y = \{-x : x \in X\}$. Allora $\inf X = -\sup Y < +\infty$. Sia $\max Y$ dato dalla prima parte. Allora $-\max Y = \min X$.

• Si dimostri che se esiste $\min X$ e se $n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$ allora $X = \mathbb{Z} \cap [\min X, +\infty)$.

Sia $n_0 = \min X$ e poniamo

$$Y = \{n - n_0 : n \in X\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$$

Allora (i) $Y \ni 0$

(ii) Se $m = n - n_0 \in Y \iff n \in X \Rightarrow n+1 \in X$

$\iff m+1 = n+1-n_0 \in Y$.

$\Rightarrow$ per il principio di induzione applicato a $\{0, 1, 2, \dots\}$ che $Y = \{0, 1, 2, \dots\}$ e da $X = \{m + n_0 : m \in Y\}$ che $X = \{n_0, n_0+1, \dots\}$

ESERCIZIO N. 2. Studio della funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x e^{\frac{1}{t}}\,\frac{t+1}{t-1}\,dt.$$

$\sim g(t)$

$\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, 0]$

- Si determini il dominio di definizione;

Si noti che per $x>0$ la funzione $g(t)$ non è integrabile in $[0,x]$ (poichè $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{\frac{1}{t}} = -\infty$). Invece, posto $g(0)=0$, risulta $g \in C^0((-\infty,0])$. Quindi $g(t)$ è integrabile in $[x,0]$ $\forall x<0$

- i limiti agli estremi del dominio di definizione ed i particolare se ci sono rette asintotiche;

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Notare che $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = 1$

Per $x\to-\infty$, $f(x) = \int_0^x (1+o(1))$

$\exists\, t_0<0$ t.c. $t\le t_0 \Rightarrow g(t) \ge \frac{1}{2}$. Per $x<t_0$

$$f(x) = \int_0^{t_0} g(t)\,dt + \int_{t_0}^x g(t)\,dt \le \int_0^{t_0} g(t)\,dt + \frac{x-t_0}{2} \longrightarrow -\infty$$

- eventuali punti di massimo e di minimo;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x+1}{x-1} = 1$, $f(x)-x = \int_0^x (g(t)-1)\,dt$.

Ora $g(t)-1 = e^{\frac{1}{t}}\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - e^{\frac{1}{t}} + e^{\frac{1}{t}} - 1 = e^{\frac{1}{t}}\frac{2}{t-1} + \frac{1}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{3}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$

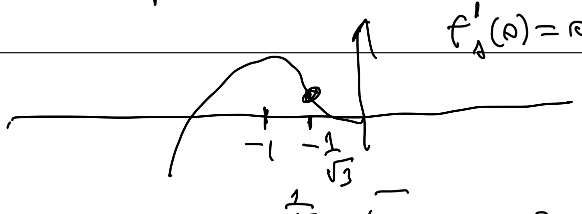
non è integrabile vicino a $-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = +\infty \Rightarrow$ non esiste retta asintotica a $-\infty$

- convessita' e concavita'.

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x+1}{x-1} = 0$ per $x=-1$ $\qquad f'(x)<0$ per $x\in(-1,0)$

$f'(x)>0$ per $x<-1$. -1 punto di max assoluto. Non esistono punti di minimo

$f'_s(0) = 0$



$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\,\frac{x+1}{x-1} + \frac{(\cancel{x}-1)-(\cancel{x}+1)}{(x-1)^2}\right] = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}\left[\frac{-x-1}{x^2} - \frac{2}{(x-1)}\right] =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x-1)^2}\left(-x^2+1-2x^2\right).$$

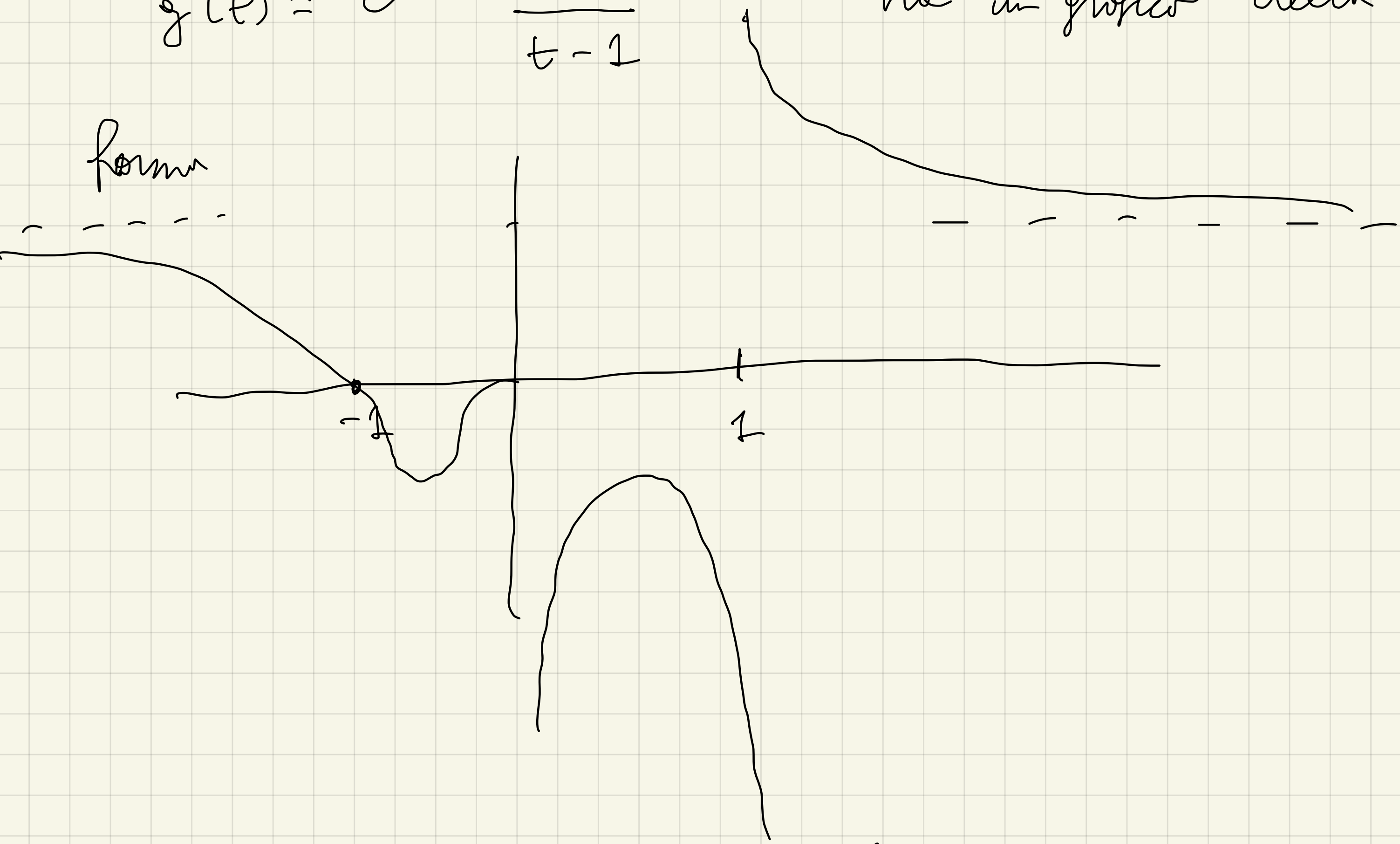
che ha zeri $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

L'unico che ci interessa è $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, che è l'unico flesso

Commento. La funzione

$$g(t) = e^{\frac{1}{t}}\,\frac{t+1}{t-1}$$

ha un grafico della forma



Per $x > 0$, nell'intervallo $(0, x)$, non è integrabile in senso improprio perchè, come spiegato sopra non è integrabile vicino a 0 sulla destra.

0

COGNOME e NOME STAMPATELLO LEGGIBILE **N. Matricola**

ESERCIZIO N. 3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile per Darboux in $[0,1]$.

• Si dimostri che se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$, allora $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$.

Sia $\Delta_0 : x_0 = 0 < \dots < x_n = 1$ una decomposizione.

$\int_0^1 f(x)\,dx = \sup\{s(\Delta) : \Delta$ varia tra tutte le decomposizioni$\} \geq s(\Delta_0)$

$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\inf f([x_{j-1}, x_j])}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$

• Sia $f \in C^0([0,1])$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$ ed f diversa dalla funzione nulla. Dimostrare che $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

Sia y t.c. $f(y) > 0$. Allora $\exists$ un intervallo $I \subseteq [0,1]$ t.c. $f \geq \frac{1}{2} f(y)$ in I. Sia Δ una decomposizione $x_0 = 0 < \dots < x_n = 1$ t.c. $I = [x_{j_0-1}, x_{j_0}]$.

Allora $\int_0^1 f(x)\,dx \geq s(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$

$\geq (x_{j_0} - x_{j_0-1}) \inf f([x_{j_0-1}, x_{j_0}]) \geq (x_{j_0} - x_{j_0-1}) \frac{f(y)}{2} > 0$

• Dimostrare che se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ differisce da f solo nel punto 0 e se pertanto in $(0,1]$ abbiamo $f = g$, allora $g \in L[0,1]$ e $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Non è restrittivo supporre che $g(0) > f(0)$. Allora

$$g(x) - f(x) = \begin{cases} g(0) - f(0) > 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Allora $g - f$ è decrescente ed è quindi integrabile in $[0,1]$

$\Rightarrow g \in L[0,1]$. Inoltre $g - f \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 (g-f)\,dx \geq 0$.

Sia Δ_n la decomposizione di $[0,1]$ in intervalli uguali di lunghezza $\frac{1}{n}$

Allora per $g-f$, $S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup (g-f)([x_{j-1}, x_j]) =$

$= (x_1 - x_0) \sup (g-f)([0, x_1]) = (x_1 - x_0)(g(0) - f(0))$

$= \frac{1}{n}(g(0) - f(0)) \geq \int_0^1 (g-f)\,dx \geq 0$ $\forall n$. Per $n \to +\infty$ segue che

$\int_0^1 (g-f) = 0$

Nella seconda domanda si poteva procedere anche come segue, applicando il Teor. fond. del calcolo.

E cioè $\forall \quad x \in [0,1]$ abbiamo

$$F(x) \doteq \int_0^x f(t)\,dt \geq 0$$

$F'(x) = f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ visto che $f \in C^0([0,1])$.

Se fosse $F(1) = 0$ allora $F(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

(visto che $F' \geq 0$ e $F(0) = 0$)

Ma questo implicherebbe $F'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Falso per ipotesi.

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x^2)$:

Calcolare tutti i punti di McLaurin $f(x)$.

$$\sin y = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(y^{2n+1}) \qquad \cos y = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j}}{(2j)!} + o(y^{2n})$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(y^{2n+2}). \qquad = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{y^{2j}}{(2j)!} + o(y^{2n+1})$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{x^{4j+2}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{4j}}{(2j)!} + o(x^{4n}) = P_{4n}(x) + o(x^{4n})$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{4j+2}}{(2j+1)!} + \sum_{j=0}^{n} (-1) \frac{x^{4j}}{(2j)!} + o(x^{4n+2}) = P_{4n+2}(x) + o(x^{4n+2})$$

ESERCIZIO N. 5. Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$.

- Stabilire per quali valori di $p > 0$ la funzione f e' integrabile in $(0, +\infty)$.

Se c'è integrabilità abbiamo $\int_0^{+\infty} f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ è integrabile per ogni $p > 0$, come si vede integrando per parti come nel caso $p = 1$. Invece per $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

abbiamo $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-1}}} = 1 \Rightarrow$ c'è integrabilità esattamente se $\frac{1}{x^{p-1}} \in L((0,1])$, cioè per $p-1<1 \Rightarrow p<2$.

- Dimostrare che $\sqrt{x}\sin x$ non e' integrabile in $(0, +\infty)$.

$$\int_0^R \sqrt{x}\sin x\,dx = -\int_0^R x^{\frac{1}{2}}(\cos x)'\,dx = -R^{\frac{1}{2}}\cos(R) + \frac{1}{2}\int_0^R \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Siccome risulta $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \in L((0,+\infty))$ e quindi $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ esiste ed è finito e siccome $\lim_{R\to+\infty} R^{\frac{1}{2}}\cos(R)$ non esiste, segue che $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \sqrt{x}\sin x\,dx$ non esiste e perciò $\sqrt{x}\sin x$ non è integrabile in $(0,+\infty)$.