

Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2020-2021, sessione estiva, secondo appello

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{Z} .

- Si dimostri che se $\sup X < +\infty$ allora esiste $\max X$.
- Si dimostri che se $\inf X > -\infty$ allora esiste $\min X$.
- Si dimostri che se esiste $\min X$ e se $n \in X \Rightarrow (n + 1) \in X$ allora $X = \mathbb{Z} \cap [\min X, +\infty)$.

0

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile per Darboux in $[0, 1]$.

- Si dimostri che se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, allora $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$.
- Sia $f \in C^0([0, 1])$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ ed f diversa dalla funzione nulla. Dimostrare che $\int_0^1 f(x) dx > 0$.
- Dimostrare che se $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differisce da f solo nel punto 0 e se pertanto in $(0, 1]$ abbiamo $f = g$, allora $g \in L[0, 1]$ e $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x^2)$:

Calcolare tutti i punti di McLaurin $f(x)$.

ESERCIZIO N. 5. Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$.

• Stabilire per quali valori di $p > 0$ la funzione f e' integrabile in $(0, +\infty)$.

• Dimostrare che $\sqrt{x} \sin x$ non e' integrabile in $(0, +\infty)$.