ESAME DI GEOMETRIA - III APPELLO A.A. 2020/21

Trieste, 30 giugno 2021

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Considerare il seguente sistema lineare reale:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 = c \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = d \end{cases}$$

   Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema indicando a ogni passo gli elementi pivot e i gradini. Determinare la condizione che devono soddisfare i parametri a, b, c e d affinché il sistema sia compatibile. Trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

2. Si consideri la seguente matrice di $M(3 \times 3, \mathbb{C})$:

$$A_c = \begin{pmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   dove $c \in \mathbb{C}$ è un parametro.

   Verificare che A_c è diagonalizzabile per ogni c diverso da 0. Per tali c scrivere una matrice diagonale simile ad A_c e una base di $\mathbb{C}^3$ di autovettori di A_c.

3. In ciascuno dei tre casi seguenti dire se esistono applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate; nel caso in cui la risposta è positiva, dire se ne esiste una sola o più d'una.
   (a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker f =< (1,1,0,2) >$;
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Im}(g) =< (2,5) >$;
   (c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\mathrm{Im}(h)$ sia generata da $v_1 = (3,1,1)$ e $v_2 = (-1,2,0)$.

4. Considerare il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

Denotiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Dati i vettori $v = (1+\sqrt{2})e_1 + e_3$, $w = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare le loro norme e l'angolo convesso fra v e w rispetto al prodotto scalare sopra definito.

b) Rispetto allo stesso prodotto scalare, trovare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato da v_1, v_2 dove $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (3, 1, 1)$, e completarla a una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

c) Giustificare l'affermazione che si tratta di un prodotto scalare.